

ZASTOSOWANIE METODY LINII MACHA DO WYZNACZANIA NADDŹWIĘKOWEGO OPLYWU SKRZYDEŁ O DOWOLNYM OBRYŚIE

TOMASZ GOETZENDORF-GRABOWSKI

WSK "PZL Warszawa Okęcie"¹

JÓZEF PIETRUCHA

Poitechnika Warszawska

Praca dotyczy sposobu wyznaczania potencjału prędkości zaburzeń pola prędkości wokół skrzydeł w ustalonym opływie naddźwiękowym. Wyniki aerodynamiki teoretycznej dla cienkich skrzydeł o dowolnym obrysie zostały przystosowane do obliczeń praktycznych. Celem pracy było pokazanie metody, nazwanej przez nas METODĄ LINII MACHA, która może być stosowana do obliczeń szeregu wielkości aerodynamicznych niezbędnych przy projektowaniu aerodynamicznym samolotów.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a — prędkość dźwięku
- a_{∞} — prędkość dźwięku przepływu niezaburzonego
- b — rozpiętość płata
- c — cięciwa płata
- c_a — średnia cięciwa aerodynamiczna

¹Obecnie pracownik Instytutu Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej

- $E(\beta, \Lambda)$ — pełna funkcja eliptyczna

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \Lambda) \sin^2 \varphi} d\varphi$$
 Ma_∞ — liczba Macha przepływu niezaburzonego ($Ma_\infty = V_\infty/a_\infty$)
 S — powierzchnia płata
 t — czas
 V_∞ — prędkość przepływu niezaburzonego
 V — wektor prędkości
 u, v, w — składowe prędkości zaburzeń odpowiednio wzdłuż osi x, y, z
 x, y, z — współrzędne kartezjańskie
 α — kąt natarcia
 β — współczynnik Prandtla-Glauerta ($\beta = \sqrt{Ma_\infty^2 - 1}$)
 $\varphi(x, y, z)$ — potencjał prędkości zaburzeń
 $\phi(x, y, z)$ — pełny potencjał prędkości
 κ — wykładnik izentropy
 Λ — skos odpowiedniej krawędzi skrzydła
 λ — zbieżność skrzydła
 μ_∞ — kąt Macha ($\sin \mu_\infty = Ma_\infty^{-1}$)
 ρ — gęstość powietrza
 ρ_∞ — gęstość powietrza w przepływie niezaburzonym
Indeksy
 LE — krawędź natarcia
 TE — krawędź splywu

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy było opracowanie czegoś w rodzaju "przewodnika" do wyznaczania potencjału prędkości zaburzeń pola prędkości wokół skrzydeł w opływie naddźwiękowym. Znajomość tej wielkości pozwala na wyznaczenie współczynników niezbędnych do obliczeń aerodynamicznych samolotów. Warto zwrócić uwagę, że w podstawowym w Polsce podręczniku [1] naddźwiękowy opływ skrzydeł w ogóle nie jest rozpatrywany, choć na świecie istniało już wówczas kilka monografi ujmujących ten temat (np. [2],[3]). Tym nie mniej korzystanie z dostępnej literatury nie jest łatwe, gdyż siłą rzeczy, książki są zbyt rozwlekłe, a artykuły zbyt skrótowe. Nasze opracowanie stanowić miało więc próbę wypełnienia tej luki.

2. Wybrane cechy opływu naddźwiękowego

Opływ naddźwiękowy skrzydeł różni się od opływu poddźwiękowego kilkoma istotnymi cechami. Najważniejszą z nich, z punktu widzenia omawianej metody, jest sposób rozchodzenia się zaburzeń. W opływie poddźwiękowym zaburzenia rozchodzą się we wszystkich kierunkach od punktu w którym powstały, natomiast w opływie naddźwiękowym jedynie w obszarze stożka Macha o wierzchołku w punkcie, z którego wychodzi zaburzenie.

W związku z tym, dla dalszej analizy wprowadzamy pojęcia prostego i odwrotnego stożka Macha (niekiedy określanych mianem strefy wpływu i zależności) oraz pojęcia linii Macha prostej i odbitej (rys.1)¹.

Posługujemy się również pojęcia krawędzi poddźwiękowej i naddźwiękowej. Krawędzią poddźwiękową nazywamy krawędź znajdującą się wewnątrz prostego stożka Macha. Jeśli krawędź znajduje się poza tym obszarem nazywamy ją krawędzią naddźwiękową. Cechą charakterystyczną krawędzi poddźwiękowej jest oddziaływanie między dolną i górną powierzchnią skrzydła. Dla krawędzi naddźwiękowych takie oddziaływanie nie zachodzi - można wtedy mówić o separacji obu powierzchni.

Przez analogię wprowadzamy pojęcie pod- i naddźwiękowych krawędzi bocznych. Zauważmy, że jeżeli krawędź boczna jest równoległa do kierunku prędkości opływu V_∞ (jak dla skrzydła trapezowego), to jest ona zawsze poddźwiękowa. Mamy wówczas do czynienia ze znanym efektem skończonej rozpiętości w przepływie poddźwiękowym. Zjawisko takie nie występuje, jeśli krawędź boczna jest naddźwiękowa.

Dla poddźwiękowej krawędzi splywu może wystąpić inny efekt znany z przepływu poddźwiękowego, a mianowicie wpływ śladu wirowego za skrzydłem na rozkład ciśnienia na skrzydle. Efekt taki nie występuje dla naddźwiękowej krawędzi splywu.

Jak widać skrzydło może mieć zarówno naddźwiękowe jak i poddźwiękowe krawędzie natarcia, boczne i splywu. Jeżeli wszystkie krawędzie są naddźwiękowe (np. skrzydło typu delta), to mówimy, że jest to skrzydło o prostym obrysie (ang. a simple planform - rys.2).

3. Model fizyczny

Na model fizyczny składają się następujące założenia :

a) dotyczące obiektu (rys.3):

— skrzydło izolowane (brak interferencji między skrzydłem a np. kadłubem),

¹ Wszystkie rysunki na końcu pracy

- skrzydło cienkie, płaskie,
- proste krawędzie natarcia i spływu (brak załamania),
- równoległe krawędzie boczne,
- b) dotyczące opływu:
 - mały kąt natarcia,
 - jest spełniony warunek Kutty-Żukowskiego,
 - ślad wirowy leży w płaszczyźnie skrzydła,
 - wiry swobodne są równoległe do prędkości przepływu niezaburzonego,
 - brak lepkości,
 - opływ bez oderwania,
 - słabe fale uderzeniowe,
 - zaniedbanie sił masowych,
 - płyn nie przewodzi ciepła
 - zachodzi równowaga termodynamiczna.

4. Model różniczkowy opływu naddźwiękowego

Wyrazem założeń poczynionych w punkcie 3. są następujące równania:

— równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (4.1)$$

— równanie Eulera

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (4.2)$$

— równanie stanu

$$p = p_{\infty}(\rho/\rho_{\infty}). \quad (4.3)$$

Układ równań (4.1)÷(4.3) stanowi wprawdzie model zamknięty (ta sama ilość równań i niewiadomych), ale jest bardzo niewygodny do obliczeń. Dlatego czyni się dalsze założenia upraszczające. Po pierwsze zakładamy, że w opływie nie tworzą się wiry. Warunek bezwirowości pola prędkości ma postać:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0 \quad (4.4)$$

skąd wynika, że istnieje funkcja skalarna, zwana potencjałem prędkości taka, że:

$$\operatorname{grad} \phi(x, y, z, t) = \mathbf{V}. \quad (4.5)$$

Równanie Eulera pod warunkiem (4.4) można scałkować otrzymując całkę Cauchy'go - Lagrange'a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \int \frac{dp}{\rho} = 0, \quad (4.6)$$

gdzie do funkcji ϕ włączono również stałą całkowania zależną tylko od czasu.

Po wykorzystaniu definicji prędkości dźwięku

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (4.7)$$

i równania (4.6), równanie (4.1) można przedstawić w postaci:

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_c \text{grad} \right)^2 \phi = \nabla^2 \phi, \quad (4.8)$$

gdzie indeks c oznacza, że V nie podlega różniczkowaniu. Równanie (4.8) nazywamy równaniem Garricka, gdyż po raz pierwszy zostało podane przez niego w 1948 r. Stanowi ono podstawowy model różniczkowy nieustalonego przepływu potencjalnego, płynu nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła. Zauważmy przy okazji, że dla przepływu nieściśliwego ($a = \infty$) równanie (4.8) sprowadza się do "zwykłego" równania Laplace'a

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = 0. \quad (4.9)$$

Równanie Garricka jest modelem nadal zbyt skomplikowanym. Aby móc je efektywnie wykorzystać, należy dokonać dalszych uproszczeń prowadzących do równań opisujących konkretną sytuację fizyczną. W niniejszej pracy będzie to liniowy opływ naddźwiękowy.

Po drugie zakładamy, że potencjał prędkości można przedstawić w postaci:

$$\phi = V_\infty x + \varphi(x, y, z, t). \quad (4.10)$$

Zakładamy ponadto, że:

$$|\text{grad} \varphi| \ll \begin{cases} V_\infty \\ a_\infty \\ V_\infty - a_\infty \end{cases}. \quad (4.11)$$

Po uwzględnieniu założenia (4.10), warunków (4.11) i przeprowadzeniu jak najdalej idącej linearyzacji, równanie (4.8) przybiera postać:

$$\frac{1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi = \nabla^2 \varphi. \quad (4.12)$$

Równanie (4.12) jest już równaniem liniowym i obowiązuje w pod- i naddźwiękowym zakresie prędkości.

Po trzecie zakładamy, że opływ jest ustalony, tzn.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv 0, \quad (4.13)$$

dzięki czemu równanie (4.12) przybiera postać

$$Ma_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \nabla^2 \varphi, \quad (4.14)$$

skąd dla przepływu naddźwiękowego otrzymujemy

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.15)$$

Równanie (4.15) jest równaniem typu hiperbolicznego. Dla takich równań stawia się następujące warunki brzegowe:

— w nieskończoności znika potencjał prędkości zaburzeń

$$\varphi = 0, \quad (4.16)$$

— na skrzydle "nieprzepuszczalnym" (np. bez sterowania warstwą przyścienną za pomocą zasysania)

$$V_{b/n} = V_{f/n}, \quad (4.17)$$

gdzie symbole w indeksach oznaczają odpowiednio: b - skrzydło f - płyn, n - kierunek normalny do powierzchni skrzydeł,

— na poddźwiękowej krawędzi splywu

$$\Delta p(x, y)_{TE} = 0, \quad (4.18)$$

— w śladzie wirowym

$$\partial \varphi(x, y) / \partial x = 0. \quad (4.19)$$

5. Obliczanie potencjału prędkości zaburzeń

Dla skrzydeł o prostym obrysie rozwiązanie równania (4.15) wyraża się związkiem (zob. [2],[3])

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{\Pi} \iint_{\Sigma(x, y, z)} \frac{w(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R}, \quad (5.1)$$

gdzie:

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (5.2)$$

oznacza składową pionową prędkości nad źródłem punktowym o współrzędnych $(\xi, \eta, 0)$ - rys.3, oraz

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2[(y - \eta)^2 + z^2]}, \quad (5.3)$$

natomiast $\Sigma(x,y,z)$ oznacza obszar całkowania obejmujący część płaszczyzny xy , która leży wewnątrz odwrotnego stożka Macha o wierzchołku w punkcie (x, y, z) .

Na powierzchni skrzydła, na podstawie (5.1) dla $z = 0$ mamy

$$\varphi(x, y, 0) = -\frac{1}{\Pi} \iint_{\Sigma(x,y)} \frac{w(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R}, \quad (5.4)$$

gdzie:

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2(y - \eta)^2}. \quad (5.5)$$

Omówimy teraz trudności ze stosowaniem związku (5.4). Otóż związek ten z uwzględnieniem zależności (5.2) staje się bądź wzorem (jeśli w jest dane), bądź równaniem całkowym (jeśli w nie jest znane). Przypadek pierwszy zachodzi jedynie na powierzchni skrzydła. Jeśli w charakterze modelu skrzydła weźmiemy płaską płytkę znajdującą się pod małym kątem natarcia, to możemy zapisać:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -V_{\infty} \alpha. \quad (5.6)$$

Dla skrzydła z poddźwiękowymi krawędziami natarcia są jednak dalej trudności: obszar całkowania zawarty w odwrotnym stożku Macha obejmuje nie tylko skrzydło (obszar S_0), ale także dwa obszary między krawędziami natarcia a liniami Macha (obszary δ_1 i δ_2) - rys.4. Tymczasem wielkość $\partial \varphi / \partial z$ dla tych obszarów nie jest znana! Zatem nawet dla skrzydła typu DELTA z poddźwiękowymi krawędziami natarcia nie możemy zrobić bezpośredniego użytku ze związku (5.4).

Inne sytuacje kłopotliwe przedstawione są na rysunkach 5 i 6. Pierwsza pojawia się z chwilą przejścia od skrzydła o obrysie prostym do skrzydła trapezowego (dla którego krawędź boczna jest zawsze poddźwiękowa). Mamy tu do czynienia z efektem krawędzi bocznej - obliczenie potencjału ze związku (5.4) także nie jest możliwe. Druga dotyczy poddźwiękowej krawędzi splywu (rys.6). W tym przypadku występuje efekt śladu wirowego, w którym nie znane jest $\partial \varphi / \partial z$ w śladzie.

5.1. Uwzględnienie efektu krawędzi bocznej

Omówimy teraz sposób pokonania trudności związanych z omówionym wyżej efektem krawędzi bocznej. W tym celu rozbijamy obszar całkowania Σ - rys.7.

$$\Sigma = S_1 + S_2 + \delta, \quad (5.7)$$

Wówczas związek (5.4) z uwzględnieniem warunku (5.6) oraz "rozbicia" (5.7) przybiera postać:

$$\varphi(x, y) = \frac{V_{\infty}}{\Pi} \iint_{S_1+S_2} \frac{\alpha(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R} - \frac{1}{\Pi} \iint_{\delta} \frac{w(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R}. \quad (5.8)$$

Ponieważ $w = \partial\varphi/\partial z$ (por.(5.2)) w obszarze δ nie jest znane, więc (5.8) przedstawia równanie całkowe:

$$\varphi(x, y) = F(x, y) - \frac{1}{\Pi} \iint_{\delta} \frac{\partial\varphi/\partial z}{R} \partial\xi\partial\eta, \quad (5.9)$$

gdzie:

$$F(x, y) \equiv \frac{V_{\infty}}{\Pi} \iint_{S_1+S_2} \frac{\alpha(\xi, \eta)}{R} \partial\xi\partial\eta \quad (5.10)$$

jest funkcją znaną. Tak więc rzecz sprowadza się do wyznaczenia $\partial\varphi/\partial z \equiv w_{\delta}$. W tym celu wykorzystujemy warunek $\varphi = 0$ poza skrzydłem (zob. (4.16)) i na podstawie (5.9) otrzymujemy:

$$\iint_{\delta(x,y)} \frac{w_{\delta}}{R} \partial\xi\partial\eta = \Pi F(x, y). \quad (5.11)$$

W celu rozwiązania równania (5.11) wprowadza się tzw. współrzędne charakterystyczne (por.[4],str.159):

$$\begin{aligned} r &= x - \beta y, \\ s &= x + \beta y. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Po ich wprowadzeniu otrzymujemy:

$$\iint_{\delta(r,s)} \frac{w_{\delta}}{R^*} \partial r^* \partial s^* = \Pi F(x, y), \quad (5.13)$$

gdzie R^* we współrzędnych charakterystycznych jest dane wzorem

$$R^* = \frac{2\beta}{Ma_{\infty}} \sqrt{(r - r^*)(s - s^*)}. \quad (5.14)$$

Znaczy to, że mamy do czynienia z równaniem całkowym Abela, którego rozwiązanie jest dobrze znane w literaturze [5]. Przedstawiamy więc tylko wynik

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{\Pi} \iint_{S_1} \frac{\alpha(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2(y - \eta)^2}}. \quad (5.15)$$

Należy tu podkreślić, że S_1 jest tylko częścią obszaru skrzydła; sposób otrzymywania tej istotnej części zwany jest niekiedy metodą Ewvarda-Krasilszczikowej (rys.8).

5.2. Naddźwiękowa krawędź natarcia

Wzór (5.15) można przedstawić w innej postaci, wygodniejszej w zastosowaniach. W tym celu skorzystamy ze wzoru (5.11). Po zróżniczkowaniu (5.15) otrzymamy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv u(x, y) = -\frac{1}{\Pi} \iint_{S_1} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} d\xi d\eta - \frac{1}{\Pi} \int_{BC} \frac{w}{R} \left(1 - \frac{d\psi}{d\xi}\right) d\xi. \quad (5.16)$$

Jeżeli założymy, że skrzydło jest płaską płytką, to $\partial w / \partial x = 0$ i mamy:

$$u(x, y) = -\frac{1}{\Pi} \int_{BC} \frac{w}{R} \left(1 - \frac{d\psi}{d\xi}\right) d\xi, \quad (5.17)$$

gdzie ψ - równanie krawędzi natarcia.

Warto tu zauważyć, że ciśnienie zależy jedynie od części krawędzi natarcia. Sytuacja z rys.8 trochę się skomplikuje jeżeli znajdzie przecięcie się odbitych linii Macha. Postać wzoru jednak nie zmienia się, a ulegnie zmianie tylko odcinek całkowania (linia łamana BOD - rys.9).

5.3. Poddźwiękowa krawędź natarcia

Przypadek ten wymaga odmiennego podejścia, gdyż zawodzi dla niego metoda Ewvarda-Krasilszczikowej. Stawiamy tezę, że podobnie jak dla krawędzi naddźwiękowej (z efektem krawędzi bocznej i śladu wirowego) będzie tylko jeden wzór. Postulujemy go w postaci:

$$\varphi(x, y) = \gamma \iint_S \frac{w(\xi, \eta)}{R} d\xi d\eta. \quad (5.18)$$

Wzór ten jest ważny dla całego skrzydła — rys.4. Problem sprowadza się do wyznaczenia γ . W tym celu wykorzystujemy wzór przybliżony na φ w obszarze bez oddziaływania krawędzi bocznych (zob. wzór 13.64, [3]):

$$\tilde{\varphi} = \frac{\alpha V_\infty}{E(\beta, \Lambda_{LE})} \sqrt{x^2 \text{tg}^2 \Lambda_{LE} - y^2}. \quad (5.19)$$

Stawiamy hipotezę:

$$\varphi = \gamma \tilde{\varphi}. \quad (5.20)$$

Otrzymujemy wynik:

$$\gamma = -\frac{\Pi \dot{M} a_\infty^2 (n+1)}{4\beta^2 n E(\beta, \Lambda_{LE})}, \quad (5.21)$$

gdzie:

$$n = \frac{\operatorname{tg} \Lambda_{LE}}{\beta} . \quad (5.22)$$

Zatem dla całego skrzydła otrzymujemy wzór

$$\varphi(r, s) = \frac{\alpha V_{\infty}}{4nE(\beta, \Lambda_{LE})Ma_{\infty}} \iint_S \frac{dr^* ds^*}{\sqrt{(r-r^*)(s-s^*)}} . \quad (5.23)$$

6. Podsumowanie

Opracowana metoda wyznaczania potencjału prędkości zaburzeń wydaje się być obiecującym wstępem do obliczeń aerodynamicznych. Znając bowiem potencjał możemy łatwo wyznaczyć ciśnienie (rozkład), a dalej współczynniki aerodynamiczne, położenie środka parcia, itp. Jakkolwiek stosowany model jest mocno uproszczony, to znajomość związków analitycznych lub zależności łatwych do obliczeń numerycznych może być bardzo przydatna do pierwszych oszacowań i obliczeń wstępnych.

Literatura

1. W.J.PROSNAK, *Mechanika Płynów*, t.2, PWN - Warszawa 1971
2. Е.А.Красильщикова, Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, М-Л 1952
3. M.A.HEASLET, H.LOMAX, *Supersonic and Transonic Small Perturbation Theory*, w "General Theory of High Speed Aerodynamics" (ed. W.R.Sears), v VI, Section D, Princeton 1954
4. H.ASHLEY, M.LANDAHL, *Aerodynamics of Wings and Bodies*, Reading, Mass. 1965
5. W.POGORZELSKI, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t.1, PWN - Warszawa 1953

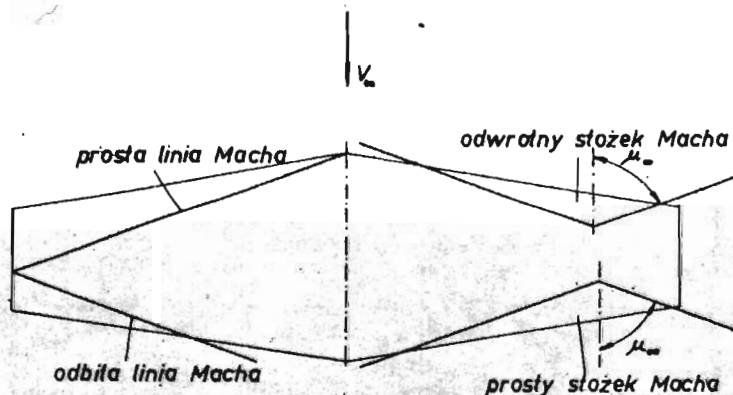
Summary

A method is discussed for calculating the disturbed velocity potential in steady supersonic flow over wings. The methods of the theoretical aerodynamics have been here adapted to practical computation. The method derived is called the Mach-line method and can be applied for calculation of aerodynamic coefficients independently of the aerodynamic design of an aircraft.

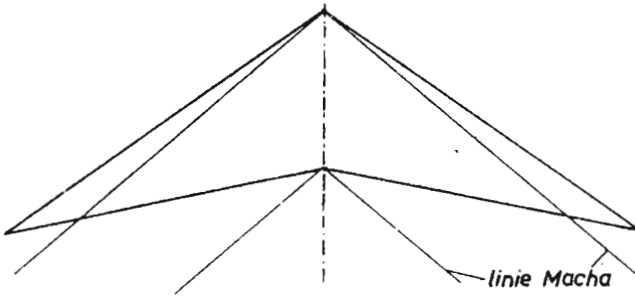
Резюме

В работе представлен метод вычисления потенциала возмущенной скорости в стационарном сверхзвуковом потоке газа. Методы теоретической аэродинамики были здесь приспособены для практических расчетов. Выведен метод, назван методом линии Маха, может быть применен для вычисления аэродинамических коэффициентов необходимых при аэродинамическом проектировании самолётов.

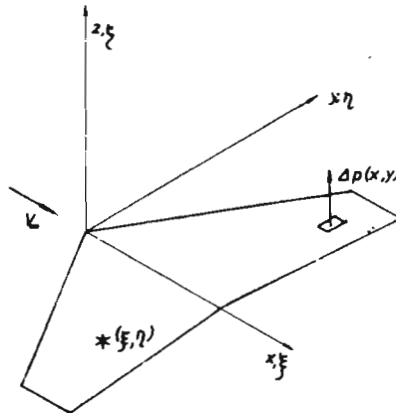
Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 lipca 1989 roku



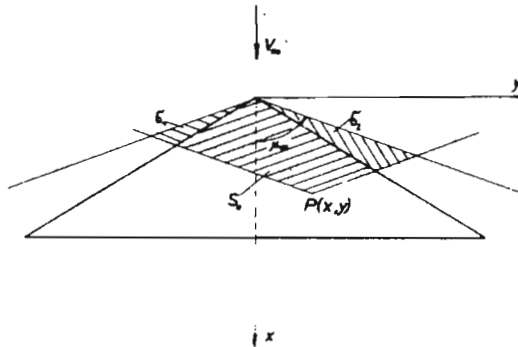
Rys. 1. Prosty i odwrotny stożek Macha



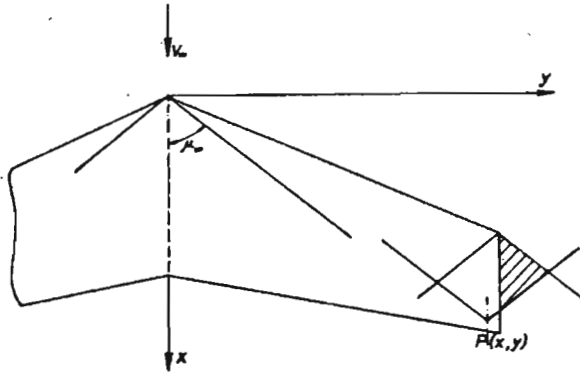
Rys. 2. Skrzydło o prostym obrysie - "simple planform"



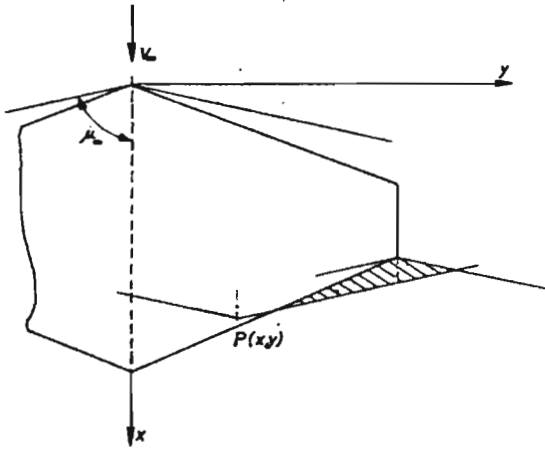
Rys. 3. Układ współrzędnych



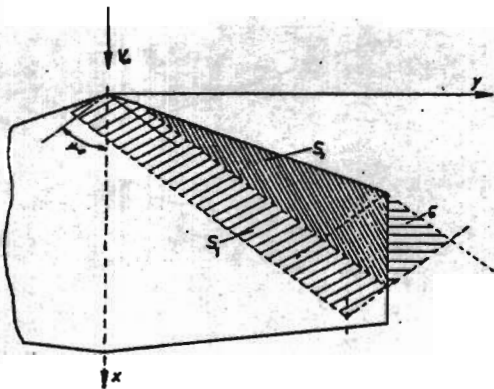
Rys. 4. Obszary całkowania dla skrzydła z poddźwiękowymi krawędziami natarcia



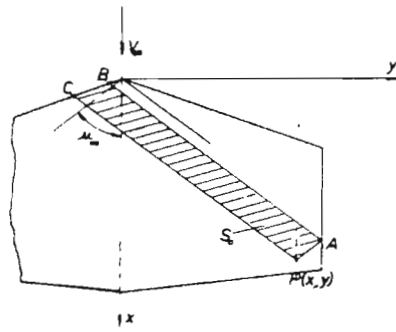
Rys. 5. Efekt krawędzi bocznej



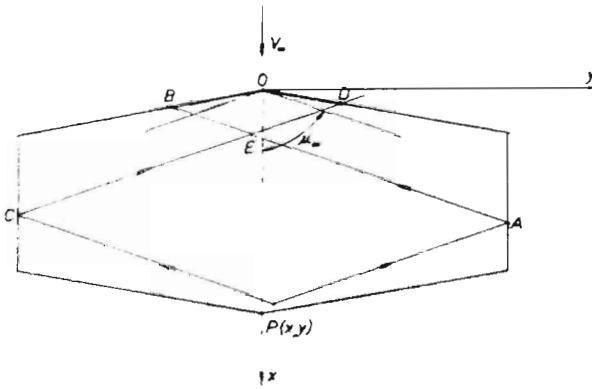
Rys. 6. Efekt śladu wirowego



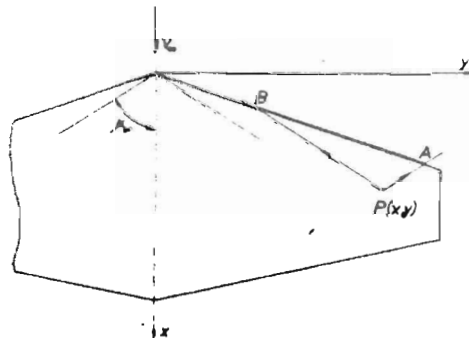
Rys. 7. Obszary całkowania przy wystąpieniu efektu krawędzi bocznej



Rys. 8. Kształtowanie obszarów całkowania



Rys. 9. Kształtowanie obszarów



Rys. 10. Przykład tworzenia odcinka krawędzi natarcia, na którym zachodzi całkowanie