

ANALIZA NUMERYCZNA PÓL ORIENTOROWYCH PROPORCJONALNEGO NAPROWADZANIA

JAN NICZYPORUK

ALEKSANDER WIELGUS

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wstęp

W pracy przedstawiono wybrane aspekty analizy proporcjonalnej nawigacji.

Proporcjonalna nawigacja, jako metoda naprowadzania ruchomego obiektu na cel jest metodą klasyczną [1], [2] niemniej ciągle skłaniająca do nowych badań. I to głównie nie dlatego, że z dużym powodzeniem jest stosowana na morzu, w powietrzu, a przypuszczalnie i w kosmosie. Po prostu dlatego, że permanentnie odsłania nieznane obszary modyfikacji [3] i interpretacji [4].

W [5] zaproponowano formułowanie zagadnień analizy proporcjonalnej nawigacji w postaci warunków orientorowych, a rozwiązywanie zagadnień analizy sprowadzono do wyznaczenia elementów portretu pola orientorowego dla danej dziedziny sterowania i wybranego punktu startowego.

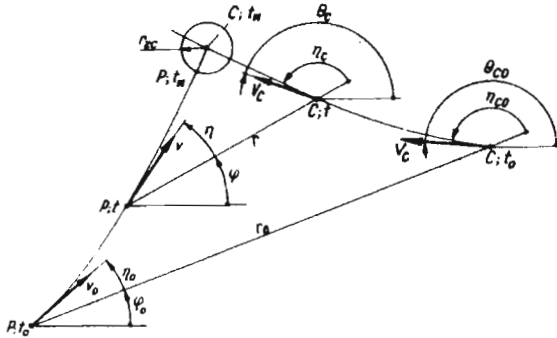
W niniejszej pracy, wykorzystując metodykę analizy z [5], wyznaczono podstawowe elementy portretów pól orientorowych [6] na płaszczyźnie więzów i na płaszczyźnie stanów, dla wybranych dziedzin programowego sterowania.

Jako sterowanie przyjęto:

- współczynnik proporcjonalnej nawigacji (tzw. k -sterowanie);
- stosunek modułu prędkości celu do modułu prędkości rakiety (tzw. μ -sterowanie).

2. Sformułowanie zagadnienia analizy

Rozpatrzmy układ (rys.1), który zawiera obiekt ścigający P (rakieta) i obiekt ścigany C (cel). Obiekty P i C poruszają się w płaszczyźnie np. pionowej. W celu sformułowania zagadnienia analizy, do równania [7]:



Rys. 1. Schemat układu samonaprowadzania

$$L(u, x, y, z, p) = 0, \quad (2.1)$$

obejmującego równania ruchu i więzów, należy dołączyć warunki graniczne (początkowe i końcowe) oraz ograniczenia na wektory sterowania u , stanu x , wyjścia y , zakłóceń z oraz parametrów p . W ten sposób przedmiotem analizy jest sterowany układ dynamiczny [6], w którym metoda naprowadzania proporcjonalnej nawigacji nakłada, w ogólnym przypadku, nieholonomiczne więzy programowe [8].

Szczegółowemu badaniu poddamy proces naprowadzania pod kątem analizy docelowego sterowania. Pod określeniem sterowania docelowego rozumiemy takie sterowanie, które dla zbioru danych wejściowych Ω_0 , w skończonym czasie $t \leq t_k$, doprowadza do spotkania rakiety z celem, to znaczy, że zostają osiągnięte elementy zbioru docelowego Ω_c .

Przyjmijmy, że równanie (2.1) można rozwinąć względem prędkości stanu \dot{x} . Wówczas proces naprowadzania w przestrzeni stanu $X \subset R^n$, przy pominięciu zakłóceń ($z = 0$), opisują równania stanu [9]:

$$\dot{x} = F(x, u, p, t). \quad (2.2)$$

Ze względu na sposób osiągnięcia stanu docelowego $x(t_k) = x_k \in \Omega_c$, będziemy rozróżniać następujące rodzaje sterowania:

— Sterowanie startem. Polega na doborze warunków początkowych $x(t_0) = x_0 \in \Omega_0$ przy stałych wartościach sterowania:

$$u(t) = u(t_0) = u_0 = \text{const}, \quad (2.3)$$

oraz dla znanej zależności od czasu parametrów:

$$p(t) = \text{col}[p_1(t), p_2(t), \dots, p_r(t)]. \quad (2.4)$$

— Sterowanie na torze. Polega na korekcji stanu docelowego przez programowe sterowanie:

$$u = u(t) \in U_0 = \{u_i(t) : t_0 \leq t \leq t_k, i = 1, 2, \dots, l\}, \quad (2.5)$$

lub za pomocą sygnałów sterujących ze sprzężeniem zwrotnym:

$$u = u(t, x) \in U_1 = \{u_i(t, x) : t_0 \leq t \leq t_k, i = 1, 2, \dots, l\}. \quad (2.6)$$

W dalszej części pracy zajmiemy się analizą sterowania programowego (2.5). Rozpatrzmy mianowicie dwa przypadki:

— sterowanie współczynnikiem proporcjonalnej nawigacji, w skrócie nazywane k -sterowanie:

$$u(t) = k(t), \quad v_c = \text{const}, \quad (2.7)$$

— sterowanie modulem prędkości celu v_c rozumiane jako manewr celu prędkością, w skrócie nazywane μ -sterowanie:

$$u(t) = v_c(t), \quad k = \text{const}. \quad (2.8)$$

Jak już zaznaczono, istotne znaczenie ma ujęcie modelu matematycznego rozpatrywanego układu w postaci warunku orientorowego:

$$\dot{x}(t) \in N[x(t), t], \quad (2.9)$$

spełnionego dla prawie każdego $t \in [t_0, t_k]$ i sformułowanie problemu analizy, jako badanie pola orientorowego układu naprowadzania. W (2.9) przez N oznaczono orientor, rozumiany jako zbiór wszystkich prędkości stanu w ustalonym punkcie (x, t) , dla wszystkich sterowań dopuszczalnych $u(t) \in U$ i dla wszystkich dopuszczalnych elementów zbiorów Ω_0 i Ω_c :

$$N[x(t), t] = F[x(t), U; \Omega_0] = \{\dot{x}(t) : \dot{x} = F(x, u, t; x_0); u \in U, x_0 \in \Omega_0\}, \\ x_k \in \Omega_c \quad (2.10)$$

Opis (2.9) ÷ (2.10) nadaje analizie ogólniejszy sens, a cel analizy sprowadza do:

1. Modelowania pól orientorowych układu naprowadzania w oparciu o formalizm warunków orientorowych (równań paratangensowych). Badanie takie umożliwia wyznaczenie: — zbioru trajektorii orientorowych, spełniających warunki dwugraniczne; zbiory sterowań dopuszczalnych odpowiadających powyższemu zbiorowi trajektorii orientorowych; — sterowanie optymalne, dla ustalonego kryterium jakości np. minimalno-czasowego; — procesy optymalne dla sterowań optymalnych.
2. Badanie dziedzin funkcjonowania (obszarów Ω_0) tych układów z uwzględnieniem zagadnień sterowalności, osiągalności i stateczności. Potrzebę takich badań

wymuszają współczesne tendencje [7] ukierunkowane na modyfikację metody proporcjonalnej nawigacji jako sterowania adaptacyjnego.

W oparciu o powyższe ustalenia oraz mając na uwadze metodykę budowy portretów fazowych [6], możemy zagadnienie modelowania pól orientorowych proporcjonalnej nawigacji sformułować dla następujących danych:

— warunku (2.9) i orientora (2.10) w przypadku k -sterowania (2.7) i μ -sterowania (2.8),

— warunków początkowych $x(t_0) = x_0 \in \Omega_0$,

— ograniczeń na zmienne stanu $x_d \leq x \leq x_g$,

— ograniczeń na prędkości stanu $\dot{x}_d \leq \dot{x} \leq \dot{x}_g$,

— ograniczeń na funkcje zmiennych stanu $g_d \leq g(x) \leq g_g$. W ramach analizy należy wyznaczyć portrety pól orientorowych obejmujące:

— zbiory $\{x_r\} \subset X$ punktów równowagi,

— stopnie swobody sterowania s_i ,

— obszary możliwych typów a_r^m stożków $S(x_p)$ dopuszczalnych kierunków prędkości \dot{x}_p ,

— graniczne hiperpowierzchnie $\partial V(x_p)$ dopuszczalnych kierunków prędkości,

— graniczne hiperpowierzchnie $\partial V(x_p)$ emisji dopuszczalnych trajektorii,

z zaznaczeniem kierunku możliwego przejścia trajektorii,

przez tę granicę za pomocą kreskowania.

Punkt x_p jest ustalonym punktem $x_p \in X$, w którym badamy lokalne własności pola orientorowego.

3. Analiza k -sterowania

Zakładając, że rakieta i cel modelowane są jako punkty geometryczne otrzymujemy model kinematycznego układu naprowadzania. Przyjmujemy również, że dla k -sterowania obowiązują ustalenia (2.7). W tym przypadku model matematyczny naprowadzania obejmuje:

— równania kinematyczne ruchu względnego obiektów P i C :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_c \cos(\theta_c - \varphi) - v \cos(\theta - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{r} [v_c \sin(\theta_c - \varphi) - v \sin(\theta - \varphi)]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

W (3.1) oraz na rys. 1 wprowadzono oznaczenia:

$v, \theta, \eta, v_c, \theta_c, \eta_c$ — prędkość, kąt pochylenia prędkości i kąt wyprzedzenia rakiety i celu,

r, φ — odległość obiektów P i C oraz kąt pochylenia linii obserwacji celu,

— równanie więzów metody proporcjonalnej nawigacji:

$$\dot{\theta} = k(t)\dot{\varphi}, \quad (3.2)$$

— związki geometryczne:

$$\eta = \theta - \varphi, \quad (3.3)$$

$$\eta_c = \theta_c - \varphi_c,$$

— elementy zbioru Ω_0 danych wejściowych:

$$v(t_0) = v_0, \quad r(t_0) = r_0, \quad \theta_c(t_0) = \theta_{c0} \quad (3.4)$$

$$\eta(t_0) = \eta_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0,$$

$$v_c(t) = v_c(t, t_0), \quad \theta_c(t) = \theta_c(t, t_0), \quad (3.5)$$

— elementy zbioru docelowego Ω_c :

$$r(t_w) \leq r_{xc}, \quad t_w \leq t_k, \quad (3.6)$$

$$\varphi(t_w) = \text{var},$$

$$\eta(t_w) = \text{var},$$

gdzie:

t_w – chwila wejścia rakiety w otoczenie celu,

r_{xc} – promień kołowego otoczenia celu,

— zbiór sterowań dopuszczalnych (dziedzina naprowadzania)

$$k(t) \in K(t). \quad (3.7)$$

Po wykorzystaniu związków (3.3) i wprowadzeniu parametru prędkości:

$$\mu = \frac{v_c}{v} \quad (3.8)$$

równania (3.1) i (3.2) przyjmą postać:

$$\dot{r} = v[\mu \cos(\theta_c - \varphi) - \cos \eta], \quad (3.9)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{r}[\mu \sin(\theta_c - \varphi) - \sin \eta],$$

$$\dot{\eta} = k^* \dot{\varphi}, \quad (3.10)$$

gdzie k^* jest przekształconym współczynnikiem proporcjonalnej nawigacji:

$$k^* = k - 1. \quad (3.11)$$

Układ równań (3.9) ÷ (3.10) zapiszemy w postaci (2.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, k^*; \Theta_c, v, \mu), \\ x &= \text{col}[r, \varphi, \eta], \\ F &= \text{col}\left[F_1, \frac{1}{r}F_2, \frac{k^*}{r}F_2\right], \\ F_1 &= v[\mu \cos(\Theta_c - \varphi) - \cos \eta], \\ F_2 &= v[\mu \sin(\Theta_c - \varphi) - \sin \eta]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Wyrażenia (3.13) na składowe wektora z równania (3.12) wskazują, że dla graficznego przedstawienia wyników jakościowej i ilościowej analizy proporcjonalnej nawigacji można wprowadzić dwie płaszczyzny:

- płaszczyznę (r, φ) nazwaną płaszczyzną stanów (zbliżania),
- płaszczyznę (η, φ) nazwaną płaszczyzną więzów (naprowadzania, wyprzedzania).

Szczególnie pożyteczna do interpretacji lokalnych i globalnych własności samonaprowadzania jest płaszczyzna więzów.

3.1. Płaszczyzna więzów

Rozważania ograniczymy do dziedzin naprowadzania (3.7), spełniających warunków całkowalności więzów (3.10). Po scałkowaniu (3.10) dla $k^* = \text{const}$ otrzymujemy równanie linii więzów:

$$\eta = \eta_0 + k^*(\varphi - \varphi_0), \quad (3.14)$$

lub:

$$\eta = k^*\varphi + \varepsilon, \quad (3.15)$$

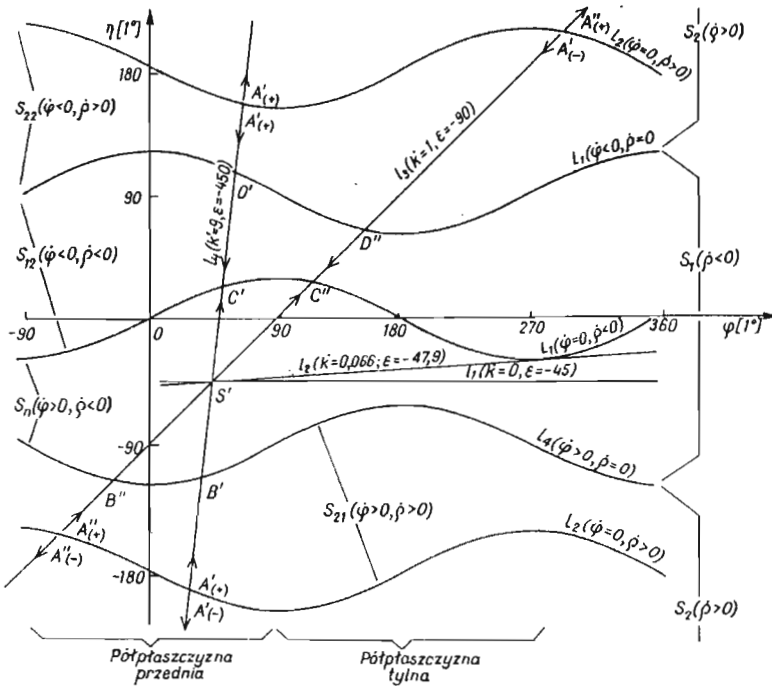
gdzie ε jest parametrem:

$$\varepsilon = \eta_0 - k^*\varphi_0. \quad (3.16)$$

Linie więzów będziemy oznaczać $l\{k^*, \varepsilon(k^*)\}$. Rodziny linii więzów pokrywają całą płaszczyznę (η, φ) i parametryzują ją w sposób właściwy dla danej dziedziny K naprowadzania.

Rozpatrzmy pole prędkości układu naprowadzania dla $v = \text{const}$ i $\Theta_c = \text{const}$. Pole prędkości wyznaczają wyrażenia (3.13) prawej strony równania (3.12). Na mocy powyższych założeń i dla bezwymiarowych wielkości:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{r_k}, \\ \tau &= \frac{v}{r_k}t, \\ r_k &= vt_k, \end{aligned} \quad (3.17)$$



Rys. 2. Płaszczyzna wiązów

składową radialną pola prędkości określa funkcja:

$$F_1^* = \dot{\rho} = -\mu \cos \varphi - \cos \eta, \quad (3.18)$$

zaś składową transversalną funkcja:

$$F_2^* = \rho \dot{\varphi} = \mu \sin \varphi - \sin \eta. \quad (3.19)$$

Osobliwe rozmaitości pola prędkości ($F_1^* = 0$, $F_2^* = 0$) przedstawiają zbiory krzywych dla $\dot{\rho} = 0$:

$$\eta = \pm \arccos(-\mu \cos \varphi) + 2n\pi,$$

$$\text{i dla } \rho \dot{\varphi} = 0:$$

$$\text{a } \eta = (-1)^n \arcsin(\mu \sin \varphi) + 2n\pi, \quad (3.20)$$

gdzie: $n = 0, 1, 2, \dots$

Wprowadzimy oznaczenia:

$$- L_1(\dot{\varphi} = 0, \dot{\rho} < 0) \quad \text{dla linii} \quad \eta = \arcsin(\mu \sin \varphi),$$

- $L_2(\dot{\varphi} = 0, \dot{\rho} > 0)$ dla linii $\eta = \pi - \arcsin(\mu \sin \varphi)$,
- $L_3(\dot{\varphi} < 0, \dot{\rho} = 0)$ dla linii $\eta = \arccos(-\mu \cos \varphi)$,
- $L_4(\dot{\varphi} > 0, \dot{\rho} = 0)$ dla linii $\eta = -\arccos(-\mu \cos \varphi)$.

Na płaszczyźnie (η, φ) krzywe osobliwe są liniami separującymi podobszary:

- L_4 i L_1 wydzielają podobszar $S_{11}(\dot{\varphi} > 0, \dot{\rho} < 0)$,
- L_1 i L_3 wydzielają podobszar $S_{12}(\dot{\varphi} > 0, \dot{\rho} > 0)$,
- L_2 i L_4 wydzielają podobszar $S_{21}(\dot{\varphi} > 0, \dot{\rho} > 0)$,
- L_3 i L_4 wydzielają podobszar $S_{22}(\dot{\varphi} < 0, \dot{\rho} > 0)$.

Ze względu na własności składowej radialnej pola prędkości wyróżniamy obszary:

- zbliżania $S_1(\dot{\rho} < 0) = S_{11} \cup S_{12}$,
- oddalania $S_2(\dot{\rho} > 0) = S_{21} \cup S_{22}$.

Ilustracją powyższych ustaleń jest rysunek 2, na którym naniesiono krzywe separujące i cztery reprezentatywne linie więzów przechodzące przez punkt $(45^\circ, -45^\circ)$ dla $k^* = 0; \frac{1}{15}; 1$ i 9 .

Zauważamy, że z punktu widzenia sterowania docelowego szczególną rolę pełni krzywa L_1 . Jest ona mianowicie miejscem geometrycznym stanów docelowych C , osiągniętych zawsze z dowolnego punktu startowego S obszaru "przyciągania" $Sp = S_{11} \cup S_{12} \cup S_{21} \cup S_{22}$, jeśli tylko linia więzów ma punkty wspólne z krzywą L_1 . Sam proces naprowadzania odbywa się po linii więzów w kierunku "do L_1 ".

Płaszczyznę (η, φ) wraz z różnymi liniami więzów, zbiorem krzywych separujących pole prędkości nazywamy płaszczyzną więzów programowych układu proporcjonalnej nawigacji.

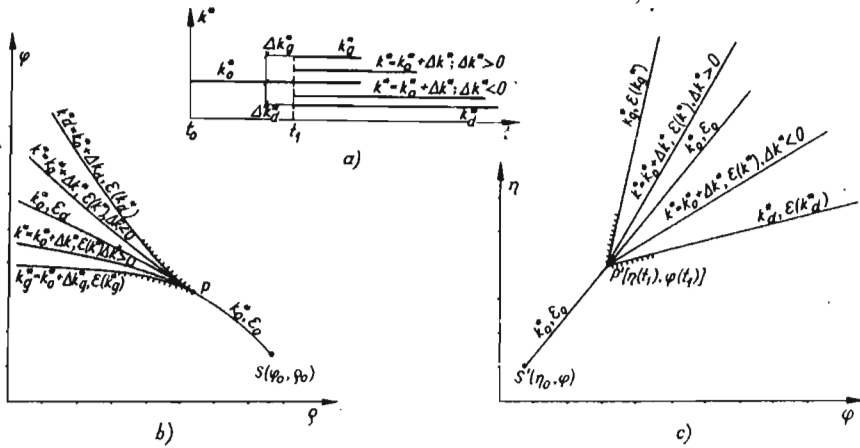
3.2. Płaszczyzna stanów

Koncepcja badań układu naprowadzania dla dziedzin (3.7) spełniających warunków całkowalności więzów (3-10), polega na przedstawieniu obrazów pola orientorowego na dwóch płaszczyznach: więzów (η, φ) i stanów (ρ, φ) .

Na płaszczyźnie więzów, jak to zaznaczono w p. 3.1, linie więzów mające punkt wspólny z krzywą L_1 wyznaczają dopuszczalne k -sterowania bez czasowego ograniczenia. Natomiast na płaszczyźnie stanów, wyznaczając za pomocą numerycznego całkowania równań (3.12) trajektorie stanu z czasową parametryzacją, możemy określić sterowania dopuszczalne z ograniczeniem czasu realizacji procesu naprowadzania, tj. sterowania docelowe.

Istotę uwarunkowań i poznawczych aspektów wynikających z porównania obrazów pola orientorowego w obu płaszczyznach (wężów i stanów) można zilustrować na poglądowym rys.3.

I tak, jeżeli dziedziną naprowadzania K jest "program z przełączeniem" w chwili t_1 (rys.3a), to procesowi na liniach więzów (rys.3c) odpowiadają trajektorie



Rys. 3. Obraz naprowadzania na płaszczyźnie stanów (b) i więzów (c) dla programu z przełączeniem (c)

stanów pokazane na rys.3b.

Dla dokonania bardziej szczegółowych porównań wprowadzamy oznaczenia: niech punktow startu i przełączenia w przestrzeni zdarzeń, odpowiadają punkty S i P na płaszczyźnie stanów oraz S' i P' na płaszczyźnie więzów.

Z rys.3c i rys.3b wynika, że procesowi przebiegającemu wzdłuż linii więzów od punktu S' do P' , a następnie wzdłuż wybranej przełączeniem linii należącej do zbioru linii dopuszczalnych zawartych w zakreskowanym "stożku", odpowiada na płaszczyźnie stanów (rys.3b) trajektoria SP i wybrana przełączeniem trajektoria należąca do zbioru trajektorii dopuszczalnych zawartych również w zakreskowanym stożku o wierzchołku w punkcie P . Zauważmy, że w wierzchołku P pęk wchodzącej i wychodzących trajektorii ma wspólną styczną (kąć wierzchołkowy stożka jest równy zero), natomiast kąć wierzchołkowy stożka w płaszczyźnie więzów jest różny od zera (równy $\text{arc tg}(k_g^* - k_d^*)$).

Rozważanej dziedzinie sterowania (rys.3a) z jednokrotnym przełączeniem, odpowiada portret stanów (rys.3b), na którym przez każdy punkt płaszczyzny, za wyjątkiem punktu P przechodzi co najwyżej jedna trajektoria. Wynikają stąd następujące lokalne własności procesu naprowadzania:

- stopień swobody sterowania [6] w każdym punkcie każdej trajektorii wynosi $s = \frac{1}{2}$,
- stożki $S(x_p)$ są typu a_1^1 [6],
- graniczne hiperpowierzchnie $\partial V(x_p)$ pokrywają się z trajektoriami i praktycznie traci znaczenie kreskowanie granic emisji trajektorii stanu, za wyjątkiem infimezimalnego otoczenia punktu P .

Opisana procedura konstruowania portretu pól orientorowych na płaszczyźnie stanów i więzów może być wielokrotnie powtarzana przy każdym kolejnym przełączaniu sterowania.

W dalszym ciągu rozpatrzmy szczegółowo lokalne i globalne własności naprowadzania wynikające z obrazów portretu pól orientorowych sporządzonych dla następujących dziedzin naprowadzania:

- dyskretnej dziedziny K'_0 z przełączaniem w punkcie startowym $P = S$,
- ciągłej dziedziny naprowadzania K_0 z przełączaniem również w chwili startu,
- ciągłej dziedziny K_1 ze skończoną liczbą przełączeń.

3.3. Dziedzina naprowadzania K'_0

Rozpatrzmy klasę dziedziny naprowadzania:

$$K'_0 = \{k^*(\tau) : k^*(\tau) = k^*h(\tau - \tau_0); k^* = 1, 2, \dots, 9\}, \quad (3.21)$$

gdzie $h(\tau)$ jest pseudofunkcją Heaviside'a.

Dziedzina (3.21) jest dyskretna z przełączaniem w chwili startu τ_0 .

Portret na płaszczyźnie więzów (η, φ) otrzymany dla danych: $\rho_0 = 1, \varphi_0 = 45^\circ, \eta_0 = -45^\circ, \mu = 0.5$ przedstawia rys.4. Wynika z niego, że dla dyskretnych sterowań dopuszczalnych z (3.21), zbiór docelowy, osiągnany na krzywej przyciągania L_1 jest również dyskretny (punkty C'_1, C'_2, \dots, C'_9), a "obszar" samonaprowadzania jest zbiorem odcinków $S'C'_i, i = 1, 2, \dots, 9$ na liniach więzów.

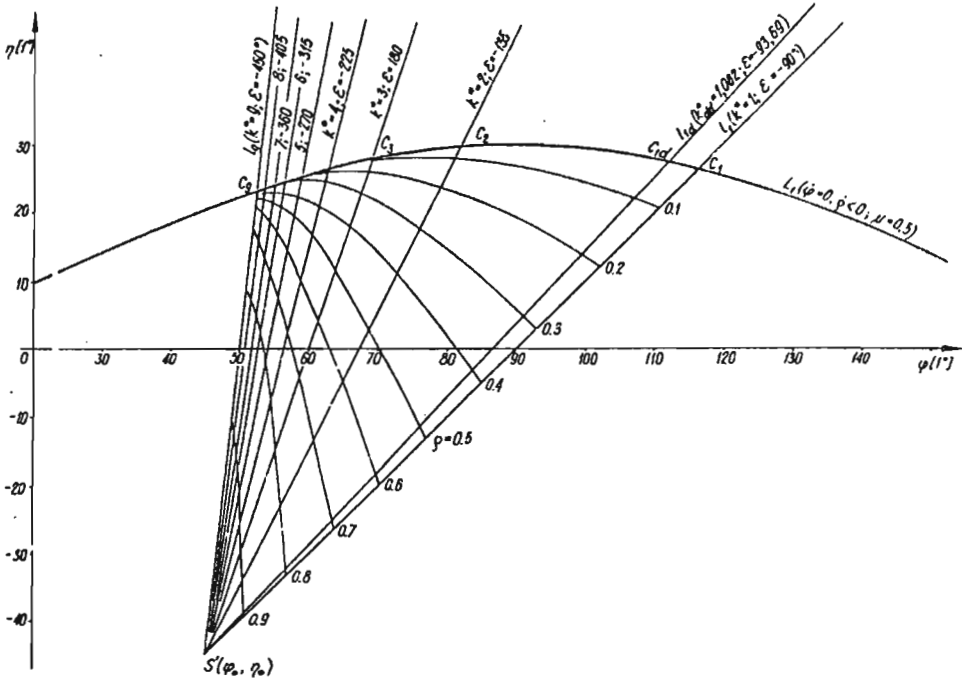
Na płaszczyźnie (ρ, φ) portret sporządzony dla tych samych danych (rys.5) został sparаметryzowany punktami stałego czasu względnego $\tau = \text{const}$. Punkt C_1 dla $k^* = 1$ i $\tau = 1$ ma odcięta $\rho \neq 0$, co wskazuje, że w czasie $\tau_k \leq 1$ nie nastąpi spotkanie. Dlatego zbiór docelowych sterowań nie może zawierać sterowania $k^* = 1$. Punkt C_9 o odciętej $\rho = 0$ jest osiągnany najwcześniej, bo po upływie czasu względnego $\tau = 0.8$. W ten sposób otrzymujemy, że sterowanie $k^* = 9$ jest optymalnym sterowaniem ze względu na minimalno-czasowe kryterium.

3.4. Dziedzina naprowadzania K_0

W przypadku ciągłej dziedziny naprowadzania:

$$K_0 = \{k^*(\tau) : k^*(\tau) = k^*h(\tau - \tau_0); k_d^* \leq k^* \leq k_g^*\}, \quad (3.22)$$

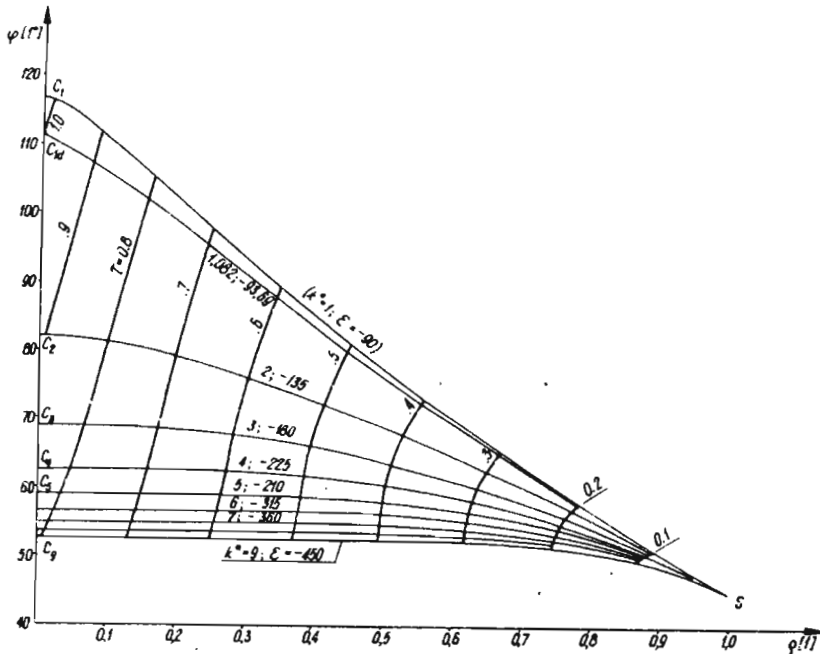
i przełączaniu sterowania w chwili startu, lokalne własności naprowadzania są takie same jak dla dziedziny (3.21). Ilustrują to te same portrety (rys.4 i rys.5), sporządzone dla $k_g^* = 9$ i $k_d^* = 1$.



Rys. 4. Portret na płaszczyźnie więzów dla dziedzin K'_0 i K_0

Na płaszczyźnie więzów (rys.4) obszar samonaprowadzania $S'C'_1C'_9S'$ został sparametryzowany liniami $\rho = \text{const}$. W otoczeniu punktu C'_9 , odpowiadającemu minimalno-czasowemu naprowadzaniu występuje zagęszczenie linii stałych odległości. Świadczy to, że przy $k^* = k^*_{\text{max}} = k^*_g = 9$ proces naprowadzania odbywa się według równoległego zbliżenia dla $\rho < 0.5$. Zauważamy także, że dla ciągłej dziedziny (3.22) obszar osiągalności $C'_1C'_9$ jest łukiem spójnym i domkniętym, należącym do krzywej L_1 .

Na płaszczyźnie stanów (rys.5), obszar samonaprowadzania SC_1C_9S został sparametryzowany liniami stałego czasu względnego $\tau = \text{const}$. Pozwala to ocenić czas spotkania dla danego sterowania dopuszczalnego. Uwzględniając ograniczenia na czas lotu rakiety ($\tau \leq 1$), na podstawie przebiegu linii C_1C_{1d} dla $\tau = 1$, wnioskujemy, że sterowania $k^* < 1.082$ nie należą do sterowań docelowych.

Rys. 5. Portret na płaszczyźnie stanów dla dziedzin K_0' i k_0

3.5. Dziedzina naprowadzania K_1

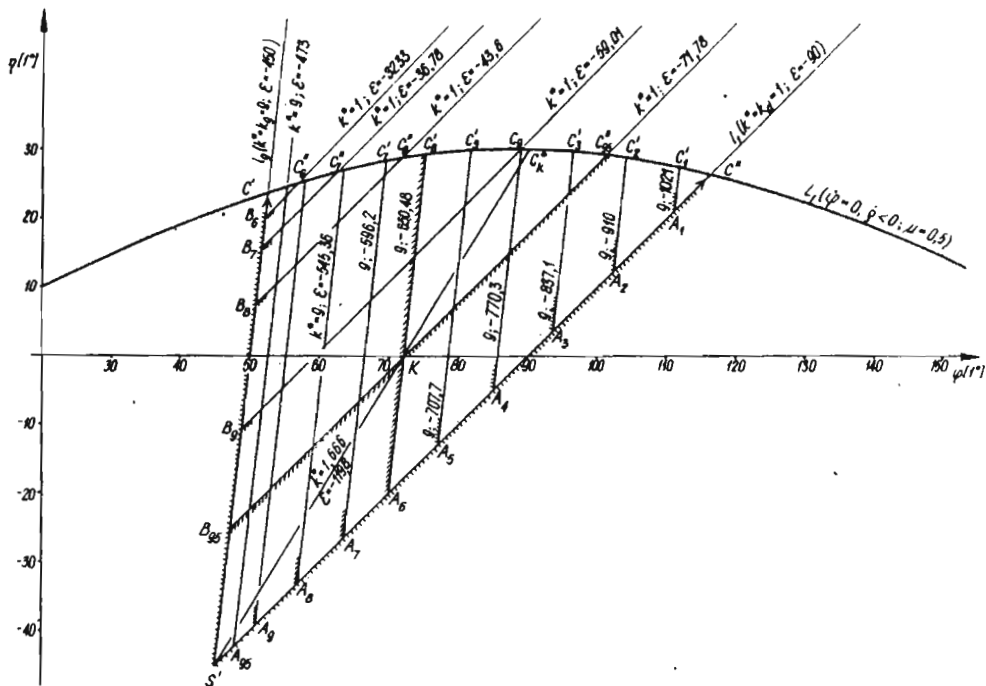
Dla dziedziny naprowadzania z wielokrotnym przełączaniem na torze:

$$K_1 = \{k^*(\tau) : k^*(\tau) = \sum_{i=0}^n \Delta k_i^* h(\tau - \tau_i); k_g^* \leq k^*(\tau) \leq k_d^*\}, \quad (3.23)$$

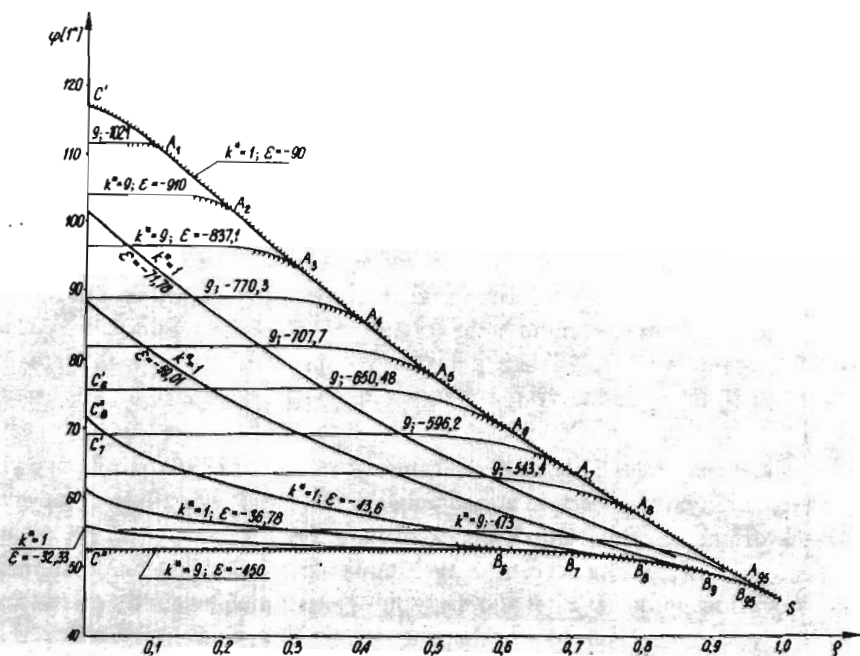
gdzie τ_i określa chwilę przełączania sterowania, n -liczbę przełączeń, zbiór K_1 wyznacza klasę funkcji sterowania ograniczonych, przedziałami stałych o skończonej liczbie punktów "skoku", odpowiadających punktom przełączania.

W rozpatrywanym przypadku obrazy portretów pól orientorowych na płaszczyźnie więzów i na płaszczyźnie stanów można otrzymać przez wielokrotne nałożenie portretów z jednym przełączeniem (rys.3). Takie nałożenie daje złożoną strukturę portretu ("mozaikę" linii więzów lub trajektorii). Aby nie zacierać czytelności obrazu na rys.6 i 7 pokazano tylko wybrane elementy portretu uzyskane dla tych samych danych startowych co portrety poprzednie (rys.4 i 5).

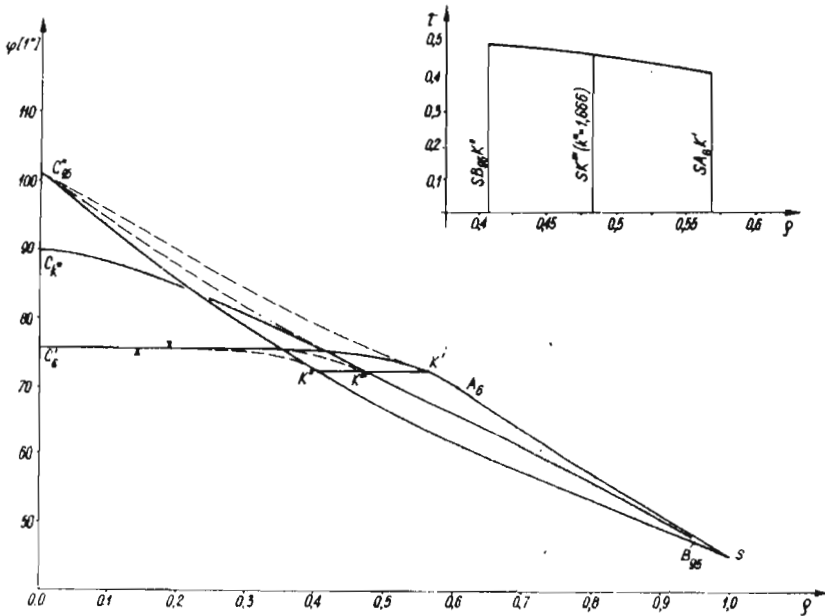
Jeśli wybierzemy przełączenie sterowania na ekstremalne wartości, to wówczas obszar samonaprowadzania $S'C'C''S'$ (rys.6) można sparametryzować dwoma rodzinami linii więzów (A_iC_i' dla $k^* = k_g^*$ oraz B_iC_i'' dla $k^* = k_d^*$). Punkty przecięcia



Rys. 6. Elementy portretu na płaszczyźnie więzów dla dziedziny K_1



Rys. 7. Elementy portretu na płaszczyźnie stanów dla dziedziny K_1



Rys. 8. Ilustracja k -sterowań: $SB_{95}K''$, SA_6K' , SK'' na płaszczyźnie stanów

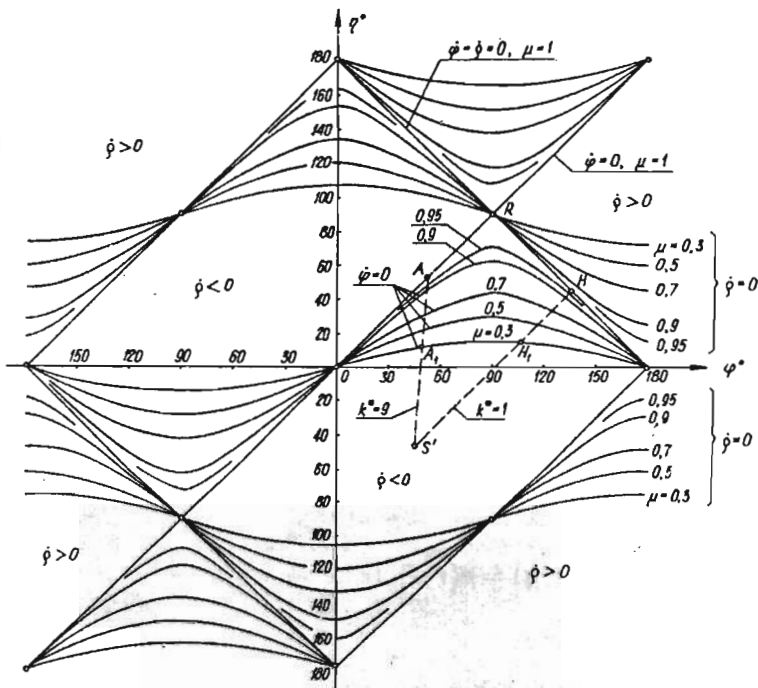
się odpowiednich linii więzów (np. punkt K), są na płaszczyźnie więzów punktami przelączenia sterowania. W odróżnieniu od wyników uzyskanych dla poprzednio rozpatrzonych dziedzin K_0 i K'_0 , dla dziedziny K_1 wybrany punkt docelowy np. C''_{95} można osiągnąć na wiele sposobów sterowań np. $S'B_{95}C''_{95}$ lub $S'A_6K'C''_{95}$ itp. Porównanie czasów osiągania stanów docelowych wskazuje, że spośród sterowań dopuszczalnych, optymalne, czasowo-minimalne sterowanie odpowiada sterowaniu przy starcie z k_{\max}^* i jednokrotnym przełączeniu na k_{\min}^* . Np. dla punktu docelowego C''_{95} minimalny czas realizacji procesu naprowadzania ma miejsce dla sterowania $k^* = k_j^*$ na odcinku SB_{95} i przełączeniu w punkcie B_{95} na sterowanie $k^* = k_d$.

Płaszczyzna stanów (rys.7) została sparametryzowana trajektoriami odpowiadającymi ekstremalnym wartościom sterowania i przełączaniu w punktach na brzegowych trajektoriach. Granice emisji trajektorii stanów w punktach x_p na trajektoriach brzegowych ($A_i; B_i$) są styczne w tych punktach. Zakreskowane w infinitezymalnym otoczeniu punktów x_p stożki są typu a_1^1 , a stopień swobody sterowania wynosi $1/2$. Wyznaczenie podobnych elementów portretu, charakteryzujących lokalne własności układu w pozostałych punktach obszaru naprowadzania $SC'C''$ wymaga szczegółowych badań. Na potrzebę taką wskazuje wyraźnie "obraz" punktu

K (rys.6), który na płaszczyźnie stanu "rozciąga" się na odcinek $K'K''$ (rys.8). Przeprowadzone obliczenia wykazały np., że punkty docelowe C'_8 i C''_{95} osiągnięte zostaną z każdego punktu odcinka $K'K''$, niezależnie od "sposobu" osiągnięcia tego punktu przy przełączaniu sterowania w "punkcie" K na ekstremalną wartość.

4. Analiza μ -sterowania

Dla badanego układu naprowadzania metodą proporcjonalnego zbliżania, przy założeniu że:

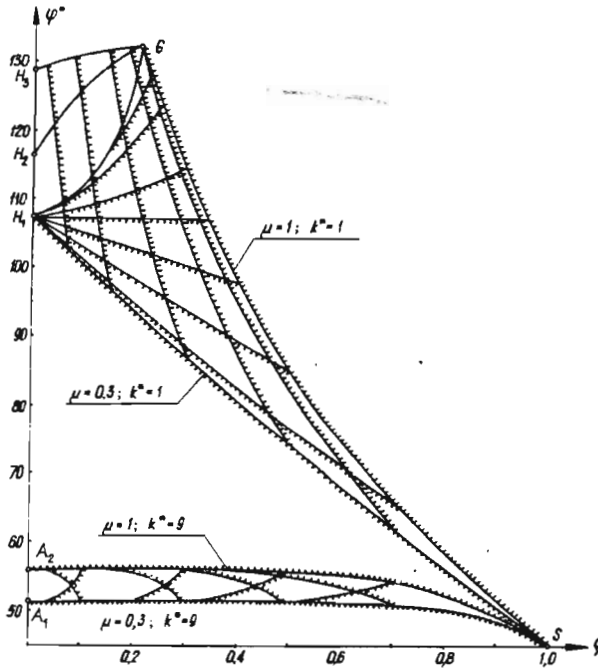


Rys. 9. Portret μ -sterowania na płaszczyźnie więzów

— prędkość rakiety jest stała i stały jest współczynnik proporcjonalnej nawigacji,

— przyjęto hipotezę o prostoliniowym, poziomym ($\theta_c = \pi$) ruchu celu ze zmienną prędkością (manewr celu prędkością):

$$v_{cd} \leq v_c(t) \leq v_{cg}, \quad (4.1)$$

Rys. 10. Portret μ -sterowania na płaszczyźnie stanów

równanie stanu (2.2) przyjmuje postać równania liniowego względem sterowania $\mu(t)$:

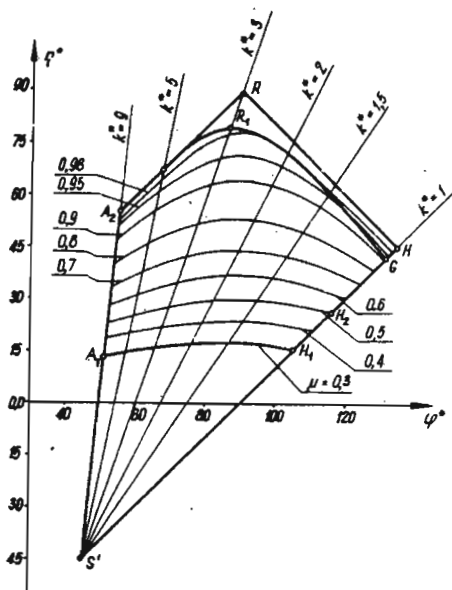
$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, \mu), \\ F(x, \mu) &= \mu(\tau)F_{1\mu}(x) + F_{2\mu}(x), \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x &= \text{col}[\rho, \varphi] \in X \subset \mathbb{R}^2, \\ \mu(\tau) &= \frac{v_c(\tau)}{v}, \\ F_{1\mu} &= \text{col}[-\cos \varphi, \frac{1}{\rho} \sin \varphi], \\ F_{2\mu} &= \text{col}[-\cos(k^* \varphi + \varepsilon), \frac{1}{\rho} \sin(k^* \rho + \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

W ten sposób przez μ -sterowanie rozumiemy metodę profilowania toru lotu rakiety za pomocą szczególnego manewru tj. przez zmianę μ .

Rys. 11. Obszary sterowalności i osiągalności μ -sterowania

Manewr obliczony jest na uniknięcie spotkania z rakietą w skończonym czasie. Dlatego celem analizy μ -sterowania jest między innymi:

- ocena skuteczności takiego manewru "obronnego",
- wyznaczenie portretów orientorowych warunku (2.9) dla równania (4.2) i dopuszczalnych sterowań:

$$\mu \in M = \{\mu(\tau) : \mu_d \leq \mu(\tau) \leq \mu_g, 0 \leq \tau \leq 1\}, \quad (4.5)$$

$$\mu_d = \frac{v_{cd}}{v}, \quad \mu_g = \frac{v_{cg}}{v},$$

przy różnych warunkach startowych $x(0) = x_0$.

Zakładamy, że dziedzina sterowania M jest zbiorem ograniczonym, domkniętym i spójnym.

Formułując ściślej zagadnienie analizy μ -sterowania możemy przyjąć, że jej celem jest zbadanie:

- występowania zbiorów osobliwych (równowagi, linii zmiany strony kreskowania granic dopuszczalnych kierunków prędkości stanu, linii "przyciągania", linii "odpychania"),
- sterowalności w otoczeniu punktów zbiorów osobliwych,

- występowania w przestrzeni stanu granic obszarów sterowalności dla danych warunków startowych $(\rho_0, \varphi_0, \eta_0)$,
- obszarów osiągalności.

Zauważmy, że charakterystyczną cechą orientorowych portretów sterowania docelowego, odróżniającą je od portretów fazowych układów niesterowanych jest to, że przez każdy punkt płaszczyzny stanu przechodzi nie jedna trajektoria, lecz cały pęk trajektorii, zwany emisją trajektorii dopuszczalnych w punkcie.

Jeżeli składowe funkcji wektorowej F (4.2) spełniają warunki twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauche'go dla zbioru równań różniczkowych (4.2), to dla wybranego punktu $x = x_p \in X$ dokonujemy przy pomocy funkcji $F(x, \mu)$ odwzorowanie $M \rightarrow R^2$. W ten sposób w R^2 wyznaczamy pole wektorowe prędkości stanu $N(x)$ przyporządkowujące punktowi $x = x_p$ trajektorie dopuszczalne. Zbiór punktów leżących na trajektoriach dopuszczalnych i wychodzących z punktu x_p wyznacza emisję trajektorii dopuszczalnych $V(x_p)$. Granice emisji trajektorii dopuszczalnych $\partial V(x_p)$ warunku orientorowego (2.9) dla równania (4.2) liniowego względem sterowania (4.5) wyznaczymy [6], rozwiązując numerycznie dwa układy równań różniczkowych:

$$\dot{\rho} = -\mu_g \cos \varphi - \cos(k^* \varphi + \varepsilon), \quad (4.6)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} (\mu_g \sin \varphi - \sin(k^* \varphi + \varepsilon)),$$

$$\dot{\rho} = -\mu_d \cos \varphi - \cos(k^* \varphi + \varepsilon), \quad (4.7)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} (\mu_d \sin \varphi - \sin(k^* \varphi + \varepsilon)),$$

dla warunków początkowych $\rho(0) = \rho_p, \varphi(0) = \varphi_p$.

Wynika stąd, że jakościową i ilościową analizę μ -sterowania dokonujemy numerycznie programując potrzebne obliczenia na EMC. Dla graficznego przedstawienia analizy wykorzystujemy wprowadzone w p.3 płaszczyzny więzów i stanów. Szczególnie pożyteczna do interpretacji zarówno lokalnych jak i globalnych własności μ -sterowania jest płaszczyzna więzów (rys.9).

Na płaszczyźnie (η, φ) struktura topologiczna naprowadzania przy μ -sterowaniu pozwala wyróżnić (rys.9):

- proste $\dot{\rho} = \dot{\varphi} = 0$, przy $\mu = 1$, stanowiące jednowymiarową rozmaitość punktów równowagi bezwzględnej x_r ,

- linie $\dot{\rho} = 0$, wyznaczające obszary zbliżania dla różnych μ ,

- obszary osiągalności w postaci dwuwymiarowych rozmaitości np. obszar $A_1 H_1 H R A A_1$ (w odróżnieniu od jednowymiarowych rozmaitości np. odcinek $A_1 H_1$ dla k -sterowania przy $\mu = 0,3$),

- procesy naprowadzania, które na płaszczyźnie więzów zachodzą na odcinku prostej np. $S' H_1$, na płaszczyźnie stanów odwzorowują się na obszar $S H_1 G S$ (rys.10).

Z portretów pokazanych na płaszczyźnie stanów (rys.10) dla $k^* = 1$ i $k^* = 9$ wynika, że przy dużych k^* ($k^* > 5$) spotkanie następuje w czasie względnym $\tau \leq 1$ i manewr celu szybkością nie jest skuteczny.

Natomiast przy małych k^* manewr prędkością celu przeciwdziała spotkaniu, o czym świadczą punkty $z \rho \neq 0$ na liniach:

- H_1G - dla jednokrotnego przełączenia na brzegowej trajektorii SG ,
- H_2G - bez przełączenia,
- H_3G - dla jednokrotnego przełączenia na trajektorii SH_1 .

Wpływ ograniczenia czasu lotu rakiety na obszary naprowadzania (sterowalności) i osiągalności ilustruje również rys.11. I tak obszar osiągalności dla nieograniczonego czasu trwania naprowadzania jest polem $A_1A_2RH_1A_1$, natomiast dla ograniczonego ($\tau = 1$) - polem $A_1A_2R_1GH_1A_1$.

Zauważmy, że mając portrety na płaszczyźnie więzów i stanów, dla zadanego manewru celu prędkością możemy dokonać właściwego wyboru wariantu sterowania i przewidzieć parametry spotkania.

Literatura

1. В.Л.Кан, А.Ц.Келзон, Пропорциональная навигация, Изд. Судостроение, 1965
2. M.GUELMAN, *Qualitative investigation of proportional navigation*, IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 7, Nr 4, 1971
3. M.GŁAPSKI, *Ograniczenie zmodyfikowanego, proporcjonalnego naprowadzania pocisków w poziomej płaszczyźnie zbliżania*, Postępy Cybernetyki 3, Warszawa 1985
4. M.GŁAPSKI, *Możliwości i ograniczenia proporcjonalnego samonaprowadzania rakiet powietrze-powietrze*, Dodatek do Biuletynu WAT, Nr 11 (399), Warszawa 1985
5. S. DUBIEL, J.NICZYPORUK, A.WIELGUS, *Modelowanie pól orientorowych proporcjonalnej nawigacji*, XXVII Sympozjon "Modelowanie w mechanice", Gliwice-Wisła 1988
6. А.Г.Бутковский, *Фазовые портреты управляемых динамических систем*, Москва, Наука, 1985
7. J.NICZYPORUK, A.WIELGUS, *Modelowanie dynamiki sterowanego obiektu latającego klasy ziemia-powietrze*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1-2, 25, Warszawa 1987
8. K.GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971
9. J.MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe - Mechanika Nr 32, Politechnika Warszawska, Warszawa 1975

Summary

In the paper the orientor fields method, applied to proportional navigation analysis, is presented. It also includes the program control guidance coefficient (k - control) and speed targeted manoeuvre (μ - control).

The obtained results, which illustrate local-global features of proportional guidance, have been presented in terms of images of state and constrains.

Резюме

В статье указано метод анализа пропорциональной навигации. Рассмотрено программное управление коэффициентом пропорциональной навигации (k - управление), а также маневром скорости цели (μ - управление). Локально - глобальные свойства поведения системы пропорциональной навигации представлено на фазовых портретах.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 października 1988 roku