

OPTYMALIZACJA PARAMETRÓW SYSTEMU STEROWANIA SAMONAPROWADZAJĄCYCH SIĘ RAKIET WIRUJĄCYCH

ANDRZEJ DĘBECKI

MACIEJ MRÓZ

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Stan rakiety w danej chwili czasu identyfikowany jest przez zbiór wartości jej parametrów ruchu oraz przez zbiór oddziaływań zewnętrznych. Czynniki te mają swoje odzwierciedlenie w modelu matematycznym poprzez określoną postać współczynników równań ruchu. W ogólnym przypadku kolejne zdeterminowane stany obiektu można osiągnąć poprzez zmianę tychże parametrów. W przedstawionej sytuacji nasuwa się pytanie, które z współczynników równań ruchu i w jaki sposób należy zmieniać, aby przebieg procesu sterowanego był najbardziej korzystny. Zadaniem optymalizacji jest ustalenie takich związków między układem sterowania a parametrami konstrukcyjnymi rakiety, aby proces przejściowy wywołany zmianą równowagi całego układu był jak najszybciej tłumiony.

Jako szczególny przypadek zbadano dynamikę samonaprowadzającej się przeciwpancernej rakiety wirującej określając quasi optymalny program zmiany współczynników wzmocnienia układu sterowania w oparciu o metodę badania układów dynamicznych podaną przez Gołubiencewa [3]. Metodę zmodyfikowano podając warunki dla układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi 3-go rzędu o współczynnikach zespolonych.

Stosowane oznaczenia

- | | | |
|-------------------|---|---|
| $\Theta; \Psi$ | — | odpowiednio, kąt pochylenia i odchylenia wektora prędkości, |
| $\vartheta; \psi$ | — | kąty pochylenia i odchylenia osi podłużnej rakiety, |
| α, β | — | kąty natarcia i ślizgu, |
| Ω | — | zespolony kąt obrotu rakiety, |
| η | — | zespolona prędkość kątowna rakiety, |
| ζ | — | zespolony kąt natarcia i ślizgu, |

s	— zespolone pomieszczenie środka masy rakiety,
ϕ	— zespolony kąt obserwacji celu przez raketę,
ω_x	— składowa prędkości kątowej rakiety wzgl. jej osi wzdluznej,
I_1	— moment bezwładności rakiety wzgl. jej osi wzdluznej,
I	— moment bezwładności rakiety wzgl. jej osi poprzecznych,
m	— masa rakiety,
g	— przpieszenie Ziemskie,
F_k	— siła sterująca,
k_1, k_2	— współczynniki wzmoocnienia prawa sterowania,
l_k	— odległość od środka masy rakiety do miejsca przyłożenia siły sterującej,
S	— powierzchnia odniesienia współczynników aerodynamicznych,
b_a	— ciężiwa aerodynamiczna,
$C_N^{\zeta}; m_{s1}^{\zeta}; m_D^{\zeta}$	— współczynniki aerodynamiczne,
R	— odległość rakiety od celu,
R_o	— odległość strzelania,
V_c	— prędkość lotu celu.

1. Równania ruchu rakiety

Rozpatruje się przestrzenny ruch samonaprowadzającej się rakiety przeciwpancernej wystrzelwanej z wyrzutni rurowej z określoną prędkością V . Prędkość ta utrzymywana jest na całym torze lotu pod działaniem siły ciągu silnika marszowego rakiety. Tor lotu posiada krótki odcinek lotu niesterowanego, po którym w chwili $t = t_w$ następuje włączenie systemu samonaprowadzania zapewniającego doprowadzenie rakiety do obszaru realizacji zadania. System sterowania rakiety realizuje metodę proporcjonalnej nawigacji. Rakieta na torze lotu wykonuje ruch obrotowy wokół osi podłużnej ze stałą prędkością obrotową.

Określając model ruchu rakiety przyjęto uproszczenia typowe dla rozpatrywanej klasy rakiet, a to:

- założono, że rakieta jest bryłą sztywną o stałej masie,
- przyjęto stałe wartości współczynników aerodynamicznych,
- założono małe wartości kątów $\theta, \psi, \Psi, \vartheta, \alpha, \beta$ oraz ich pochodnych pozwalające na linearyzację ($\sin \zeta \cong \zeta, \cos \zeta \cong 1$) oraz na pominięcie w modelu wyrazów będących małymi drugiego i wyższych rzędów względem tych kątów.

Dla stworzenia modelu matematycznego tak przedstawionego ruchu przestrzennego rakiety przyjęto metodę zmiennych zespolonych zaproponowaną w pracy [5], pozwalającą w zasadniczy sposób obniżyć rząd równania modelu.

Na podstawie [1] układ równań różniczkowych ruchu rakiety w zmiennych zespolonych ma postać:

$$I\dot{\Omega} - (D + iI_1\omega_{x_1})\dot{\Omega} = iC\zeta - ik_k F_k, \quad (1.1)$$

$$m\dot{s} = A\zeta - mg + F_k, \quad (1.2)$$

$$\dot{s} = V(\zeta - i\Omega), \quad (1.3)$$

$$\eta = \dot{\Omega}, \quad (1.4)$$

$$F_k = -k_2\bar{\varphi} - k_1\dot{\varphi}, \quad (1.5)$$

gdzie:

$$s = \sqrt{-1}, \quad A = -C_N^{\rho} \frac{\rho V^2}{2} S,$$

$$s = y + iz, \quad C = m_{s1}^{\zeta} \frac{\rho V^2}{2} S,$$

$$D = -m_D^{\eta} \frac{\rho V^2}{2} S,$$

$$\dot{\Omega} = -\dot{\psi} + i\dot{\vartheta}, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_Y + i\dot{\varphi}_Z.$$

Zgodnie z oznaczeniami przedstawionymi na rys. 1 i 2 prędkość kątowna linii obserwacji celu wyraża się zależnościami:

— w płaszczyźnie poziomej:

$$R\dot{\varphi}_Z = V_{cZ} \cos \varphi_Z - \dot{Z} \cos \varphi_Z, \quad (1.6)$$

— w płaszczyźnie pionowej:

$$R\dot{\varphi}_Y = V_{cZ} \cos \varphi_Y - \dot{Z} \cos \varphi_Y, \quad (1.7)$$

które po zróżniczkowaniu i uwzględnieniu założeń upraszczających odnośnie kątów i stałości prędkości rakiety i celu prowadzą do związków:

$$\dot{s} = -R\dot{\varphi} + V\dot{\varphi}, \quad (1.8)$$

$$s^{\text{III}} = -R\varphi^{\text{III}} + 2V\dot{\varphi}, \quad (1.9)$$

$$s^{\text{IV}} = R\varphi^{\text{IV}} + 3V\varphi^{\text{III}}, \quad (1.10)$$

wyrażających wzajemną zależność pomiędzy pochodnymi zespolonego przemieszczenia środka masy rakiety a prędkością kątowną linii obserwacji celu i jej pochodnymi.

Układ równań (1.1) - (1.5) wraz ze związkami (1.6) - (1.10) daje się przekształcić do jednego równania różniczkowego (1.11) opisującego zmianę położenia środka masy rakiety względem prędkości kątowej linii obserwacji celu φ :

$$\varphi^{IV} + a_1 \varphi^{III} + a_2 \ddot{\varphi} + a_3 \dot{\varphi} = a_4, \quad (1.11)$$

gdzie:

$$a_1 = a_{11} + ia_{12},$$

$$a_2 = a_{21} + ia_{22},$$

$$a_3 = a_{31} + ia_{32},$$

$$a_4 = a_{41} + ia_{42},$$

$$a_{11} = -\frac{D}{I} - \frac{k_1 + \frac{RA}{V} + 3Vm}{mR - k_2},$$

$$a_{12} = -\frac{I_1}{I} \omega_{x_1},$$

$$a_{21} = \frac{C}{I} + \frac{D(k_1 + \frac{RA}{V} + 2Vm) + A(2I - k_2 l_k)}{I(mR - k_2)},$$

$$a_{22} = \frac{I_1 \omega_{x_1} (k_1 + \frac{RA}{V} + 2Vm)}{I(mR - k_2)},$$

$$a_{31} = -\frac{A(D + k_1 l_k) + C(mV + k_1)}{I(mR - k_2)},$$

$$a_{32} = -\frac{I_1 \omega_{x_1} A}{I(mR - k_2)},$$

$$a_{41} = \frac{Cmg}{I(mR - k_2)}, \quad a_{42} = 0.$$

2. Optymalizacja współczynników wzmocnienia układu sterowania

Zadaniem optymalizacji jest określenie programu zmiany współczynników prawa sterowania wirującej rakiety przeciwpancernej zapewniających w procesie przejściowym najszybsze wytlumienie oscylacji rakiety na torze lotu. W tym celu podjęto próbę zastosowania metody optymalizacyjnej Gołubiencewa [3], modyfikując ją tak, aby mogła obejmować i układy opisane równaniami o współczynnikach zespolonych.

Zgodnie z algorytmem optymalizacyjnym [3] rozpatruje się równanie jednorodne:

$$\varphi^{IV} + a_1\varphi^{III} + a_2\ddot{\varphi} + a_3\dot{\varphi} = 0, \quad (2.1)$$

gdyż ono właśnie określa własności dynamiczne układu (1.11).

Równanie (2.1) przekształca się na drodze zamiany zmiennej, podstawiając:

$$\dot{\varphi} = ye^{-\frac{a_1}{3}t}, \quad (2.2)$$

do postaci:

$$y^{III} + C_1\dot{y} + C_0y = 0 \quad (2.3)$$

gdzie:

$$C_1 = a_2 - \frac{a_1^2}{3}, \quad C_0 = \frac{2}{27}a_1^3 - \frac{a_1a_3}{3} + a_3.$$

Przekształcenie (2.2) prowadzi do optymalnego procesu sterowania pod warunkiem, że rozwiązanie jednorodnego równania (2.3) będzie rozwiązaniem nierosnącym [3].

Warunkiem nierosnącym rozwiązań równania (2.3) w przypadku tylko rzeczywistych wartości jego współczynników jest, aby współczynnik przy y przyjmował wartość równą zero, a ponadto współczynnik przy \dot{y} był większy od zera [2].

W przypadku współczynników zespolonych takie warunki nie zawsze są możliwymi do spełnienia, gdyż zazwyczaj prowadzą do żądań zmieniających fizykę zjawisk procesu sterowanego. Tak jest i w rozpatrywanym przykładzie. Pierwszy z warunków narzuca, aby $\omega_{x_1} = 0$ lub $I_1 = 0$, a to nie jest do przyjęcia.

Nierosnące rozwiązania układu (2.3) można również uzyskać i dla niezerowej wartości części urojonej współczynnika przy y w równaniu (2.3), a zatem dla $\omega_{x_1} \neq 0$ i $I_1 \neq 0$.

To stanowi właśnie modyfikację warunków [2] dla równań o współczynnikach zespolonych.

Nierosnące rozwiązania układu (2.3) mają miejsce również wówczas, gdy jego równanie charakterystyczne, o postaci:

$$r^3 + 3pr + 2iq = 0, \quad (2.4)$$

gdzie: $3p = \text{Re}C_1$, $2q = \text{Im}C_0$,
będzie posiadać tylko pierwiastki urojone.

Zgodnie ze wzorami Cardana pierwiastki równania (2.4) określone są zależnościami:

$$\begin{aligned} r_1 &= u + w, \\ r_2 &= \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 w, \\ r_3 &= \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 w, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} u &= i(q - \sqrt{q^2 - p^3})^{\frac{1}{3}}, \\ w &= i(q + \sqrt{q^2 - p^3})^{\frac{1}{3}}, \\ \varepsilon_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Rozwijając wyrażenia na u i w w szereg potęgowy, przy oznaczeniu :

$$\omega = \frac{\sqrt{q^2 - p^3}}{q}, \quad (2.5)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u &= iq\left(1 - \frac{1}{3}\omega - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}\omega^2 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}\omega^3 - \dots\right), \\ z &= iq\left(1 + \frac{1}{3}\omega - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}\omega^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}\omega^3 - \dots\right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

Szeregi te są zbieżne dla $(\omega) \leq 1$, czyli dla:

$$q \geq \sqrt{q^2 - p^3}. \quad (2.7)$$

Zakładając zbieżność szeregów i oznaczając ich graniczne wartości odpowiednio przez Ω_1 i Ω_2 pierwiastki równania charakterystycznego można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} r_1 &= iq(\Omega_1 + \Omega_2), \\ r_2 &= -\frac{iq}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) - \frac{q\sqrt{3}}{2}(\Omega_1 - \Omega_2), \\ r_3 &= -\frac{iq}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) + \frac{q\sqrt{3}}{2}(\Omega_1 - \Omega_2). \end{aligned}$$

Aby pierwiastki te były czysto urojonymi winna być spełniona równość:

$$\Omega_1 = \Omega_2,$$

a ma to miejsce jedynie wówczas, gdy $\omega = 0$, czyli, gdy w zależności (2.5) spełniony jest warunek:

$$q^2 - p^3 = 0. \quad (2.8)$$

Reasumując najszybsze tłumienie procesów przejściowych w układzie (2.1) ma miejsce wówczas, gdy spełni się poniższe warunki:

$$\operatorname{Re} a_{11} = \max a_{11} > 0, \quad (2.9)$$

$\text{Re}C_1 > 0$, $\text{Im}C_1 = 0$, które prowadzą do:

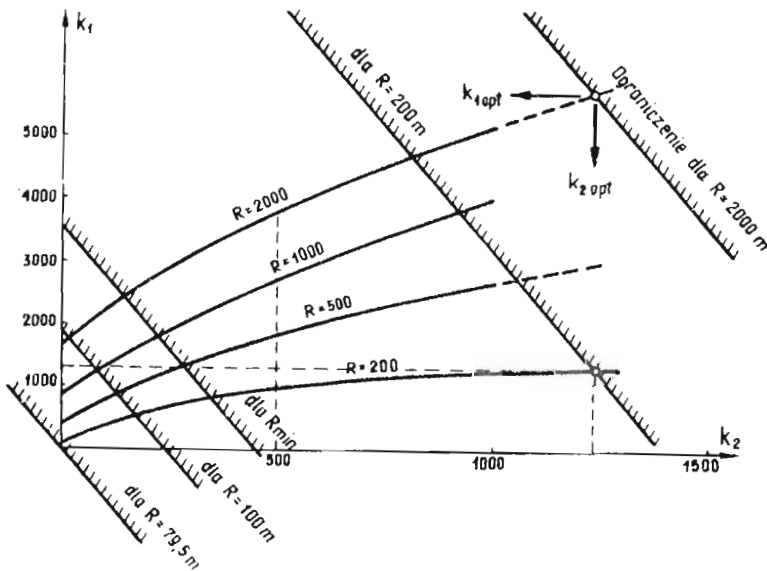
$$3a_{21} - a_{11} - \frac{9a_{22}}{4a_{11}} > 0, \quad (2.10)$$

$$\text{Re}C_0 = \frac{2}{27}(a_{11}^3 - 3a_{11}a_{12}) + \frac{a_{12}a_{32} - a_{11}a_{31}}{3} + a_{31} = 0, \quad (2.11)$$

$$\text{Im}C_0 = \frac{2}{27}(3a_{11}^2a_{12} - a_{12}^3) - \frac{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}{3} + a_{32} > 0, \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{\text{Im}C_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{Re}C_1}{3}\right)^3 = 0. \quad (2.13)$$

Warunek (2.10) jest słabszym od (2.11) i dla technicznie realizowalnych układów jest spełniony zawsze, gdy słusznym jest (2.11). Warunek (2.11) jest warunkiem koniecznym dla zapewnienia rozkładu pierwiastków równania (2.4) na osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej, zapewniając przy istnieniu (2.13) odpowiedzi układu (2.4) o stałej amplitudzie (tj. na granicy stabilności) na wymuszenie impulsowe.



Rys. 3. Program optymalny zmiany współczynników sterowania

Przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień technicznych powstaje zwykle konflikt między wymaganiami teorii reprezentowanymi przez powyższe warunki (2.9)

– (2.13), a możliwościami ich realizacji w praktyce. Na ogół konstruktor może zmieniać tylko niewielką liczbę parametrów i to w bardzo ograniczonym zakresie. Dlatego też wyłania się problem wyboru takich warunków, których spełnienie przyniesie największe efekty. Jest to bardzo złożone zagadnienie i dotychczas nie udało się go rozwiązać a priori. Wybór musi być w każdym konkretnym przypadku kompromisem między wymaganiami i możliwościami technicznej realizacji. Celem zilustrowania przedstawionej tematyki przyjęto, że parametry konstrukcyjne rakiety są z góry zadane, a zmieniać można jedynie współczynniki wzmocnienia prawa sterowania k_1 i k_2 . Dla analizy ilościowej przyjęto raketę o poniższych charakterystykach:

$V = 250$ m/s, $m = 10$ kg, $S = 0.04$ m², $b_a = 0.12$ m, $l_k = 0.39$ m, $I_1 = I_x = 0.02$ Nms², $I = I_y = I_z = 0.3$ Nms², $\omega_{x_1} = 62.8$ rad/s, $\rho = 1.226$ Nsm⁻⁴, $C_N^c = 1.8$ m_{s1}^c = 0.18, $m_D^{\eta} = 30$.

W procesie analizy za podstawę przyjęto warunki (2.9) – (2.12) jako warunki konieczne dla uzyskania optymalnego tłumienia procesu przejściowego. Zrezygnowano natomiast z zapewnienia warunku (2.13), gdyż jednoczesne spełnienie (2.11) i (2.13) przy zmianie tylko współczynników k_1 i k_2 w prawie sterowania jest niemożliwym. (Należałoby dokonać zmiany i parametrów samej konstrukcji, a to z założenia nie wchodzi w rozpatrywanym przykładzie w rachubę).

Mimo tego uzyskano pozytywny rezultat dający wymierne korzyści dla technicznego wykorzystania.

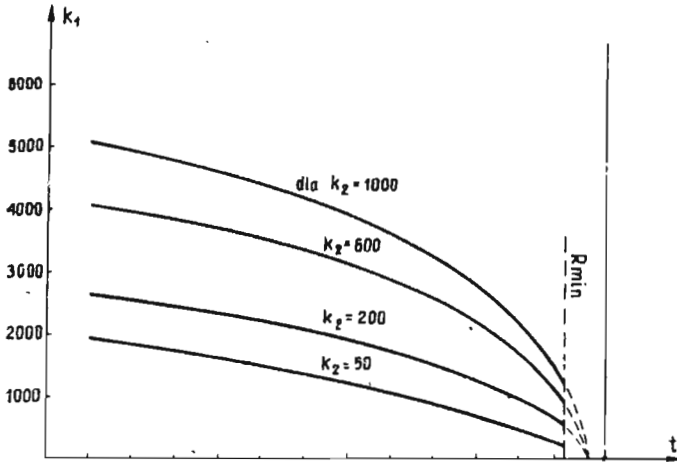
Przebieg zmienności współczynnika $k_1 = f(k_2, R)$ spełniającego warunek (2.11) przedstawia rys.3. Na rysunku naniesiono ponadto ograniczenia na wartości współczynników k_1 i k_2 wynikające z warunku (2.9). Wraz ze zbliżaniem się rakiety do celu ograniczenia mocno zawężają zakres zmienności współczynników prawa sterowania prowadząc do jego likwidacji przy $R = 79,5$ m.

Dla istniejących typów raket samonaprowadzających się na cel istnieje pewna określona wartość odległości R_{min} pomiędzy raketą i celem od której dalszy lot do celu odbywa się jako niesterowany. Spowodowane jest to ograniczoną technicznymi względami możliwością zmiany prędkości kątowej śledzenia. Odległość R_{min} przyjmuje się za techniczne ograniczenie wyznaczające minimalne wartości współczynników k_1 i k_2 . Maksymalne zaś wartości tych współczynników ogranicza warunek (2.9) dla odległości R_0 przyjmowanej jako odległość strzelania. Optymalne zaś wartości k_1 i k_2 prowadzące do najszybszego tłumienia procesu wahań rakiety na torze lotu wyznaczają punkty przecięcia linii ograniczającej z przebiegiem uzyskanym z warunku (2.11) dla bieżącej zmiany odległości R .

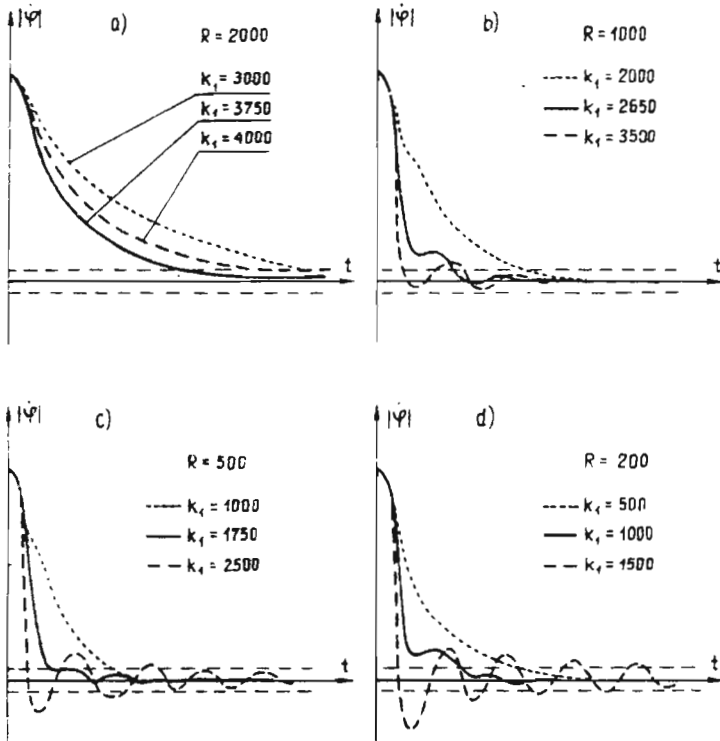
Przedstawienie zmiany współczynnika k_1 w funkcji odległości rakiety do celu dla ustalonych wartości k_2 (rys.4) wskazuje na łatwość technicznej realizacji takiej zmiany przy aproksymacji przebiegu k_1 funkcją liniową:

$$k_1(t) = k_{10} - k(t - t_w), \quad (2.14)$$

gdzie:



Rys. 4.

Rys. 5. Przebiegi $|\varphi|(t)$ przy zmianie współczynników prawa sterowania

k_{10} — współczynnik wzmocnienia prawa sterowania dla $t = t_w$,

k — współczynnik proporcjonalności, co zresztą znajduje potwierdzenie w układach sterowania raket samonaprowadzających się na cel.

Przeprowadzone obliczenia numeryczne dla kilku wybranych punktów toru lotu wskazują na prawidłowość przyjętej tą metodą współczynników prawa sterowania.

Świadczą o tym przebiegi zmiany $|\dot{\varphi}|$ przedstawione na rys. 5 a-d.

3. Literatura

1. A. DEBECKI, *Badania i optymalizacja procesu sterowania samonaprowadzającej rakiety wirującej*, Rozprawa doktorska, WAT, Warszawa 1979
2. S. DUBIEL, O pewnej modyfikacji metody A.N. Golobiencewa optymalizacji liniowych układów dynamicznych, biul. WAT nr 5, 381, 1984
3. А.Н. Голубенцев, *Интегральные методы в динамике*, Киев 1967
4. B. KOWALCZYK, *Macierze i ich zastosowania*, WNT Warszawa 1976
5. I.D. NICOLAIDES, *On the Frecc - Flight Motion of Missles Having Slight Configurational Asymetrics*, JAS Preprint Nr 395, 1953

Summary

Optimization systems of controls parameters target homing whirl rockets The concept has been presented of determining dependences between the system of control parameters and desing parameters which ensures the fastest damping process. The dynamics has been investigated for the target homing anti-tank, whirl rocket and the optimization program has been determined for alternating system of control coefficients. The modified method A.N. Golubyentsev's has been used for the third degree equations with complex coefficients.

Резюме

Представлено концепцию искания зависимостей между параметрами системы управления и конструкционными параметрами ракеты обеспечивающими самое быстрое затухание переходного процесса. Исследовано динамику самонаводящейся противотанковой ракеты вращающейся вокруг продольной оси и определено оптимальную программу изменения коэффициентов усиления системы управления модифицированным методом А.Н. Голубенцева в применении до уравнений с комплексными коэффициентами.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 września 1988 roku