

## NUMERYCZNA SYNTEZA GRY POŚCIGOWEJ DWÓCH SAMOLOTÓW

JERZY GAŁAJ

JERZY MARYNIAK

*Poli technika Warszawska*

W pracy przedstawiono rozwiązanie gry pościgowej dwóch samolotów klasy ISKRA przy pomocy metody gier elementarnych. Zdefiniowano model systemu growego zawierający pełne równania ruchu przestrzennego samolotu w konfiguracji gładkiej. Przeprowadzono syntezę modelu growego w oparciu o rozszerzoną zasadę maksimum Pontriagina. Zrealizowano badania symulacyjne gry pościgowej, wykorzystując w tym celu algorytm oparty na metodzie gier elementarnych. Na podstawie uzyskanych wyników przeanalizowano efektywność zaproponowanej metody oraz wpływ niektórych parametrów (np. stosunku prędkości obu graczy) na charakterystyki pościgowe.

### Wykaz oznaczeń

$x_w, y_w, z_w$	—	współrzędne położenia środka ciężkości samolotu-celu we względnym układzie współrzędnych $Oxyz$ [m],
$W_P, W_S$	—	prędkości przemieszczeń pionowych samolotów-graczy [m/s],
$U_S, U_P$	—	prędkości podłużne samolotów-graczy [m/s],
$\Phi_S, \Phi_P$	—	kąty przechylenia samolotów-graczy [rad],
$\Theta_S, \Theta_P$	—	kąty toru samolotów-graczy [rad],
$\Psi_S, \Psi_P$	—	kąty kursu samolotów-graczy [rad],
$P_S, P_P$	—	prędkości kątowe przechylania samolotów-graczy [rad/s],
$Q_S, Q_P$	—	prędkości pochylania samolotów-graczy [rad/s],
$R_S, R_P$	—	prędkości kątowe odchylenia samolotów-graczy [rad/s],
$\alpha_S, \alpha_P$	—	kąty natarcia samolotów-graczy [rad],
$\delta_h^S, \delta_h^P$	—	kąty wychylenia sterów wysokości samolotów-graczy [rad],

- $\delta_i^S, \delta_i^P$  — kąty wychylenia lotek samolotów-graczy [rad],  
 $\delta_v^S, \delta_v^P$  — kąty wychylenia steru kierunku samolotów-graczy [rad],  
 $u_h^S, u_h^P$  — sygnały elektryczne podawane na wejścia serwomechanizmów sterów wysokości samolotów-graczy [V],  
 $u_i^S, u_i^P$  — sygnały elektryczne podawane na wejścia serwomechanizmów lotek samolotów-graczy [V],  
 $k_h^S, k_h^P$  — współczynniki wzmocnienia serwomechanizmów steru wysokości samolotów-graczy [rad/V],  
 $k_i^S, k_i^P$  — współczynniki wzmocnienia serwomechanizmów lotek samolotów-graczy [rad/V],  
 $T_h^S, T_h^P$  — stałe czasowe serwomechanizmów sterów wysokości [s],  
 $T_i^S, T_i^P$  — stałe czasowe serwomechanizmów lotek [s],  
 $m_S, m_P$  — masy samolotów-graczy [kg],  
 $\left. \begin{matrix} J_x^S, J_x^P \\ J_y^S, J_y^P \\ J_z^S, J_z^P \end{matrix} \right\}$  — główne momenty bezwładności samolotów-graczy względem osi układów samolotowych [kgm]  
 $S_S, S_P$  — powierzchnie skrzydeł samolotów-graczy [m<sup>2</sup>],  
 $c_S, c_P$  — średnie cięciwy aerodynamiczne samolotów-graczy [m],  
 $c_x^S, c_x^P$  — bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne siły oporu [-],  
 $c_z^S, c_z^P$  — bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne siły nośnej [-],  
 $c_L^S, c_L^P$  — bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne momentu przechylającego [-],  
 $c_M^S, c_M^P$  — bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne momentu pochylającego [-],  
 $c_N^S, c_N^P$  — bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne momentu odchylającego [-],  
 $\rho_h^S, \rho_h^P$  — gęstość powietrza na danej wysokości lotu [kg/m<sup>3</sup>],  
 $X_Q^S, X_Q^P$  — pochodne aerodynamiczne siły oporu [Ns/rad],  
 $\left. \begin{matrix} Y_P^S, Y_P^P \\ Y_R^S, Y_R^P \\ Y^S, Y^P \end{matrix} \right\}$  — pochodne aerodynamiczne siły bocznej [Ns/rad] [N/rad],

$\left. \begin{array}{l} Z_w^S, Z_w^P \\ Z_Q^S, Z_Q^P \\ Z^S, Z^P \end{array} \right\}$	— pochodne aerodynamiczne siły nośnej [Ns <sup>2</sup> /m] [Ns/rad] [N/rad],
$\left. \begin{array}{l} L_P^S, L_P^P \\ L_R^S, L_R^P \\ L^S, L^P \end{array} \right\}$	— pochodne aerodynamiczne momentu przechylającego [Nms/rad] [Nm/rad],
$\left. \begin{array}{l} M_w^S, M_w^P \\ M_Q^S, M_Q^P \\ M^S, M^P \end{array} \right\}$	— pochodne aerodynamiczne momentu pochylającego [Ns <sup>2</sup> ] [Nms/rad] [Nm/rad],
$\left. \begin{array}{l} N_P^S, N_P^P \\ N_R^S, N_R^P \\ N^S, N^P \end{array} \right\}$	— pochodne aerodynamiczne momentu odchylającego [Nms/rad] [Nm/rad]
$\phi_T^S, \phi_T^P$	— kąty zaklinowania osi silników [rad],
$\omega_T^S, \omega_T^P$	— prędkości kątowe części wirującej silnika [rad/s],
$J_T^S, J_T^P$	— momenty bezwładności względem osi obrotu części wirującej silnika [kgm <sup>2</sup> ].

## Uwagi:

1. Podane wyżej wielkości odnoszą się odpowiednio do samolotu ścigającego  $S$  (oznaczenie z indeksem górnym lub dolnym  $S$ ) lub do samolotu ściganego  $P$  (oznaczenie z indeksem górnym lub dolnym  $P$ ).
2. W równaniach (21) zastosowano skrócony zapis funkcji trygonometrycznych  $\sin x_i$ ; i  $\cos x_i$  ( $i = 6, \dots, 10$ ). Przykładowo  $c_8 = \cos x_8$ ,  $s_7 = \sin x_7$  itp.

## 1. Wprowadzenie

Po [1] i [2] niniejszy artykuł przedstawia podsumowanie następnego etapu prac autora nad zagadnieniami związanymi z syntezą gier pościgowych. Tym razem przedmiotem zainteresowania są dwa samoloty poruszające się w przestrzeni inercyjnej, z których jeden pełni stale rolę obiektu ściganego (gracz  $P$ ), drugi zaś rolę obiektu ścigającego (gracz  $S$ ). Do opisu modelu systemu growego zastosowano pełne równania ruchu samolotu w konfiguracji gładkiej (bez podwieszów).

W pracy zamieszczono kolejno:

- a) opis modelu systemu growego, który zawiera równania ruchu obu samolotów (podczas ich wyprowadzania oparto się na wcześniej przyjętych założeniach wstępnych oraz pracy [4], zbiór celu oraz funkcję kosztu (rozdział 2),
- b) syntezę gry pościgowej polegającą na wyznaczeniu, w oparciu o zasadę minimum Pontriagina, strategii punktu siodłowego oraz niezbędną modyfikację modelu growego wynikającą z zastosowania metody gier elementarnych (rozdział 3),
- c) symulację cyfrową zaproponowanego modelu gry pościgowej oraz analizę wyników obejmującą m.in. porównanie uzyskanych charakterystyk dla różnych wartości parametrów procesu growego (stosunek prędkości samolotów-graczy, stan początkowy gry itp.) - rozdział 4,
- d) podsumowanie wyników badań symulacyjnych oraz podanie najbliższych zamierzeń autora związanych z problemami rozważanymi w niniejszej pracy (rozdział 5).

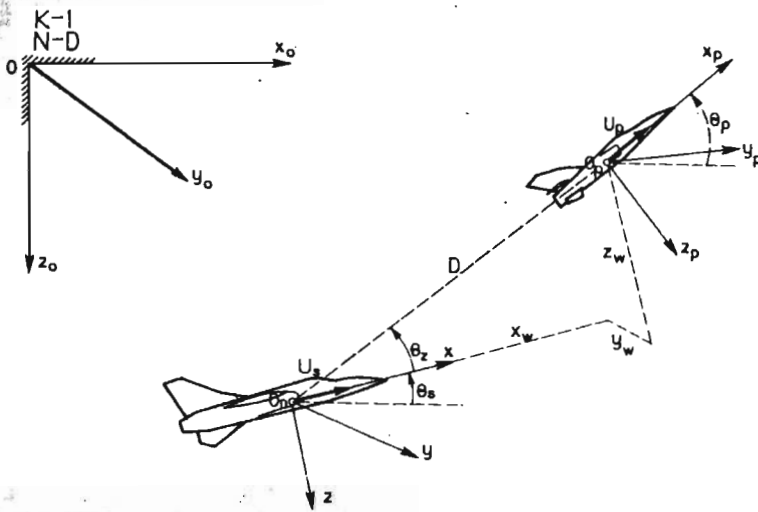
## 2. Model systemu growego

Będziemy rozważać proces pościgowy, w którym biorą udział dwa lekkie samoloty myśliwskie. Powyższy proces można traktować jako wstępną fazę walki powietrznej dwóch samolotów.

W celu wyznaczenia modelu matematycznego systemu growego przyjęto następujące założenia wstępne:

1. oba samoloty biorące udział w pościgu, są ciałami sztywnymi o zadanej konfiguracji przestrzennej, które poruszają się w przestrzeni inercjalnej ze stałymi prędkościami podłużnymi  $U_S$  (samolot ścigający) i  $U_P$  (samolot ścigany),
2. wartości wszystkich bezwymiarowych pochodnych aerodynamicznych sił i momentów są stałe podczas gry,
3. środki ciężkości obu samolotów leżą w początku układów samolotowych ( $x_c = y_c = z_c = 0$ ),
4. wektory ciągów  $T_S$  i  $T_P$  obu samolotów leżą w płaszczyźnie podłużnej i są zaczepione w początku układów samolotowych ( $x_T = y_T = z_T = 0$ ),
5. sterowanie ruchem obu samolotów-graczy jest realizowane przy pomocy sterów wysokości oraz lotek wychyłanych za pośrednictwem sterowych serwo-mechanizmów wykonawczych, których dynamikę aproksymowano członem inercyjnym pierwszego rzędu,

6. wartość kąta wychylenia steru kierunku wynika z warunku równowagi sił bocznych działających na samolot (przyspieszenia boczne  $\dot{V}_S = \dot{V}_P = 0$ ),
7. siły ciągu wynikają z warunku równowagi sił wzdłużnych (z założenia 1 wynika, że  $\dot{U}_S = \dot{U}_P = 0$ ),
8. kąty zaklinowania usterzenia poziomego  $\alpha_{zh}^S, \alpha_{zh}^P$  oraz kąty ślizgu  $\beta_S, \beta_P$  są równe zero,
9. pominięto wpływ momentów dewiacyjnych i zakłóceń zewnętrznych na ruch samolotu.



Rys. 1. Kinematyka ruchu samolotów-graczy we względnym układzie odniesienia  $0xyz$

Podobnie jak w pracach [1] i [2] kinematykę ruchu obu samolotów rozpatrywano w układzie względnym  $0wxwywz$  związanym z samolotem ścigającym  $S$  (rys.1). Na podstawie [2] i [4] równania ruchu obu graczy we wspomnianym układzie współrzędnych można zapisać następująco ( $\alpha_S, \alpha_P, \phi_T^S, \phi_T^P$  - małe kąty):

$$\dot{x}_1 = U_P(c_8c_6c_{10} + s_8s_6) - U_S + x_4(c_9s_8c_6c_{10} + s_9c_6s_{10} - c_9c_8s_6) - x_{11}x_3 + x_{13}x_2,$$

$$\dot{x}_2 = U_P(c_8s_7s_6c_{10} + c_8c_7s_{10} - c_6s_7s_8) + x_4(c_9s_8s_7s_6c_{10} + c_9s_8c_7s_{10} + s_9s_7s_6s_{10} - s_9c_7c_{10}) - x_1x_{13} + x_{12}x_3,$$

$$\dot{x}_3 = U_P(c_8c_7s_6c_{10} - c_8s_7s_{10} - s_8c_7c_6) + x_4(c_9s_8c_7c_{10} + s_9s_6s_{10} +$$

$$+s_9s_7c_{10} - c_9s_8s_7s_{10} + c_9c_8c_7c_6) - x_5 - x_{12}x_2 + x_{11}x_1,$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_P - Z_{\dot{w}}^P} [m_P(UPx_{14} + gc_8c_9) - T_P\phi_T^P - \frac{1}{2}\rho_h^P S_P(U_P^2 + x_4^2)(c_x^P\alpha_P + c_z^P) + Z_Q^P x_{14} + Z_{\delta h}^P x_{19}],$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{m_S - Z_{\dot{w}}^S} [m_S(USx_{11} + gc_6c_7) - T_S\phi_T^S - \frac{1}{2}\rho_h^S S_S(U_S^2 + x_5^2)(c_x^S\alpha_S + c_z^S) + Z_Q^S x_{11} + Z_{\delta h}^S x_{17}],$$

$$\dot{x}_6 = x_{11}c_7 - x_{13}s_7,$$

$$\dot{x}_7 = x_{12} + x_{11}s_7tgx_6 + x_{13}c_7tgx_6,$$

$$\dot{x}_8 = x_{14}c_9 - x_{16}s_9,$$

$$\dot{x}_9 = x_{15} + x_{14}s_9tgx_8 + x_{16}c_9tgx_8, \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_{10} = \frac{1}{\cos x_8} (x_{14}s_9 + x_{16}c_9) - \frac{1}{\cos x_6} (x_{11}s_7 + x_{13}c_7),$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} = & \frac{1}{J_y^S} \left\{ (J_z^S - J_x^S)x_{13}x_{12} - J_T^S\omega_T^S x_{13} + \frac{M_{\dot{w}}^S m_S}{m_S - Z_{\dot{w}}^S} (USx_{11} + gc_6c_7) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\rho_h^S S_S(U_S^2 + x_5^2) \left[ c_s c_M^S - \frac{M_{\dot{w}}^S}{m_S - Z_{\dot{w}}^S} (c_x^S\alpha_S + c_z^S) \right] + \left( \frac{M_{\dot{w}}^S Z_Q^S}{m_S - Z_{\dot{w}}^S} + \right. \right. \\ & \left. \left. + M_Q^S \right) x_{11} + \left( \frac{M_{\dot{w}}^S Z_{\delta h}^S}{m_S - Z_{\dot{w}}^S} + M_{\delta h}^S \right) x_{17} \right\}, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{1}{J_x^S} [(J_y^S - J_z^S)x_{11}x_{13} + L_P^S x_{12} + L_R^S x_{13} + L_{\delta l}^S x_{18} + L_{\delta v}^S \delta_v^S],$$

$$\dot{x}_{13} = \frac{1}{J_z^S} [(J_x^S - J_y^S)x_{12}x_{11} + J_T^S\omega_T^S x_{11} + N_P^S x_{12} + N_R^S x_{13} + N_{\delta v}^S \delta_v^S],$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{14} = & \frac{1}{J_y^P} \left\{ (J_z^P - J_x^P)x_{16}x_{15} - J_T^P\omega_T^P x_{16} + \frac{M_{\dot{w}}^P m_P}{m_P - Z_{\dot{w}}^P} (UPx_{14} + g c_8c_9) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\rho_h^P S_P(U_P^2 + x_4^2) \left[ c_P c_M^P - \frac{M_{\dot{w}}^P}{m_P - Z_{\dot{w}}^P} (c_x^P\alpha_P + c_z^P) \right] + \left( \frac{M_{\dot{w}}^P Z_Q^P}{m_P - Z_{\dot{w}}^P} + \right. \right. \\ & \left. \left. + M_Q^P \right) x_{14} + \left( \frac{M_{\dot{w}}^P Z_{\delta h}^P}{m_P - Z_{\dot{w}}^P} + M_{\delta h}^P \right) x_{19} \right\}, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_{15} = \frac{1}{J_x^P} [(J_y^P - J_z^P)x_{14}x_{16} + L_P^P x_{15} + L_R^P x_{16} + L_{\delta l}^P x_{20} + L_{\delta v}^P \delta_v^P],$$

$$\dot{x}_{16} = \frac{1}{J_z^P} [(J_x^P - J_y^P)x_{15}x_{14} + J_T^P\omega_T^P x_{14} + N_P^P x_{15} + N_R^P x_{16} + N_{\delta v}^P \delta_v^P],$$

$$\dot{x}_{17} = (k_h^S u_1 - x_{17}) / T_h^S,$$

$$\dot{x}_{18} = (k_l^S u_2 - x_{18}) / T_l^S,$$

$$\dot{x}_{19} = (k_h^P u_3 - x_{19}) / T_h^P,$$

$$\dot{x}_{20} = (k_l^P u_4 - x_{20}) / T_l^P,$$

gdzie:

$$\mathbf{x}^T = [x_i]_{i=1, \dots, 20} = [x_w, y_w, z_w, W_P, W_S, \theta_S, \phi_S, \theta_P, \phi_P, \psi, \\ Q_S, P_S, R_S, Q_P, R_P, \delta_h^S, \delta_l^S, \delta_h^P, \delta_l^P],$$

$$\mathbf{u}^T = [u_j]_{j=1, \dots, 4} = [u_h^S, u_l^S, u_h^P, u_l^P],$$

$$T_S = m_S(x_{11}x_5 + g \sin x_6) + \frac{1}{2}\rho_h^S S_S (U_S^2 + x_5^2)(c_x^S - c_x^S \alpha_S) - X_Q^P x_{11},$$

$$T_P = m_P(x_{14}x_4 + g \sin x_8) + \frac{1}{2}\rho_h^P S_P (U_P^2 + x_4^2)(c_x^P - c_x^P \alpha_P) - X_Q^P x_{14},$$

$$\delta_v^S = \frac{1}{Y_{\delta v}^S} (m_S(x_{12}x_5 - U_S x_{13} + g \cos x_6 \sin x_7) + Y_P^S x_{12} + Y_R^S x_{13}),$$

$$\delta_v^P = -\frac{1}{Y_{\delta v}^P} (m_P(x_{15}x_4 - U_P x_{16} + g \cos x_8 \sin x_9) + Y_P^P x_{15} + Y_R^P x_{16}).$$

Celem rozważanej gry pościgowej jest osiągnięcie w minimalnym czasie, nie większym od  $T_{\max}$ , zadanej odległości między graczami  $R_x$ . Biorąc powyższe pod uwagę, zbiór celu  $A$  i funkcję kosztu  $J$  można zapisać w następującej postaci:

$$A = \{i, x(t) : t \leq T_{\max} \quad \vee \quad x_w^2 + y_w^2 + z_w^2 \leq R_x^2\},$$

$$J = \min_{u_h^S, u_l^S} \max_{u_h^P, u_l^P} \int_0^T dt. \quad (2.2)$$

Ograniczenia występujące w rozważanym modelu growym wynikają przede wszystkim ze względów pilotażowych ( $\alpha < \alpha_{kryt}$ ) i konstrukcyjnych (współczynnik obciążenia mniejszy od dopuszczalnego) oraz maksymalnego wychylenia powierzchni sterowych. Pierwsze dwa ograniczenia, związane z kątem natarcia, można zapisać w następującej formie:

$$\alpha_S < \alpha_{S \max}, \quad \alpha_P < \alpha_{P \max}, \quad (2.3)$$

gdzie:

$$\alpha_{S \max} = \min \left( \frac{2m_S g n_S}{\rho_h^S V_{0S}^2 S_S a_S} + \alpha_{0S}, \frac{c_x^S \max}{a_S} + \alpha_{0S} \right),$$

$$\alpha_{P \max} = \min \left( \frac{2m_P g n_P}{\rho_h^P V_{0P}^2 S_P a_P} + \alpha_{0P}, \frac{c_x^P \max}{a_P} + \alpha_{0P} \right).$$

Maksymalne wartości kątów wychyleń powierzchni sterowych obu samolotów-graczy wyznaczają ich dopuszczalne zbiory sterowań  $U_h^S, U_h^P, U_l^S$  i  $U_l^P$ , które mogą

być zapisane w następujący sposób (założono symetrię maksymalnych wychyleń organów sterowych u obu graczy):

$$\begin{aligned} U_h^S &= \left\{ u_h^S : |u_h^S| \leq \frac{\delta_h^S \max}{k_h^S} \right\}, \\ U_h^P &= \left\{ u_h^P : |u_h^P| \leq \frac{\delta_h^P \max}{k_h^P} \right\}, \\ U_i^S &= \left\{ u_i^S : |u_i^S| \leq \frac{\delta_i^S \max}{k_i^S} \right\}, \\ U_i^P &= \left\{ u_i^P : |u_i^P| \leq \frac{\delta_i^P \max}{k_i^P} \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 3. Synteza modelu gry pościgowej

Syntezę systemu growego, zdefiniowanego w rozdziale 2, przeprowadzono w oparciu o warunki konieczne wynikające z rozszerzonej zasady maksimum Pontryagina [6]. Aby skorzystać z metody podanej w [6] należy najpierw wyznaczyć Hamiltonian dla danego problemu growego. Ogólna postać funkcji  $H$  będzie następująca:

$$H = p^T f(x, u) + 1, \quad (3.1)$$

gdzie:  $p^T = [p_i]_{i=1, \dots, 20}$  — wektor sprzężony stanu,  
 $f(x, u)$  — wektor prawych stron układu równań (2.1).

W celu wyznaczenia optymalnych wartości składowych wektora sterowania  $u$ , z funkcji hamiltonianu (3.1) wyodrębniono składniki, które zawierają sterowania  $u_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ):

$$\begin{aligned} H &= H_p(x, p) + p_{17} k_h^S u_1 / T_h^S + p_{18} k_l^S u_2 / T_l^S + p_{19} k_h^P u_3 / T_h^P + \\ &+ p_{20} k_l^P u_4 / T_l^P. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Z zasady minimaksu, postaci Hamiltonianu i ograniczeń (2.4) wynika, że sterowania optymalne w danej grze pościgowej (o ile istnieją) będą równe:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= -u_h^S \max \operatorname{sgn} p_{17}(t), \\ \hat{u}_2 &= -u_l^S \max \operatorname{sgn} p_{18}(t), \\ \hat{u}_3 &= u_h^P \max \operatorname{sgn} p_{19}(t), \\ \hat{u}_4 &= u_l^P \max \operatorname{sgn} p_{20}(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$



Zmienne  $p_i$  ( $i = 17, \dots, 20$ ) można wyznaczyć z układu równań różniczkowych o ogólnej postaci:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Warunki brzegowe dla równań (3.4) można wyznaczyć z następującego zestawu zależności [5]:

$$\begin{aligned} p_1(T) &= -2dx_w(T), \\ p_2(T) &= -2dy_w(T), \\ p_3(T) &= -2dz_w(T), \\ p_i(T) &= 0, \quad i = 4, \dots, 20, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie  $d$  jest zmienną pomocniczą, która może być określona z równania skalarnego:

$$H(\hat{x}(T), \hat{u}(T), \hat{p}(T), d) = 0. \quad (3.6)$$

Aby zastosować do powyższego problemu dwugranicznego metodę gier elementarnych, opisaną wcześniej w [1] i [2], należy odpowiednio zmodyfikować funkcję kosztu  $J$  oraz warunki brzegowe (3.5). Podobnie jak w [2], tak i tutaj, przyjęto funkcję kosztu dla  $k$ -tej gry elementarnej w postaci:

$$J_k[x(T_k)] = \sqrt{x_w^2(T_k) + y_w^2(T_k) + z_w^2(T_k)}, \quad (3.7)$$

gdzie:  $T_k = k\Delta t_{gc}$ .

Funkcja (3.7) odpowiada odległości między samolotami w końcu  $k$ -tej gry elementarnej, którą samolot ścigający (gracz  $S$ ) ma za zadanie minimalizować, natomiast samolot ścigany (gracz  $P$ ) maksymalizować.

Rozwiązanie każdej z  $K$  gier elementarnych polega na wyznaczeniu par strategii obu graczy  $\{\hat{u}_h^S = \hat{\gamma}_h^S(x, t), \hat{u}_l^S = \hat{\gamma}_l^S(x, t)\}$  i  $\{\hat{u}_h^P = \hat{\gamma}_h^P(x, t), \hat{u}_l^P = \hat{\gamma}_l^P(x, t)\}$ , odpowiadających punktowi siodłowemu danej gry elementarnej, dla którego spełniony jest warunek:

$$\hat{J}_k = \min_{\substack{u_h^S \ni U_h^S \\ u_l^S \ni U_l^S}} \max_{\substack{u_h^P \ni U_h^P \\ u_l^P \ni U_l^P}} J_k = \max_{\substack{u_h^P \ni U_h^P \\ u_l^P \ni U_l^P}} \min_{\substack{u_h^S \ni U_h^S \\ u_l^S \ni U_l^S}} J_k. \quad (3.8)$$

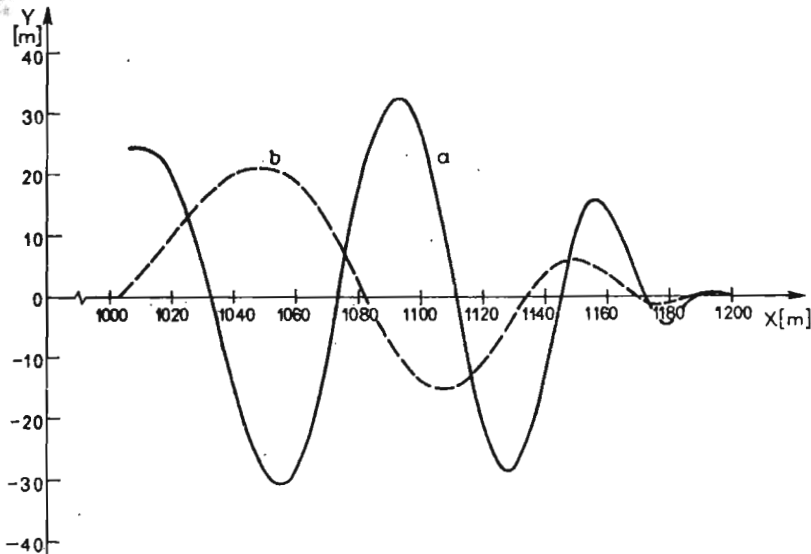
Globalny wskaźnik jakości (funkcja kosztu dla całej gry pościgowej) będzie wówczas równy:

$$\hat{J} = \sum_{k=1}^K \hat{J}_k. \quad (3.9)$$



$$b) \mathbf{x}_0^T = [1200, 200, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.57, 0, \dots, 0].$$

Na rysunkach 2÷4 pokazano rzuty wybranych trajektorii pościgowych na płaszczyznę  $(x, y)$ , natomiast na rysunkach 5 i 6 zilustrowano przebiegi niektórych sterowań oraz funkcji  $D(t)$  (odległość między graczami).



Rys. 2. Rzuty trajektorii pościgowych na płaszczyznę  $(x, y)$  dla różnych wartości współczynnika  $k_v$ : a)  $k_v = 1.33$  (—) b)  $k_v = 1.5$  (- -)

Otrzymane wyniki badań symulacyjnych pozwoliły na sformułowanie szeregu wniosków, z których najistotniejsze wymieniono poniżej:

1. Osiągnięcie celu gry, przy danych warunkach początkowych i strategiach wyznaczonych przy pomocy metody gier elementarnych, jest możliwe pod warunkiem, że prędkość gracza ścigającego będzie odpowiednio większa od prędkości gracza ściganego. Dla  $k_v = 1.1$  cel nie zostaje osiągnięty ( $T \Rightarrow \infty$ ), podczas gdy dla  $k_v = 1.33$  cel gry zostaje osiągnięty po czasie  $T = 3.4s$ , a dla  $k_v = 1.5$  po czasie  $T = 1.8s$  (rys. 5).
2. Dla wartości  $k_v > 1.2$  funkcję odległości między graczami  $D(t)$  można aproksymować linią prostą, której nachylenie do osi czasu wzrasta ze wzrostem  $k_v$ . Dla  $k_v = 1.33$  średnia prędkość zbliżania  $\dot{D}(t) = 58.8m/s$ , natomiast dla  $k_v = 1.5$  —  $\dot{D}(t) = 111m/s$ .





3. Dla danych warunków początkowych ( $x_w = 1200$ ,  $y_w = 0$ ,  $z_w = -100$ ) rzut trajektorii pościgowej na płaszczyznę  $(x, y)$  posiada charakter regularnych nieliniowych oscylacji, których amplituda i częstotliwość zależy m.in. od wartości  $k_v$ ,  $\Delta t_{ge}$  i  $\psi_0$ . We wszystkich przypadkach amplituda pierwszego wahnięcia jest kilkakrotnie mniejsza od pozostałych. Przy wzroście  $k_v$  amplituda i częstotliwość maleją, przy czym dla  $k_v > 1.3$  maksymalna wartość bezwzględna amplitudy nie przekracza 40 m. (rys.2).

W przypadku  $\Delta t_{ge}$  zależność ta nie jest tak jednoznaczna, zwłaszcza jeżeli chodzi o amplitudę. Jej wartość wyraźnie maleje dopiero dla większych wartości ( $\Delta t_{ge} > 0.03$  s). Natomiast częstotliwość oscylacji generalnie wzrasta wraz ze wzrostem  $\Delta t_{ge}$  (rys.3). Wartość początkowa względnego kąta kursu  $\psi_0$  wpływa na amplitudę i częstotliwość oscylacji trajektorii pościgowych w ten sposób, że przykładowo dla  $\psi_0 = 0$  maksymalna amplituda jest mniejsza, zaś częstotliwość większa niż dla  $\psi_0 = 1$  (rys.4).

4. Przebieg funkcji względnego kąta kursu  $\psi(t)$  charakteryzuje się regularnymi oscylacjami o zmiennej amplitudzie, których maksymalna wartość zależy m.in. od  $k_v$  i  $\Delta t_{ge}$ . Im większe  $k_v$ , tym mniejsza amplituda i większa częstotliwość tych oscylacji.

Wpływ wartości  $\Delta t_{ge}$  jest bardziej złożony. Generalnie wraz ze wzrostem  $\Delta t_{ge}$  można zauważyć zmniejszanie się maksymalnej wartości amplitudy oscylacji funkcji  $\psi(t)$ .

5. Wartość stosunku prędkości  $k_v$  ma wpływ na przebiegi wychyleń sterów wysokości oraz lotek u obu graczy (rys. 6).
6. Stan początkowy gry ma istotny wpływ na charakter przebiegu trajektorii pościgowych.

## 5. Uwagi końcowe

Przeprowadzone badania symulacyjne modelu gry pościgowej pozwoliły na pośrednią weryfikację zastosowanej metody gier elementarnych w sensie zbliżenia uzyskanych strategii do strategii optymalnych.

Otrzymane charakterystyki pościgowe wskazują na prawidłowe tendencje występujące w tego typu procesach growych, o czym świadczą chociażby takie fakty, że:

- a) zmiana kierunku wychylenia lotek gracza  $S(\delta_i^S)$  następuje w momencie przejścia trajektorii pościgowej przez płaszczyznę  $0xz$ ,

b) zmiana kierunku wychylenia steru wysokości gracza  $S(\delta_h^S)$  następuje w momencie przejścia trajektorii pościgowej przez płaszczyznę  $Oxy$ .

Wykazano również, że rozważane parametry procesu growego takie jak: stosunek prędkości  $k_v$ , założony apriori przedział gry elementarnej  $\Delta t_{ge}$  oraz początkowy względny kąt kursu  $\psi_0$  mają w różnym stopniu wpływ na prawie wszystkie analizowane funkcje pościgowe (jedynie  $\Delta t_{ge}$  nie ma praktycznie wpływu na przebieg funkcji  $D(t)$ ).

Badany proces growy, z kilku zasadniczych względów, odbiega od rzeczywistości. Przede wszystkim w realnym pościgu prędkości obu samolotów  $U_P$  i  $U_S$  są zmienne, a bezpośrednia obserwacja wielu zmiennych stanu jest bardzo ograniczona lub w ogóle niemożliwa (np. położenie kątowne i prędkości kątowne samolotu strony przeciwnej). Stąd też w przyszłym modelu należy co najmniej uwzględnić oba wyżej wspomniane czynniki poprzez:

- a) uzupełnienie modelu matematycznego systemu growego o równania opisujące ruchy wzdlużne obu samolotów przy przyjęciu odpowiedniego modelu sterowania ciągami  $T_S$  i  $T_P$ ,
- b) estymację niemierzalnych zmiennych stanu oraz przyjęcie odpowiednich modeli zakłóceń pomiarowych.

Proponowane rozwinięcie modelu systemu growego daje możliwość maksymalnego zbliżenia się do warunków rzeczywistych na tyle, na ile pozwala współczesny poziom nauki (teoria gier, teoria sterowania) i techniki (modelowanie cyfrowe, elektroniczna technika obliczeniowa).

## 6. Literatura

1. J.GALAJ, J.MARYNIAK, *Synteza growego systemu naprowadzania samolotu na samolot-cel w płaszczyźnie podłużnej metodą gier elementarnych*, MTiS, 1-2, 25, 1987
2. J.GALAJ, *Numeryczna synteza przestrzennej gry pościgowej dwóch obiektów manewrujących - walka powietrzna w systemie symulatora*, Sprawozdanie DOR 163/87-S, Warszawa 1987
3. J.GALAJ, *Heuristic solution of pursuit-evasion game of two aircraft in a vertical plane*, Archiwum Automatyki i Telemekhaniki, No.3, 1987
4. J.MARYNIAK, *Ogólny model symulacji samolotu*, Sprawozdanie nr 140/85, ITLiMS Warszawa 1985
5. T.BASAR, G.J.OLSDER, *Noncooperative game theory*, Academic Press, 1982
6. L.S.PONTRYAGIN, *Linear differential games*, Soviet Math. Doklady 8, 769-771, 1967
7. praca zbiorowa pod kier. J.Maryniaka, *Opracowanie komputerowego modelu sterowania samolotem TS-11 ISKRA bez uwzględnienia startu i lądowania*, Sprawozdanie 130/82, ITLiMS Warszawa 1982