MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 27, (1989)

# SUR UNE CONCEPTION DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX DÉNOMBRABLES

ROMAN NAGÓRSKI

*Politechnika Warszawska*

## 1. Introduction

Cette mémoire contient un développement du rapport prèsenté à la conférence organisée en octobre 1987 à Szczyrk a l'occasion de 300-ème anniversaire de publication de fameux oeuvre de Newton „Philosophiae naturalis principia mathematica".

En mécanique classique on peut distinguer deux méthodes fondamentales de description phénomènologique des objets matériels. L'une les traite comme des systèmes à nombre fini des degrés de liberté, l'autre comme des systèmes (milieux) continus (i.e. comme des systèmes dont la puissance d'„ensemble des degrés de liberté" est de cardinal „continuum").

Ce travail est consacré à la présentation d'une conception de la mécanique des systèmes matériels à „nombre dénombrable" des degrés de libertè, plus précisément, des systèmes dont des paramètres de configuration forment une suite généralisée. Nous allons les appeler des milieux dénombrables.

Les prémisses suivantes constituent la génèse du thème:

— "entre" des ensembles finis et de cardinal "continuum" il existe des ensembles infinis mais dénombrables,

— en mécanique on peut indiquer des exemples de milieux dénombrables, e.g. des systèmes infinis des particules isolées,

— la nature de la matière et le comportement des objets matériels sont toujours insuffisament reconnus et décrits par les théories existantes,

— la description phénomènologique est très utilisable dans beaucoup de domaines de la technique,

— la classification des objets matériels sur les milieux discrèts et continus n'est pas bien définies et complètes,

— les modèles continus de la matière (des matériaux) sont très utilisables mais ils possèdent aussi des défauts, e.g. ils ne sont valables (asymptotiquement) que pour les infiniement longues ondes de déformation,

— avant de l'époque de Cauchy on a considéré beaucoup de modèles intéréssants noncontinus; il parait qu'en ce temps on manquait d'appareil mathématique respectivement "fort" pour les étudier et appliquer,

— il existe un appareil de l'analyse mathématique (fonctionnelle) qui permet d'étudier des milieux dénombrables; c'est surtout la forme abstraite des notions et des théorèmes formulés dans les espaces de dimension infinie et des faits particulieux concernants les espaces des suites infinies,

— il existe la possibilité naturelle d'"approximation" des milieux dénombrables par des systèmes finis et obtenir effectivement des résultats numériques pratiquement exacts.

Nous limiterons les considérations au cas vérifiant les postulats généraux suivants:

(1) on n'étudiera que des grandeurs et phénomènes purement mécaniques;

(2) on admettera toutes les hypothèses de la mécanique classique déterministe;

(3) on appliquera la description phénomènologique;

(4) on postulera l'adéquation physique de la modelisation, i.e. les grandeurs mécaniques définies et les relations entre elles doivent-être physiquement interprètées et en accord avec l'expérience.

Il est à noter qu'on peut trouver dans la littérature des ouvrages se rapportant à la mécanique des systèmes infinis (particulièrement dénombrables), publiés pendant les 15 - 20 dernières années. On peut distinguer:

— des traités sur la mécanique des systèmes infinis des particules matérielles (e.g. [1] - [5]),

— des traités sur des systèmes dynamiques "arbitraires", de Hamilton et de Lagrange (dans les espaces abstraites) (e.g. [6], [7]),

— des divers essais de la généralisation des notions et des équations de la mécanique statistique dans les espaces de dimension infinie (e.g. [8], [9]).

Dans ces ouvrages domine la description statistique, soit, des problèmes de nature purement mathématique. Par contre, la description propre à la mécanique analitique déterministe, des applications dans la modelisation des structures en génie civil ou en génie mécanique ainsi que la dénombrabilité d'ensemble des paramètres de configuration et des propriétés des espaces des suites ne sont pas suffisament exposées et mises à profit.

## 2. Milieu dénombrable. Espace de configuration

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble dénombrable composé d'éléments $\alpha$, appelé à partir d'ici le milieu dénombrable.

Soit ensuite une famille $\{X_\alpha, \alpha \in \mathscr{D}\}$ des espaces vectoriels topologiques (e.g. normés) sur le corps des réels $\mathscr{R}$, nommés les espaces de configuration des éléments $\alpha$ (on peut traiter $\mathscr{D}$ comme l'ensemble des indices).

Notons par $X$ le produit direct des $X_\alpha$:

$$X = \{x = (x_\alpha); x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in \mathscr{D}\}, \tag{2.1}$$

muni de la structure d'espace vectoriel à l'aide des lois de composition:

$$\begin{aligned} x+y &= (x_\alpha + y_\alpha), \quad x, y \in X, \\ ax &= (ax_\alpha), \quad x \in X, a \in \mathscr{R}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Par l'espace de configuration $X_\mathscr{D}$ du milieu $\mathscr{D}$ nous allons comprendre un sous-espace linéaire de $X$, muni de la structure d'espace topologique (e.g. normé). Les éléments $x$ de $X_{\mathscr{D}}$ seront appelés des configurations de $\mathscr{D}$.

Nous dirons que $\mathscr{D}$ est physique si $X_\alpha$ ($\alpha \in \mathscr{D}$) sont physiques (les éléments $x_\alpha$ de $X_\alpha$ sont physiquement interprétatifs). Au cas contraire, nous appellerons $\mathscr{D}$ le milieu abstrait. Mais en ce cas nous allons admettre qu'il existe une application $\mathscr{J}$: $X_{\mathscr{D}} \to \mathbf{X}$ telle que $\mathbf{x} = \mathscr{J}(x)$ est une configuration de $\mathscr{D}$ dans l'espace physique $\mathbf{X}$.

## 3. Éléments de la cinématique

Soit:

$$\mathscr{T} = [0, T], \tag{3.1}$$

l'intervalle de temps et soit:

$$Y = X_{\mathscr{D}}^{\mathscr{T}} \tag{3.2}$$

l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathscr{T}$ à valeurs dans l'espace de configuration $X_{\mathscr{D}}$ du milieu denombrable $\mathscr{D}$.

Par l'espace des fonctions du mouvement (admissibles) de $\mathscr{D}$ nous allons comprendre un sous-espace lineaire $Y_{\mathscr{D}}$ de $Y$. En cas, dit classique, on pose:

$$Y_{\mathscr{D}} = C^2(\mathscr{T}, X_{\mathscr{D}}), \tag{3.3}$$

avec $X_{\mathscr{D}}$ normé (i.e. l'espace des fonctions deux fois continûment dérivables). À présent, on considère de plus souvent l'espace:

$$Y_{\mathscr{D}} = L^p(\mathscr{T}, X_{\mathscr{D}}), \tag{3.4}$$

où $X_{\mathscr{D}}$ normé, i.e. l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebèsgue avec la puissance "$p$" de la norme et dérivables au sens généralisé.

Le milieu $\mathscr{D}$ est dit libre si on ne met aucunes restrictions sur sa fonction du mouvement (sauf des assumptions sur la regularité). Au cas contraire $\mathscr{D}$ est appelé gêné (par des liaisons).

Nous disons que les liaisons sont bilatérales et holonomes si:

$$f(t, x(t)) = 0, \quad t \in \mathscr{T}, \tag{3.5}$$

pour toute fonction du mouvement $x = x(t)$ de $Y_{\mathscr{D}}$, où:

$$f: \mathscr{T} \times X_{\mathscr{D}} \to X_{\mathscr{D}}, \tag{3.6}$$

est une fonction (donnée) des liasons. Chaque fonction du mouvement vérifiante l'equation (3.5) est dite admissible par des liaisons.

Si $f$ ne dépend pas explicitement de $t$, i.e. $f: X_{\mathscr{D}} \to X_{\mathscr{D}}$, les liaisons s'appellent stationnaires. L'équation des liaisons (3.5) prend donc la forme:

$$f(x(t)) = 0, \quad t \in \mathscr{T}. \tag{3.7}$$

Soit:

$$S(t) = \{x \in X_{\mathscr{D}}; \quad f(t, x) = 0\}, (t \in \mathscr{T}). \tag{3.8}$$

Nous admettons que pour tout $t \in \mathscr{T}$ et tout $x \in S(t)$ il existe un seul sous-espace linéaire $T(t, x)$ de $X_{\mathscr{D}}$ tangent à $S(t)$ au point $x$.

Par example, si $X_{\mathscr{D}}$ est normé et $f$ dérivable par rapport à $x$, alors:

$$T(t,x) = \{u \in X_{\mathscr{D}}: g(t,x)u = 0\}, \tag{3.9}$$

où:

$$g(t,x) = \partial f/\partial x(t,x) \in L(X_{\mathscr{D}}),$$

($L(X_{\mathscr{D}})$ — l'espace des opérateurs bornés sur $X_{\mathscr{D}}$).

En cas des liaisons stationnaires nous avons respectivement:

$$\begin{aligned} S(t) &= S = \ker f = \{x \in X_{\mathscr{D}}, f(x) = 0)\}, \\ T(t,x) &= T(x), \end{aligned} \tag{3.11}$$

particulièrement:

$$T(x) = \{u \in X_{\mathscr{D}}; g(x)u = 0\}, \qquad g(x) = \partial f/\partial x(x) \in L(X_{\mathscr{D}}). \tag{3.12}$$

Soit ensuite:

$$\Psi = \{\psi = (\psi_\lambda); \psi_\lambda \in \Psi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \tag{3.13}$$

l'espace vectoriel des suites (generalisées), où $\Psi_\lambda$ des espaces vectoriels topologiques sur $\mathscr{R}$ (e.g. normés), $\Lambda$ — un ensemble dénombrable (v. (2.1)) et soit $\Psi_{\mathscr{D}}$ un sous-espace linéaire de $\Psi$, muni de la structure d'espace topologique (e.g. normé).

Supposons qu'il existe une application:

$$\pi: \mathscr{T} \times \Psi_{\mathscr{D}} \to X_{\mathscr{D}}, x = \pi(t,\psi), \tag{3.14}$$

injective par rapport à $\psi$ et telle que $x = \pi(t,\psi) \in S(t)\,(t \in \mathscr{T})$ i.e. (v. (3.8)):

$$f\big(t, \pi(t,\psi)\big) = 0, \psi \in \Psi_{\mathscr{D}}, t \in \mathscr{T}. \tag{3.15}$$

L'espace $\Psi_{\mathscr{D}}$ est nommé l'espace de configuration de Lagrange, $\psi$ — la configuration généralisée du milieu denombrable $\mathscr{D}$. Toute fonction:

$$\mathscr{T} \ni t \to \psi(t) \in \Psi_{\mathscr{D}}, \tag{3.16}$$

d'un sous-espace lineaire de l'espace $\Psi_{\mathscr{D}}^{\mathscr{T}}$ est dite la fonction généralisée (de Lagrange) du mouvement de $\mathscr{D}$, si:

$$x = \pi\big(t, \psi(t)\big), t \in \mathscr{T} \tag{3.17}$$

est dans $Y_{\mathscr{D}}$.

Pour les liaisons stationnaires on admet que l'application $\pi$ (v. (3.14)) ne dépend pas explicitement de $t$, i.e:

$$x = \pi(\psi) \in S, \psi \in \Psi_{\mathscr{D}}. \tag{3.18}$$

Analogiquement on peut introduire d'autres notions cinématiques bien connues de la mécanique analitique des systèmes à nombre fini des degrés de liberté.

## 4. Éléments de la dynamique

Il est bien compris que les considérations sur la dynamique des milieux dénombrables il faut commencer par la loi (l'équation) du mouvement. Nous postulons pour que cette loi soit une généralisation de l'équation de Newton.

Au-dessous nous présentons quelques exemples de formes de l'équation du mouvement du milieu dénombrable $\mathscr{D}$. Ce sont des formes qui peuvent-être appelées formellement mathématiquement correctes (admissibles).

(1) Soit $X_{\mathscr{D}}$ l'espace normé de configuration de $\mathscr{D}$, $Y_{\mathscr{D}} = C^2(\mathscr{T}, X_{\mathscr{D}})$ — l'espace des fonctions du mouvement, $M: X_{\mathscr{D}} \to X_{\mathscr{D}}$ une application linéaire (donnée), dite l'opérateur de masse ou d'inertie, $F: \mathscr{T} \times S_x \times S_v \to X_{\mathscr{D}}(S_x, S_v \subset X_{\mathscr{D}})$ — une application (donnée), dite la fonction des forces (actives) agissantes sur $\mathscr{D}$.

Nous postulons que la fonction du mouvement réel de $\mathscr{D}$ (sous l'action des forces) vérifie l'équation, nommée l'équation du mouvement:

$$M\ddot{x}(t) = F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big), \quad t \in \mathscr{T}. \tag{4.1}$$

(2) Soit $X_{\mathscr{D}}$ l'espace normé de configuration de $\mathscr{D}$, $Y_{\mathscr{D}} = C^2(\mathscr{T}. X_{\mathscr{D}})$ — l'espace des fonctions du mouvement, $X'_{\mathscr{D}}$ — l'espace adjoint à $X_{\mathscr{D}}$. Soit ensuite $M': X_{\mathscr{D}} \to X'_{\mathscr{D}}$ une application (donnée), dite l'opérateur d'inertie, $F': \mathscr{T} \times S_x \times S_v \to X'_{\mathscr{D}}(S_x, S_v \subset X_{\mathscr{D}}$ — une application (donnée), dite la fonction des forces actives agissantes sur $\mathscr{D}$, $R': \mathscr{T} \to$ $\to X'_{\mathscr{D}}$ — une application (inconnue), appelée la fonction des réactions des liaisons (de l'équation (3.5)).

Nous postulons l'équation du mouvement du milieu $\mathscr{D}$ dans la forme:

$$M'\ddot{x}(t) = F'\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) + R'(t), \quad t \in \mathscr{T}. \tag{4.2}$$

Admettons aussi que les liaisons sont parfaites, i.e.

$$\langle R'(t), u \rangle = 0, \tag{4.3}$$

pour tout $u \in T(t, x(t))$ et $t \in \mathscr{T}$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit dual les elements de $X'_{\mathscr{D}}$ et de $X_{\mathscr{D}}$.

En substituant $R'(t)$ dans (4.3) par son expression tirée de (4.2) nous obtenons:

$$\langle M'\ddot{x}(t), u \rangle = \langle F'\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big), u \rangle, \quad u \in T\big(t, x(t)\big), t \in \mathscr{T}. \tag{4.4}$$

Remarquons que l'opérateur $M'$ definit uniquement la forme bilinéaire $\mathscr{M}: X_{\mathscr{D}} \times X_{\mathscr{D}} \to$ $\to \mathscr{R}$, dite la forme d'inertie,

$$\mathscr{M}(a, u) = \langle M'a, u \rangle. \tag{4.5}$$

De même $F'$ definit la fonctionnelle $\mathscr{F}: (\mathscr{T} \times S_x \times S_v) \times X_{\mathscr{D}} \to \mathscr{R}$:

$$\mathscr{F}(t, x, v; u) = \langle F'(t, x, v), u \rangle, \tag{4.6}$$

linéaire par rapport à $u$. L'équation (4.4) prends alors la forme:

$$\mathscr{M}\big(\ddot{x}(t), u\big) = \mathscr{F}\big(t, x(t), \dot{x}(t); u\big), \quad u \in T\big(t, x(t)\big), t \in \mathscr{T}. \tag{4.7}$$

(3) Soit $X_{\mathscr{D}}$ l'espace normé de configuration de $\mathscr{D}$, $Y_{\mathscr{D}} = C^2(\mathscr{T}, X_{\mathscr{D}})$ l'espace des fonctions du mouvement et soit $\mathring{l}(X)$ le sous-espace linéaire de $X$ des suites à support fini, i.e.:

$$\mathring{l}(X) = \{x = (x_\alpha) \in X;\ \text{card}\ \{\alpha \in \mathscr{D}; x_\alpha \neq 0\} < \aleph_0\}, \tag{4.8}$$

$\mathring{l}'(X)$ — l'espace linéaire des formes linéaires sur $\mathring{l}(X)$ (à valeurs dans $\mathscr{R}$), $\mathring{X}'$ — un sous-espace linéaire i de $\mathring{l}'(X)$. Par exemple comme $\mathring{X}'$ on peut poser l'espace:

$$X' = \{x' = (x'_\alpha); x'_\alpha \in X'_\alpha, \alpha \in \mathscr{D}\}, \tag{4.9}$$

où $X'_\alpha$ dénote l'espace des formes linéaires sur $X_\alpha$ ($\alpha \in \mathscr{D}$). Le produit dual:

$$\langle x', u\rangle = \sum_{\alpha\in\mathscr{D}} x'_\alpha(u_\alpha), \quad u \in \mathring{l}(X), x' \in X' \tag{4.10}$$

est bien defini sur $\mathring{l}(X)$, alors $x' \in \mathring{l}'(X)$.

Soit ensuite $M': X_\mathscr{D} \to \mathring{X}'$ une application (donnée), dite l'opérateur d'inertie de $\mathscr{D}$, $F': \mathscr{T} \times S_x \times S_v \to X'(S_x, S_v \subset X_\mathscr{D})$ — une application (donnée), dite la fonction des forces actives agissantes sur $\mathscr{D}$.

En cas des liaisons parfaites (de l'equation (3.5)) nous postulons l'équation du mouvement du milieu dénombrable dans la forme:

$$\langle M'\ddot{x}(t), u\rangle = \langle F'(t, x(t), \dot{x}(t)), u\rangle \tag{4.11}$$

pour tout $u \in T(t, x(t)) \cap \mathring{l}(X)$ et $t \in \mathscr{T}$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dénote le produit dual sur $\mathring{l}'(X) \times \times \mathring{l}(X)$.

(4) Soit $X_\mathscr{D}$ l'espace normé de configuration du milieu $\mathscr{D}$, $X'_\mathscr{D}$ — l'espace adjoint à $X_\mathscr{D}$, $Y_\mathscr{D}$ — l'espace des fonctions du mouvement de $\mathscr{D}$.

Soit ensuite $M': X_\mathscr{D} \to X'_\mathscr{D}$ l'opérateur d'inertie de $\mathscr{D}$ et $F': \mathscr{T} \times S_x \to X'_\mathscr{D}$ ($S_x \subset X_\mathscr{D}$) la fonction des forces hypoélastiques agissantes sur $\mathscr{D}$ (les forces dépendantes de vitesse sont exclues des considérations).

Supposons que les integrales au sens de Lebèsgue:

$$\int_0^T \langle M'x(t), \ddot{u}(t)\rangle dt, \quad \int_0^T \langle F'(t, x(t)), u(t)\rangle dt, \tag{4.12}$$

existent pour toutes $x = x(t)$ de $Y_\mathscr{D}$ et admissibles par des liaisons de l'equation (3.5) et $u = u(t)$ de classe $C^2(\mathscr{T}, X_\mathscr{D})$ telles que (v. par. 3):

$$u(0) = u(0) = u(1) = u(1) = 0, \quad u(t) \in T(t, x(t))\,(t \in \mathscr{T}). \tag{4.13}$$

Nous postulons qu'en cas des liaisons parfaites la fonction du mouvement réel vérifie la suivante équation du mouvement:

$$\int_0^T \langle M'\ddot{x}(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \langle F'(t, x(t)), u(t)\rangle dt, \tag{4.14}$$

pour toute $u = u(t)$ vérifiante les conditions nommées au-dessus. Ici $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ dénote la dérivée généralisée (de deuxième ordre) de la fonction $x = x(t)$, i.e. la fonction de l'espace $Y$ telle que:

$$\int_0^T \langle M'\ddot{x}(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \langle M'x(t), \ddot{u}(t)\rangle dt, \tag{4.15}$$

($\langle\cdot,\cdot\rangle$ — le produit dual dans $X'_\mathscr{D} \times X_\mathscr{D}$).

(5) Soit $X_\mathscr{D}$ l'espace de configuration du milieu dénombrables $\mathscr{D}$, $Y_\mathscr{D}$ — l'espace des fonctions du mouvement, $M': X_\mathscr{D} \to \mathring{l}'(X)$ — l'opérateur d'inertie, $F': \mathscr{T} \times S_x \to l'(X)$, ($S_x \subset X_\mathscr{D}$) — la fonction des forces hypoélastiques agissantes sur $\mathscr{D}$, où $\mathring{l}'(X)$ — l'espace des formes linéaires sur $\mathring{l}(X)$ (v. (4.8)).

Supposons que les integrales au sens de Lebèsgue:

$$\int_0^T \langle M'x(t), \ddot{u}(t)\rangle dt, \qquad \int_0^T \langle F'\big(t, x(t)\big), u(t)\rangle dt, \tag{4.16}$$

existent pour toutes $x = x(t)$ de $Y_{\mathscr{D}}$ et admissibles par les liaisons de l'equation (3.5) et pour toutes $u = u(t)$ de classe $C^2(\mathscr{T}, \mathring{l}(X))$ et vérifiantes les conditions (4.13) (sous l'hypothèse que $\mathring{l}(X) \subset X_{\mathscr{D}}$).

Nous postulons l'équation du mouvement (en cas des liaisons parfaites) dans la forme:

$$\int_0^T \langle M'x(t), \ddot{u}(t)\rangle dt = \int_0^T \langle F'\big(t, x(t)\big), u(t)\rangle dt, \tag{4.17}$$

pour toute $u = u(t)$ vérifiante les conditions nommées au-dessus ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit dual dans $\mathring{l}'(X) \times \mathring{l}(X)$).

Les formes de l'équation du mouvement exposées au-dessus ne sont pas uniques, possibles à proposer mais seulement certaines représentatives.

Ayant les notions fondamentalles telles que l'inertie, les forces, l'idéalité des liaisons et la loi du mouvement on peut développer la dynamique des milieux dénombrables, par exemple suivant la dynamique analitique des systèmes à nombre fini des dégrés de liberté. Tel développement n'est pas quand-même le but de ce travail. Il s'agit plutôt de présentation d' une conception de structure mathématique des notions et des relations fondamentales.

## 5. Sur quelques problèmes importants

Au-dessous nous indiquons et brièvement discutons quelques problèmes importants concernant la mécanique des milieux dénombrables. Nous les énonçons à la façon descriptive en omettant des démonstrations précises.

L'un de problèmes fondamentaux, surtout en vue de postulat (3) du par. 1, est l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy. Pour resoudre ce probleme il faut préciser la structure des espaces de configuration et des fonction du mouvement ainsi que les formes des fonctions des liaisons, des forces et de l'operateur d'inertie. Cela est commode et possible après avoir fixé l'objet matériel considéré comme le milieu dénombrable. Il parait qu'en appliquant l'appareil de l'analyse mathématique moderne (e.g. fonctionnelle) et de la théorie des équations différentielles on peut obtenir des resultas positives intéressants.

La forme des notions et des équations présentées aux par 2 - 4 est abstraite. Elle permet écrire compactement des faits de la mécanique des milieux dénombrables et utiliser des théorèmes généraux de l'analyse mathématique. Mais il faut souligner que beaucoup de possibillités particulières pour étudier des problèmes concrets fournit l'appareil des espaces des suites (généralisées) assez bien développé et exposé dans majorité des ouvrages consacrés à l'analyse fonctionnelle.

Si des espaces $X_\alpha$ de configuration des éléments du milieu dénombrable sont arithmétiques ou bien si l'espace de configuration $X_{\mathscr{D}}$ du milieu a une base dénombrable (connue) du type Schauder ou de Hilbert on peut d'habitude exprimer des notions et des équations de la mécanique des milieux dénombrables en language des nombres (en language des suites ou des matrices infinies numériques). Ce fait est très important du point de vue des physiciens et des techniciens.

Si l'espace $X_{\mathscr{D}}$ (normé) est séparable il est possible de construire un appareil d'approximation finidimensionelle pour les milieux dénombrables. Cela dénote qu'on peut trouver effectivement des solutions aprochées (avec l'exactitude arbitraire ou suffisante au sens respectif) de beacoup de problèmes (e.g. de Cauchy). Alors l'analyse quantitative est possible à effectuer à coté de l'analyse qualitative. Il est à noter que d'habitude telle approximation est plus facile et plus naturelle qu'en mécanique des milieux continus. Notamment, elle consiste à la "coupe" de la suite infinie ou du système infini des équations à une suite finie ou à un système fini des equations respectivement.

## 6. Exemples

À tittre d'illustration des considérations contenues aux par. 2 - 5 nous indiquons au-dessous sur deux exemples de systèmes matériels qui peuvent-être traités comme des milieux dénombrables. Ce sont des exemples représentatifs pour deux classes de structures matérielles possibles à modeler à l'aide de tels milieux. Il faut souligner que ce ne sont pas de possibilités uniques de leurs applications.

(1) Systèmes discrets infinis.

Le plus simple exemple de milieu dénombrable possible à imaginer est le système infini des particules matérielles isolées.

Sur la figure 6.1 on a présenté schematiquement quelques exemples de structures unidimensionelles (en état d'equilibre naturel). Les points symbolisent des particules, les ressorts — des interactions entre elles, les tiges rigides — des liaisons intérieures.

Par exemple, pour le systeme de la fig. 6.1(a) on peut poser:

$$\mathscr{D} = \{(p)_i; i \in \mathscr{Z}\}, \qquad x_i \in \mathscr{R}, (i \in \mathscr{Z}), \tag{6.1}$$

ou $\mathscr{Z}$ dénote l'ensemble des entiers, $(p)_i$ — la particule de numero "$i$". Comme $\mathscr{D}$ est equivalent à $\mathscr{Z}$ on peut identifier $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{Z}$. Alors nous avons (v. (2.1)):

$$X = \{(x_i); x_i \in \mathscr{R}, i \in \mathscr{Z}\}, \tag{6.2}$$

ou $x_i$ dénote le déplacement (horizontal) de la particule $(p)_i$.

Les systèmes de la Fig. 6.1 peuvent-être traités comme des modèles approchés de structures "atomiques" des matériaux mais aussi comme des modèles de calcul obtenus des milieux continus infinis après avoir appliqué l'une des méthodes de discretisation, par exemple la méthode des différences finies ou la méthode des elements finis. En ce cas $(p)_i$ sont des noeuds de la discretization.

Les milieux denombrables discutés sont des exemples de milieux physiques (v. par. 2).

(2) Milieux continues.

En mécanique moderne des milieux continus on prend comme les "espaces de configuration" (ici compris comme les espaces des fonctions de déformation $f$: $\Omega \to \mathscr{R}^m$; $\mathscr{R}^n \supset \Omega$ — le domaine d'une configuration de référrence) des sous-espaces linéaires de l'espace

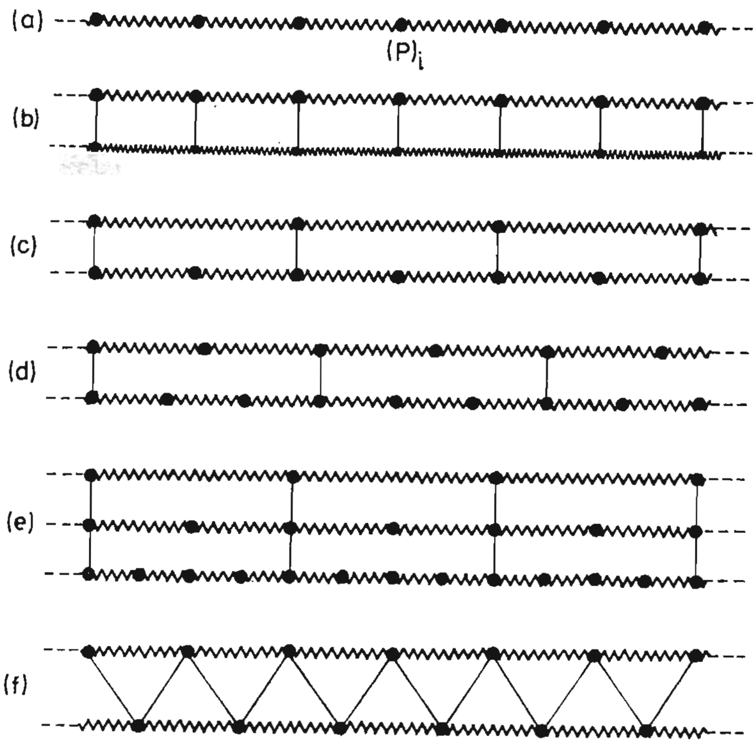


Fig. 6.1.

$L^2(\Omega, \mathscr{R}^m)$ (l'espace des fonctions integrables avec le carré au sens de Lebèsgue), le plus souvent les espaces de Sobolev. Comme ces espaces sont de Hilbert et séparables donc ils existent les bases hilbertiennes.

Soit $\mathscr{D} = \{e_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$ la base de Hilbert pour un milieu continus $\mathscr{C}$. Toute fonction de déformation $f$ s'écrit alors sous la forme de série de Fourier:

$$f = \sum_n x_n e_n, \tag{6.3}$$

ou $(x_n)$ — la suite des coefficients du développement de $f$. Si nous posons (v. (2.1)):

$$X = \{x = (x_n)\} \tag{6.4}$$

nous pouvons traiter formellement $\mathscr{C}$ comme le milieu denombrable $\mathscr{D}$ avec l'espace de configuration:

$$X_{\mathscr{D}} = l^2(X) = \left\{x = (x_n);\ \sum_n |x_n|^2 < \infty\right\}. \tag{6.5}$$

C'est un milieu abstrait (v. par. 2) mais il existe l'application (v. (6.3)):

$$\mathscr{I}(x) = \sum_n x_n e_n, \qquad x = (x_n) \in X_{\mathscr{D}}. \tag{6.6}$$

Ce travail a été préparé dans le cadre du thème "Mécanique des milieux dénombrables. Application des méthodes de l'analyse fonctionnelle" étant une partie du Programme Central des Recherches Fondamentales (CPBP) 02.05 (v. [10]).

**Références**

1. O. LANDORF III, *The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles. I. An existence theorem*, Comm. in Math. Phys., vol. 9, (1968), no 3, p. 176 - 191.
2. R. DOBRUSHIN, J. FRITZ, *Non-equilibrium dynamics of one-dimensional infinite particle systems with hard-core interaction*, Comm. in Math. Phys., vol. 55, (1977), no 3, p. 275 - 292.
3. J. FRITZ, *Some remarks on non-equilibrium dynamics if infinite particle system*, J. of Stat. Phys., vol. 34, (1984), no 3, p. 539 - 556.
4. P. MALYCHEV, *Description mathématique de l'évolution des systèmes classiques infinis (en russe)*, Phys. Math. et Stat., vol. 44, (1980), no 1, p. 63 - 75.
5. H. YOGUCHI, *Construction of one-dimensional dynamical systems of infinitely many particles with nearest neighbor interaction*, Hiroshima Math. J., vol. 11, (1981), p. 255 - 273.
6. P. R. CHERNOFF, J. E. MARDSEN, *Properties of infinite Dimensional Hamiltonian Systems*, Lectures Notes in Math., vo.. 425, Springer-Uerlag, Berlin—Heidelberg—New York 1974.
7. F. HARTMAN, *The mathematical foundations of structural mecanics*, Springer-Uerlag, Berlin—Heidelberg—New York 1985.
8. YA. SINAĬ, *Construction de la dynamique des systèmes unidimensionnels de la mécanique statistique (en russe)*, Phys. Math. et Stat., vol. 11, (1972), no 2, p. 93 - 118.
9. J. SZCZEPAŃSKI, *Équation de Liouville dans l'espace de Hilbert séparable et de dimension finie (en polonais)* Diss., IPPT PAN, Varsovie 1984.
10. R. NAGÓRSKI, P. WIŚNIAKOWSKI, *Mécanique des milieux dénombrables. Application des méthodes de l'analyse fonctionelle*, Rapports CPBP 02.05, Thème 02.03.01, École Polytechnique Supériere de Varsovie, Institut de la Mécanique des Constructions, Varsovie, partie I — 1986, partie II — 1987.

Streszczenie

O PEWNEJ KONCEPCJI MECHANIKI OŚRODKÓW PRZELICZALNYCH

Praca zawiera przedstawienie pewnej koncepcji mechaniki ośrodków przeliczalnych, tj. układów materialnych, których konfiguracje mogą być określone za pomocą ciągów (uogólnionych) czyli przeliczalnych zbiorów parametrów. Po omówieniu genezy tematu i przyjęciu ogólnych założeń (klasycznej mechaniki deterministycznej i fenomenologicznej) podano definicje ośrodka przeliczalnego i przestrzeni konfiguracji. Następnie przedstawiono podstawowe pojęcia i równania kinematyki i dynamiki ośrodków przeliczalnych jako pewne uogólnienia pojęć i równań mechaniki analitycznej układów o skończonej liczbie stopni swobody. Poruszono też kilka ważnych zagadnień szczególnych. Rozważania kończą dwa przykłady klas ośrodków przeliczalnych.

Summary

ON A CONCEPT OF COUNTABLE MEDIA MECHANICS

The paper contains a concept of mechanics of countable media, i.e. of material systems which configurations may be determined by means sequences (generalized). After presentation the genesis of the topic and the general assumptions (of the classical deterministic and phenomenological mecanics) the notions of countable medium and configuration space is defined. Next the basic notions and equations of countable media kinematics and dynamics are presented as a generalization of the notions and equations of analytical mechanics of the systems of finite number degrees of freedom. Some important problems are also discussed. Two examples of classes of countable media close the cosiderations.

*Praca wplynęła do Redakcji dnia 5 listopada 1987 roku*