MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 27, (1989)

O ROLI MATEMATYKI W NAUKACH TECHNICZNYCH

CZESŁAW WOŹNIAK

Uniwersytet Warszawski

1. Matematyka a nauki techniczne

Celem pracy jest próba krytycznego spojrzenia na rolę współczesnej matematyki w formułowaniu teoretycznych podstaw nauk technicznych. Stale wzrastający stopień integracji pewnych dyscyplin technicznych, nauk ścisłych i niektórych gałęzi matematyki jest konsekwencją faktu, że „dzisiejsza technika w coraz większym stopniu staje się nauką a coraz mniej sztuką i, że uczestniczenie w tym procesie wymaga lepszych podstaw matematycznych", [1], s. 11. Integracja ta dotyczy nie tylko podstawowych nauk technicznych tradycyjnie związanych z matematyką (jak np. mechanika, elektrodynamika lub termodynamika) lecz także nowych dyscyplin (jak np. sztuczna inteligencja). Wyrazem współdziałania matematyki i nauk technicznych jest powstanie dziedzin matematyki przeznaczonych dla potrzeb nauk technicznych (teorie sterowania, optymalizacji czy też analiza statystyczna danych doświadczalnych). Spojrzenie inżyniera na matematykę ma na ogół charakter utylitarny a matematyka w naukach technicznych jest najczęściej jedynie środkiem prowadzącym do rozwiązania problemu technicznego. Uzyskanie takiego rozwiązania jednakże często wymaga dysponowania teorią (w ramach której problem da się w sposób poprawny sformułować) oraz algorytmem, który doprowadzi do poszukiwanych wyników. Tym samym, matematyka ingeruje w nauki techniczne co najmniej na czterech poziomach, a mianowicie przy: (1) tworzeniu teorii, (2) formułowaniu problemu w ramach teorii, (3) badaniu matematycznej poprawności sformułowanego problemu, (4) algorytmizacji problemu i wykonaniu działań prowadzących do wyniku. Podział ten odpowiada w pewnym stopniu podziałowi zaproponowanemu w [2]. Problematyka związana z (2), (3) i (4) dotyczy przede wszystkim stosowania metod matematycznych (w szczególności numerycznych) oraz maszyn cyfrowych w naukach technicznych i jest omawiana w wielu podręcznikach i monografiach. W związku z tym ograniczymy się dalej do dyskusji nad (1), tj. nad udziałem matematyki w tworzeniu teorii. Uwagę zwrócimy, między innymi, na nieadekwatność teorii matematycznych do rzeczywistych bądź projektowanych przedmiotów i procesów opisywanych przez te teorie, a także na pewne próby przezwyciężania tej

---

Artykuł jest rozszerzoną wersją wykładu wygłoszonego przez autora w Politechnice Łódzkiej z okazji nadania doktoratu honorowego (redakcja).

nieadekwatności. Dla uproszczenia nazewnictwa, przedmioty i procesy (już istniejące bądź dające się zrealizować), które są tematem rozważań nauk technicznych, będziemy nazywać obiektami fizycznymi.

2. Matematyka a formułowanie teorii

Podstawą formułowania teorii mających znaczenie w naukach technicznych jest zwykle: (1) obserwacja i eksperyment, (2) wyniki nauk ścisłych, (3) hipotezy heurystyczne, (4) abstrakcja i rozumowanie dedukcyjne i (5) przewidywana przydatność rezultatów nie tylko do opisu i wyjaśniania zjawisk lecz także do tworzenia nowych obiektów lub procesów w technice. Z ingerencją matematyki spotykamy się mając do czynienia z (2), (3) a zwłaszcza z (4); są to bowiem te etapy formułowania teorii, w których inżynier musi myśleć matematycznie. Z uwagi na ogólność rozważań nie będą nas interesować dalej poszczególne metody matematyczne lecz tylko przedmiot rozważań samej matematyki. Nie wnikając w szczegóły, przedmiot matematyki współczesnej będziemy opisywać za pomocą pojęcia systemu relacyjnego: wykorzystać moglibyśmy także pojęcie dziedziny matematycznej, [3], s. 7, lub uniwersum, [4], s. 15. Systemem relacyjnym nazywamy parę (X, T), gdzie X jest zbiorem tzw. elementów indywiduowych oraz T jest pewnym niepustym zbiorem relacji, które można utworzyć z elementów indywiduowych. O elementach indywiduowych zakładamy jedynie, że nie są one zbiorami. Poza tym założeniem, z formalnego punktu widzenia, nic o elementach indywiduowych nie wiemy. Jest to zgodne z aforyzmem B. Russela, że „matematyka jest dziedziną, w której nie wiemy o czym mówimy", por. np. [4] s. 12. Zbiór T może zawierać relacje między elementami indywiduowymi, między elementami indywiduowymi a relacjami, między relacjami a relacjami, między zbiorami relacji, między zbiorami zbiorów relacji itd. Relacje są tu rozumiane jako relacje m-członowe, gdzie $m = 1, 2, 3...$ (w przypadku $m = 1$ mamy do czynienia ze zbiorami); ścisłe określenie systemu relacyjnego można znaleźć np. w [5], s. 21. Elementy indywiduowe są zwane relacjami typu 0, w związku z czym dowolny element systemu relacyjnego będziemy dalej nazywać relacją.

Formułowanie podstaw matematycznych teorii przydatnej do rozwiązywania problemów techniki, sprowadza się do konstrukcji pewnego systemu relacyjnego (X, T). Elementami indywiduowymi (tworzącymi zbiór X) są z reguły liczby rzeczywiste oraz obiekty nie będące zbiorami, jak np. zdarzenia, punkty przestrzenne, punkty materialne etc. Korzystając z rezultatów nauk ścisłych, wprowadzając pojęcia fenomenologiczne i hipotezy heurystyczne od razu w postaci relacji, tworzymy zbiór T. Czynność ta wymaga nie tylko umiejętności w posługiwaniu się abstrakcją i rozumowaniem dedukcyjnym, lecz także głębokiej znajomości zjawisk i sytuacji fizycznych, właściwego uogólniania wyników obserwacji i eksperymentu oraz zdolności przewidywania procesów i obiektów, które teoria ma opisywać. Przy tworzeniu systemu relacyjnego z reguły korzystamy z pojęć znanych w matematyce, posługując się pochodną, całką, przestrzenią liniową, przestrzenią topologiczną itp. Formułowanie podstaw matematycznych nowej teorii to często uogólnianie, specjalizacja bądź modyfikacja teorii istniejącej, a więc zastąpienie znanego systemu relacyjnego nowym systemem. Tworząc teorie mające znaczenie dla nauk technicznych stawiamy dodatkowo wymaganie, by systemy relacyjne będące podstawą tych teorii były przydatne do formułowania i rozwiązywania problemów mających znaczenie w technice. W dalszym ciągu pracy, dla uproszczenia nazewnictwa, teorię będziemy utożsamiać z pewnym systemem relacyjnym utworzonym celem matematycznego opisu obiektów, zjawisk bądź procesów mających znaczenie w podstawowych naukach technicznych. Słowo „teoria" odpowiada w tym kontekście terminowi „model matematyczny", gdyż zwykle pod nazwą „teoria" rozumiemy nie tylko sam system relacyjny (stanowiący w istocie podstawę matematyczną teorii), lecz także wszystko to, co z systemu tego można otrzymać drogą dedukcji (twierdzenia teorii).

3. Przykład teorii jako systemu relacyjnego

Przedstawiony powyżej ogólny schemat formułowania podstaw matematycznych teorii jako systemu relacyjnego zilustrujemy przykładem systemu, reprezentującego podstawy mechaniki Newtona. Ograniczymy się do mechaniki swobodnych i izolowanych układów punktów materialnych o wyłącznie dwupunktowych oddziaływaniach. W tym celu jako zbiór X elementów indywiduowych przyjmiemy sumę teoriomnogościową $X = R \cup E \cup V \cup \cup M \cup F$, gdzie R jest zbiorem liczb rzeczywistych oraz [6, 7]:

1° E jest czterowymiarową elementarną rozmaitością różniczkową zwaną przestrzenią zdarzeń,

2° V jest czterowymiarową przestrzenią wektorową, której elementy nazywamy translacjami czasoprzestrzennymi,

3° $M = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ jest zbiorem przeliczalnym, którego skończone podzbiory $U = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, nazwiemy układami punktów lub krótko układami,

4° F jest trójwymiarową przestrzenią wektorową, której elementy nazwiemy siłami.

Zbiory X, R, E, V, M, F są 1-członowymi relacjami (jako podzbiory zbioru X); dodatkową relacją 1-członową jest:

5° podzbiór S zbioru V, $S \subset V$, stanowiący trójwymiarową przestrzeń wektorową translacji czysto przestrzennych.

Jako relacje wieloczłonowe wprowadzamy:

1° relację funkcyjną $g: E \times V \to E$, taką, że V działa w E jako abelowa grupa translacji, tranzytywnie i swobodnie. Podzbiory $E_p \equiv p + S$ dla każdego $p \in E$ są przestrzeniami zdarzeń równoczesnych ze zdarzeniem p.

2° formę liniową $\tau: V \to R$, spełniającą warunek $\operatorname{Ker} \tau = S$ (tj. $\tau(u) = 0$ dla każdego $u \in S$, $S \subset V$), którą nazywamy formą czasową; liczba $\tau(p-q)$ jest odległością czasową zdarzeń $p, q \in E$ wyrażoną w sekundach,

3° iloczyn skalarowy $h: S \times S \to R$ taki, że liczba $\varrho(x, y) \equiv \sqrt{h(x-y, x-y)}$ jest odległością przestrzenną zdarzeń równoczesnych $x, y \in E_p$ wyrażoną w metrach,

4° iloczyn skalarowy $k: F \times F \to R$ taki, że liczba $\sqrt{k(f, f)}$ jest wielkością siły f wyrażoną w niutonach.

Jako relacje wyższego rzędu wprowadzamy następujące zbiory relacji:

1° Dla każdego układu $U = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, zbiór wszystkich relacji funkcyjnych postaci:

$$\mu: U \ni P \to \mu(P) \in R_+, \tag{1}$$

które nazwiemy rozkładami masy w układzie U. Każdą parę (U, μ), w której U jest dziedziną funkcji μ, nazwiemy układem materialnym. Liczba $\mu(P)$, $p \in U$, jest masą punktu P układu materialnego (U, μ), wyrażoną w kilogramach.

2° Dla każdego układu $U = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, zbiór wszystkich relacji funkcyjnych postaci (symbol $[U \times U]$ oznacza zbiór wszystkich takich par $(P, Q) \in U \times U$, dla których $P \neq Q$):

$$\varphi: [U \times U] \times R_+ \ni (P, Q, \varrho) \to \varphi(P, Q, \varrho) \in R, \tag{2}$$

które nazwiemy rozkładami oddziaływań w układzie U. Zakładamy, że $\varphi(P, Q, \varrho) = \varphi(Q, P, \varrho)$ dla każdego ϱ, P, Q oraz, że $\varphi(P, Q, \cdot)$ są dla każdego $(P, Q) \in [U \times U]$ funkcjami ciągłymi. Każdą parę (U, φ), w której φ jest określone na $[U \times U] \times R_+$, nazwiemy ciałem. Liczba $\varphi(P, Q, \varrho)$ jest wartością oddziaływania między punktami P, Q ciała (U, φ), odległymi o ϱ, wyrażoną w niutonach.

W dalszym ciągu każdą trójkę (U, μ, φ), dla której (U, μ) jest układem materialnym a (U, φ) jest ciałem, będziemy nazywać ciałem materialnym. Niech ponadto wskaźniki k, l przebiegają ciąg 1, 2, 3 (obowiązywać będzie umowa sumacyjna względem tych wskaźników) oraz niech $t_0, t_1 \in R$, $p_0 \in E$, $e_0 \in V \setminus S$, $e_k \in S$, $a_k \in F$ będą wybranymi elementami odpowiednich zbiorów, takimi, że $t_0 < t_1$, $\tau(e_0) = 1$, $h(e_k, e_l) = \delta_{kl}$, $k(a_k, a_l) = \delta_{kl}$. Wprowadzimy następnie:

3° Dla każdego ciała materialnego (U, μ, φ) zbiór wszystkich relacji funkcyjnych postaci:

$$\begin{aligned} &U \times [t_0, t_1] \ni (P, t) \to p_0 + t e_0 + r^k(P, t) e_k \in E, \\ &U \times [t_0, t_1] \ni (P, t) \to f^k(P, t) a_k \in F, \end{aligned} \tag{3}$$

w których $r^k(P, \cdot)$, $f^k(P, \cdot)$, $P \in U$ są funkcjami ciągłymi w $[t_0, t_1]$, funkcje $r^k(P, \cdot)$, $P \in U$ mają ponadto ciągłe pierwsze i drugie pochodne w $[t_0, t_1]$, oraz spełniają warunek:

$$\mu(P) \frac{d^2 r^k(P, t)}{dt^2} = f^k(P, t), \qquad t \in (t_0, t_1), \qquad P \in U, \tag{4}$$

i warunek:

$$f^k(P, t) = \\ = \sum_{Q \in U \setminus P} \varphi\left(P, Q, \sqrt{(r^l(P, t) - r_l(Q, t))(r^l(P, t) - r_l(Q, t))}\right) \frac{r^k(P, t) - r^k(Q, t)}{\sqrt{(r^l(P, t) - r_l(Q, t))(r^l(P, t) - r_l(Q, t))}} \tag{5}$$

Każdą parę odwzorowań (3) spełniającą warunki (4) i (5) nazwiemy fizycznie dopuszczalną ewolucją ciała materialnego (U, μ, φ). Wektory $r^k(P, t) e_k$ i $f^k(P, t) a_k$ są położeniem punktu P i wypadkową siłą działającą na ten punkt w chwili t. Reper $(p_0; e_0, e_1, e_2, e_3)$ dla którego pierwsze z odwzorowań (3) spełnia warunki (4) i (5) (po wyrugowaniu $f^k(P, t)$) jest reperem inercjalnym a bazę (a_1, a_2, a_3) w przestrzeni F nazwiemy zgodną z tym reperem.

Zbiór złożony z relacji 1-członowych X, E, V, M, F, S, R, z relacji funkcyjnych τ, g, h, k, oraz ze zbiorów wszystkich relacji funkcyjnych postaci (1), (2) i zbiorów takich relacji postaci (3) spełniających warunki (4) i (5), jest zbiorem T w systemie relacyjnym (X, T), reprezentującym podstawy mechaniki Newtona izolowanych, swobodnych układów punktów materialnych o dwupunktowych oddziaływaniach. Widoczne są tu pojęcia pierwotne mechaniki (jako elementy indywiduowe), struktura czasoprzestrzeni Galileusza, powiązanie mechaniki z jednostkami miary oraz aksjomaty (prawa) mechaniki Newtona. W zastosowaniach teorii korzystamy najczęściej z równań (4) i (5), traktując (1) i (2) w każdym przypadku jako znane; niemniej jednak podstawy matematyczne reprezentuje tu system (X, T).

W podanym tutaj przykładzie formułowania podstaw teorii jako systemu relacyjnego warto zauważyć, że „już same pojęcia fizyczne są podane od początku w matematycznej postaci a matematyka służy do formułowania teorii", [8], s. 17.

4. Teoria jako opis obiektów fizycznych

Niech system relacyjny (X, T) reprezentuje podstawy matematyczne pewnej teorii przydatnej do formułowania, badania i rozwiązywania poblemów o znaczeniu technicznym (przykład takiego systemu podano w poprzednim rozdziale). System (X, T) można traktować formalnie, tj. jako pewną dziedzinę matematyki, która tym samym może być badana metodami matematycznymi, niezależnie od sensu fizycznego występujących tam relacji. Jednakże dla inżyniera zasadnicze znaczenie mają: (1) fizyczna interpretacja teorii, tj. związek występujących w niej relacji z obiektami fizycznymi, (2) przydatność teorii do rozwiązywania problemów w ramach nauk technicznych, (3) zakres fizycznej stosowalności teorii. W drugim znaczeniu matematyka jest tylko „narzędziem do rozwiązywania zadań", [8] s. 106, którym się dalej nie będziemy zajmować. Matematyka nie odgrywa też praktycznie istotnej roli w ustalaniu zakresu fizycznej stosowalności teorii. Interesować nas tu będzie natomiast fizyczna interpretacja teorii jako związek między relacjami teorii a obiektami fizycznymi, które teoria ma przedstawiać. Jest to więc związek między opisem pewnego obiektu fizycznego w ramach teorii (którą dla uproszczenia utożsamiliśmy poprzednio z systemem relacyjnym (X, T)) a samym obiektem fizycznym. Do opisu obiektu fizycznego należy zaliczyć także te wszystkie informacje o nim, które można otrzymać z systemu relacyjnego drogą dedukcji jako pewne twierdzenia matematyczne.

Każdy opis, a więc i opis obiektów fizycznych w ramach pewnej teorii, może być określony bądź wieloznaczny, [9], s. 245. Łatwo zauważyć, że:

1° Opisy matematyczne obiektów fizycznych są z reguły wieloznaczne, tj. teorie nie opisują wyłącznie tych obiektów fizycznych, które stanowią przedmiot naszego zainteresowania, lecz także inne obiekty fizyczne; na przykład równanie różniczkowe Poissona opisuje wiele zupełnie różnych sytuacji fizycznych.

2° Nie wszystkie relacje w ramach danej teorii mają interpretację fizyczną, tj. stanowią opis pewnego obiektu fizycznego zarówno w sensie aktualnym (jako istniejącego przedmiotu bądź procesu) jak i potencjalnym (jako przedmiotu bądź procesu, który może zostać zrealizowany). Widać to wyraźnie na przykładzie systemu relacyjnego podanego w poprzednim rozdziale; żadnych obiektów fizycznych nie opisują np. układy materialne (U, μ), których punkty mają masę rzędu masy elektronu lub wszechświata. Mówiąc ogólnie, teorie służące do opisu obiektów fizycznych opisują nie tylko te obiekty, lecz także pewne „obiekty niefizyczne". Teorie takie możemy nazwać niekategorycznymi.

Ponieważ dla inżyniera pierwotny jest obiekt fizyczny a teoria ma charakter wtórny, przeto wieloznaczność teorii nie odgrywa istotnej roli w jej zastosowaniach. Niekategoryczność teorii implikuje natomiast konieczność określenia zakresu stosowalności teorii. Jest to problem bardzo złożony (nie będziemy go tu omawiać), gdyż z reguły zakres ten ma „rozmytą" strukturę i jest trudny do ścisłego sprecyzowania. Bardziej ciekawe od wymienionych powyżej wydaje się jednak spostrzeżenie, że:

3° Formułując teorię opisującą obiekty fizyczne włączamy do ich opisu cechy nie mające uzasadnienia empirycznego, takie jak np. ciągłość lub gładkość. Źródłem tego rodzaju niefizycznych cech jest fakt, że prawie wszystkie teorie (systemy relacyjne) mające znaczenie w naukach technicznych korzystają z pojęcia zbioru nieskończonego. Jednocześnie nie mamy żadnego uzasadnienia empirycznego, że np. „przestrzeń i czas ciągną się w nieskończoność... w tym znaczeniu, w jakim przestrzeń i czas są faktami fizycznymi, nie zaś fikcjami matematycznymi" a ponadto „Świat, w którym wszelki ruch składałby się z ciągu małych skończonych drgnień, byłby empirycznie nieodróżnialny od świata, w którym ruch byłby ciągły", [9], s. 207. Tym samym mamy do czynienia z pewną nieadekwatnością struktur matematycznych teorii stosowanych w naukach technicznych (a także w wielu naukach przyrodniczych) do obiektów fizycznych, opisywanych tymi teoriami.

Wymienione powyżej spostrzeżenia prowadzą do konkluzji, że aparat matematyczny stanowiący narzędzie wielu dyscyplin technicznych wyprowadza nas często poza fizyczną treść rozpatrywanej klasy problemów. Fakt ten nie jest istotny dla inżyniera-matematyka, zajmującego się wyłącznie badaniem matematycznych konsekwencji samego systemu relacyjnego (formułowaniem twierdzeń teorii). Taki czysto matematyczny kierunek badań podstawowych w ramach nauk technicznych jest intensywnie rozwijany i pełni ważną rolę w tych badaniach, między innymi dostarczając informacji o matematycznej poprawności problemów formułowanych w ramach teorii. Warto jednak zaznaczyć, że badanie środkami czysto matematycznymi pewnego systemu relacyjnego jako podstaw teorii opisującej obiekty fizyczne, może nam często dostarczyć informacji nie tyle o samych obiektach fizycznych jak o aparacie matematycznym teorii, opisującym te obiekty. Nieadekwatność teorii do opisywanych przez nią obiektów fizycznych nie jest z reguły zauważana przez inżynierów, dla których teoria jest jedynie punktem wyjścia do otrzymywania efektywnych rezultatów (zwłaszcza ilościowych) o znaczeniu aplikacyjnym. Rezultaty takie są często weryfikowalne doświadczalnie i zgodne z intuicją oraz wynikami otrzymanymi na innych drogach, co świadczy o ich wiarygodności. Problem adekwatności o którym mówimy jest jednakże dosyć istotny na poziomie formułowania nowych teorii. Wskazuje on bowiem na celowość zbliżania matematycznej formy i fizycznej treści teorii. Wydaje się, że niezależnie od celowości możliwie dokładnego określania zakresu stosowalności teorii (co jest konsekwencją niekategoryczności teorii), zbliżenia tego można dokonać na dwóch drogach, a mianowicie przez, [10]:

1° Wprowadzanie do rozważań aparatu matematycznego „bardziej adekwatnego" do opisu obiektów fizycznych niż aparat dotychczas stosowany, w którym mamy do czynienia z aksjomatem nieskończoności („istnieje przynajmniej jeden zbiór mający nieskończenie wiele elementów").

2° Zastąpienie danej teorii pewną teorią „dokładniejszą", w ramach której relacje mają bardziej jasną interpretację fizyczną, tj. lepiej opisują obiekty fizyczne będące przedmiotem rozważań.

Drugie z wymienionych podejść nie wprowadza niczego nowego do dyskusji będącej tematem rozprawy; ograniczymy się tu tylko do uwagi, że teorie „dokładniejsze" bądź „bardziej podstawowe" są na ogół w naukach technicznych mniej przydatne do formułowania i rozwiązywania problemów z uwagi na ich złożoność matematyczną. W następnym rozdziale omówimy natomiast możliwości formułowania teorii „bardziej adekwatnych" do obiektów fizycznych opisywanych przez te teorie. Możliwości te polegają na wykorzystaniu aparatu alternatywnej teorii mnogości, [11], lub analizy niestandardowej, [4, 5], a formułowane na tej podstawie teorie nazwiemy opisami alternatywnymi.

5. Opisy alternatywne

Propozycja opisów alternatywnych jest próbą formułowania podstaw teoretycznych niektórych dyscyplin technicznych przy wykorzystaniu aparatu matematycznego umożliwiającego rezygnację z aksjomatu istnienia zbioru nieskończonego. Teoria mnogości wraz z aksjomatem nieskończoności, stanowiąca podstawę współczesnej matematyki, wprowadza bowiem do rozważań „całą skalę przypadków szczególnych nieskończoności aktualnej... z których większość nie znajduje sensownej interpretacji w rzeczywistym świecie". Ponadto „matematyka współczesna bada struktury, których związek z rzeczywistym światem jest co najmniej problematyczny" a tym samym matematyka ta „może być zdegradowana do zwykłej gry realizowanej w pewnym sztucznym świecie". Cytowane tu za [11] stwierdzenia (można je traktować jako sugestię, że matematyka nie jest nauką lecz sztuką) stały się motywacją przeformułowania matematyki przez przebudowę jej podstaw i zastąpieniu teorii mnogości przez tzw. alternatywną teorię mnogości, [11]. Alternatywna teoria mnogości jest pewną propozycją budowy matematyki na fenomenologicznych podstawach. Tym samym można postawić pytanie w jakim stopniu idee alternatywnej teorii mnogości mogą usunąć dyskutowaną powyżej nieadekwatność struktur matematycznych do obiektów fizycznych opisywanych tymi strukturami.

W alternatywnej teorii mnogości wszystkie zbiory są skończone w tym sensie, że można je przedstawić np. w postaci $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Jednakże wskaźnik n, oznaczający moc zbioru Z, nie musi być żadną znaną nam liczbą naturalną. Tym samym w alternatywnej teorii mnogości istnieją zbiory, które będąc z definicji zawsze skończone, zawierają jednakże „niepoliczalnie dużo" elementów. Celem ich określenia wprowadza się pojęcie semizbioru; S jest semizbiorem gdy istnieje zbiór Z taki, że $S \subset Z$. Tak więc każdy zbiór jest pewnym semizbiorem. Aksjomat nieskończoności jest w alternatywnej teorii mnogości zastąpiony aksjomatem istnienia właściwego semizbioru, tj. semizbioru nie będącego zbiorem. Tym samym zbiory zawierające „niepoliczalnie dużo" elementów to takie zbiory Z, że $S \subset Z$ dla pewnego właściwego semizbioru S. Konsekwencją tego aksjomatu jest istnienie liczb naturalnych nieskończenie wielkich, których odwrotności są liczbami dodatnimi nieskończenie małymi. Ścisły wykład alternatywnej teorii mnogości oraz omówienie pewnych struktur matematycznych zbudowanych na jej podstawie można znaleźć w cytowanej już pracy [11]. Pewną próbę zastosowania tych struktur do formułowania teorii opisujących obiekty fizyczne podano w [12], gdzie, między innymi, pokazano jak można formułować mechanikę Newtona bez wprowadzania pojęcia ciągłości i pochodnej.

Struktury matematyczne podobne do tych, które wynikają z alternatywnej teorii mnogości, można także otrzymać w ramach analizy niestandardowej, [5]. Podstawą analizy niestandardowej jest matematyczny fakt, że dla każdego zupełnego systemu relacyjnego $M = (X, \bar{T})$ tj. systemu w którym $\bar{T}$ zawiera wszystkie relacje, które można utworzyć z elementów indywiduowych (żądamy jedynie, by były to relacje określonego typu, por. [5]), istnieje system relacyjny $^*M = (^*X, ^*\bar{T})$ (nie zupełny) będący tzw. powiększeniem systemu M. Oznacza to, że każdej relacji ϱ w M odpowiada dokładnie jedna relacja $^*\varrho$ w $^*M$, zwana relacją standardową. Ponadto gdy ϱ jest zbiorem nieskończonym, to zbiór $^*\varrho$ zawiera także elementy, które nie są standardowe. Przyjmując np. $X = R$, gdzie R jest zbiorem liczb rzeczywistych, otrzymamy $^*X = {}^*R$, przy czym zbiór $^*R$ (zwany też zbiorem liczb hyperrzeczywistych), z uwagi na nieskończoność zbioru R, zawiera także liczby rzeczywiste niestandardowe. Liczbami takimi są, między innymi, liczby naturalne nieskończenie wielkie, które pojawiają się także w matematyce formułowanej na podstawie alternatywnej teorii mnogości. Ponadto każde matematyczne stwierdzenie (dające się wyrazić w pewnym formalnym języku opisującym M i $^*M$), które dotyczy M i jest prawdziwe, dotyczy także $^*M$ i także jest prawdziwe dla $^*M$. Tym samym np. wszystkie stwierdzenia dotyczące liczb rzeczywistych dotyczą także liczb hyperrzeczywistych. Jeżeli system relacyjny (nie zupełny) (X, T) jest podstawą pewnej teorii opisującej obiekty fizyczne, to zanurzając go w zupełnym systemie relacyjnym $M = (X, \bar{T})$, $T \subset \bar{T}$, a następnie przechodząc do powiększenia $^*M = (^*X, ^*\bar{T})$ systemu $M = (X, T)$, otrzymujemy tzw. niestandardowy model rozważanej teorii. Na tej drodze możemy otrzymać np. niestandardowy model mechaniki Newtona, w ramach którego prócz skończonych układów punktów o skończonych masach możemy także rozważać układy, w których liczba punktów jest nieskończenie duża lecz masa układu pozostaje skończona, gdyż masy poszczególnych punktów materialnych mogą być nieskończenie małe, [7]. Podejście takie umożliwia opis matematyczny nowych sytuacji fizycznych w ramach mechaniki Newtona oraz zbliża matematyczną formę i fizyczną treść teorii.

Alternatywne opisy obiektów fizycznych pozwalają na częściowe usunięcie dyskutowanych nieadekwatności teorii do opisywanych przez te teorie obiektów fizycznych. W szczególności przegląd różnych zastosowań analizy niestandardowej do mechaniki podano w [13]. Inne podejście do formułowania teorii podano w [14], gdzie pojęcia granicy i ciągłości zastąpiono pewnymi pojęciami nie wymagającymi korzystania z aksjomatu istnienia zbioru nieskończonego.

6. Uwagi końcowe

Zawarte w tej pracy spostrzeżenia, wnioski i komentarze nie mają oczywiście praktycznego znaczenia dla inżyniera posługującego się matematyką jako narzędziem służącym do rozwiązywania zadań. Celem opracowania było natomiast zwrócenie uwagi na pewne niejasności i zapytania, które powstają w sposób naturalny, gdy nieco krytyczniej staramy się patrzeć na rolę jaką pełni matematyka w formułowaniu teorii przydatnych do nauk technicznych. Na uwagę zasługują problemy wieloznaczności, niekategoryczności a zwłaszcza nieadekwatności struktur matematycznych do opisywanych przez te struktury rzeczywistych bądź projektowanych obiektów i procesów. Formułowanie teorii alternatywnych może wprawdzie prowadzić do opisów bardziej adekwatnych, bliższych rzeczywistości, lecz może także zmniejszyć przydatność aplikacyjną teorii, odgrywającą zasadniczą rolę w zastosowaniach matematyki do nauk technicznych. Sytuacja taka ma miejsce gdy np. mechanikę Newtona formułujemy w ramach struktur matematycznych wynikających z alternatywnej teorii mnogości, [12], co z danej strony zbliża matematykę do fizyki lecz także wymaga rezygnacji ze znanych efektywnych metod rachunku różniczkowego i całkowego przy rozwiązywaniu poszczególnych problemów. Jest jednakże prawdopodobne, że stale rozwijające się tendencje do coraz to większej „komputeryzacji" nauk technicznych mogą wpłynąć w przyszłości także i na rozwój alternatywnych sposobów matematycznego opisu obiektów i procesów będących przedmiotem rozważań podstawowych nauk technicznych.

Literatura

1. R. Weller, *Nowoczesna matematyka dla inżynierów*, red. E. F. Beckenbach, PWN Warszawa, 1962.
2. D. Marr, T. Poggio, *From understanding computation to understanding neural circuity*, w: Neuronal Mechanisms in Visual Perception, red. E. Poppel et al., Neurosciences Research Program Bulletin 15, 1957, 470—488.
3. A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, PWN Warszawa, 1975.
4. M. Davies, *Applied nonstandard analysis*, J. Wiley and Sons, New York, 1977.
5. A. Robinson, *Nonstandard analysis*, North Holl. Publ. Comp. Amer. Elsevier Publ. Comp., Amsterdam—London—New York, 1974.
6. A. Trautman, Teoria względności, Ossolineum Wrocław, 1971.
7. Cz. Woźniak, *Analiza niestandardowa w mechanice newtonowskiej punktu materialnego*, Mech. Teor. i Stos., 19, 1981, 355—374.
8. C. Truesdell, *Sześć wykładów nowoczesnej filozofii przyrody*, PWN Warszawa, 1969.
9. B. Russel, *Wstęp do filozofii matematyki*, PWN Warszawa, 1958.
10. Cz. Woźniak, *Matematyka a fizyczne treści mechaniki*, Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, Budownictwo z. 60, Gliwice, 1985, 221—227.
11. P. Vopěnka, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig 1979.
12. W. Nagórko, Cz. Woźniak, *Mathematics in the alternative set theory as a tool of Newtonian mechanics*, Arch. Mech., 38, 1986, 359—402.
13. Cz. Woźniak, *Nonstandard analysis in mechanics*, Adv. in Mech., 9, 1986, 3—35.
14. Cz. Woźniak, *Tolerance and fuzziness in problems of mechanics*, Arch. Mech., 35, 1983, 567—578.

Резюме

О РОЛИ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ НАУКАХ

Целью работы является анализ некоторых несоответственностей между математическими структурами встречаемыми в основных технических науках а действительными объектами или процессами описываемыми этыми структурами. Указано, что такие несоотвенности могут стать уменьшены при помощи альтернативных методов описания физических ситуаций, пользуясь принципами альтернативной теории множеств или нестандартного апализа.

Summary

ON THE ROLE OF MATHEMATICS IN ENGINEERING SCIENCES

The main aim of the paper is to analyse certain discrepancies between the mathematical structure of some engineering theories and the real objects or processes that are described by these theories. It is shown that the discrepancies under consideration can be diminished by using the alternative forms of description of the physical situations, which are based on the mathematics in the alternative set theory or on the nonstandard analysis.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 października 1988 roku.