

## FORMY FUNKCJI POLA PRZEMIESZCZEŃ W PROBLEMIE DRGAŃ STATORÓW TURBOGENERATORÓW

WŁODZIMIERZ PRZYBOROWSKI

*Politechnika Warszawska*

W pracy wyznaczono różne postacie rozwiązań pola przemieszczeń w problemie drgań strefy aktywnej statora turbogeneratora. Wyróżnione postacie funkcji przemieszczeń przedyskutowano w zależności od formy związków konstytutywnych i relacji między stałymi materiałowymi ośrodka ustroju elektromagnetycznego maszyny i rzędu fal naprężeń wymuszających drgania.

### 1. Wstęp

Rozszerzenie modelowania konstytutywnego rdzenia i strefy żłobkowo-zębowej statora turbogeneratora, jak również uwzględnienie wymuszeń (obciążeń) charakteryzujących się wyższymi rzędami fal przestrzenno-czasowych, skłania do formułowania ogólniejszych równań elastokinetyki w problemie drgań turbogeneratorów. Równania te z kolei wymagają stosowania niestandardowych metod poszukiwania rozwiązań. Wyznaczone zaś rozwiązania cechują się osobliwą formą zależności od zmiennych przestrzennych i czasowej, co znacznie uogólnia opis badanych zagadnień i skłania do rozszerzenia interpretacji wyprowadzonych zależności.

W pracy przedyskutowano różne postacie funkcji przemieszczeń w problemie drgań rdzeni statorów turbogeneratorów. Szczególną uwagę zwrócono przy tym na formy tych funkcji w zależności od relacji między stałymi materiałowymi ośrodków elektromagnetycznych maszyny i wartościami liczb falowych obciążeń elektromagnetycznych wymuszających drgania.

Niniejsza praca nawiązuje do artykułu autora [11] i stanowi rozwinięcie analiz przedstawionych tam zależności.

### 2. Równania przemieszczeniowe

Równania elastokinetyki w rozważanym problemie drgań statorów turbogeneratorów, przy założeniu ortotropii ośrodka rdzenia i strefy żłobkowo-zębowej oraz przy pominięciu sił objętościowych, mają postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{a_{11}}{r^2} u_r + \frac{a_{12}}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{a_{13}}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial r} + \frac{a_{14}}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= a_{15} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{a_{21}}{r^2} u_\varphi + \frac{a_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{a_{23}}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi \partial r} + \frac{a_{24}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} &= a_{25} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

w których:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{E_\varphi}{E_r}, \quad a_{12} = \frac{G_{r\varphi}(1-\nu_r\nu_\varphi)}{E_r}, \quad a_{13} = \nu_\varphi + \frac{G_{r\varphi}(1-\nu_r\nu_\varphi)}{E_r}, \\ a_{14} &= -\frac{E_\varphi + G_{r\varphi}(1-\nu_r\nu_\varphi)}{E_r}, \quad a_{15} = \frac{\varrho(1-\nu_r\nu_\varphi)}{E_r}, \quad a_{21} = -1, \\ a_{22} &= \frac{E_\varphi}{G_{r\varphi}(1-\nu_r\nu_\varphi)}, \quad a_{23} = \frac{E_\varphi\nu_r + G_{r\varphi}(1-\nu_r\nu_\varphi)}{G_{r\varphi}(1-\nu_r\nu_\varphi)}, \quad a_{24} = \frac{E_\varphi + G_{r\varphi}(1-\nu_r\nu_\varphi)}{G_{r\varphi}(1-\nu_r\nu_\varphi)}, \\ a_{25} &= \frac{\varrho}{G_{r\varphi}}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:  $E_r, E_\varphi$  oznaczają radialną i tangencjalną składową modułu Younga,  $\nu_r, \nu_\varphi$  odpowiednie składowe stałej Poissona,  $G_{r\varphi}$  — moduł na ścianie,  $\varrho$  — gęstość ośrodka.

Jako determinanty rozkładu pola przemieszczeń przyjmuje się elektromagnetyczne siły powierzchniowe, którym można nadać następującą ogólną formę fali wirującej<sup>4)</sup> [10, 11, 12]

$$P_\alpha = \sum_n P_{\alpha n} \exp(i(\Lambda_n \varphi - \Omega_n t + \psi_n)), \quad \alpha = r, \varphi, \quad (3)$$

w której:  $P_{\alpha r}$  oznacza amplitudy harmonicznycy naprężeń,  $\Lambda_n, \Omega_n$  — liczby falowe i częstotści przestrzenno-czasowej zmienności naprężeń,  $\psi_n$  — kąty przesunięć fazowych.

W ogólnym przypadku struktury pola elektromagnetycznego, a więc pasmowego i reluktancyjnego, liczby falowe i częstotści naprężeń elektromagnetycznych można określić wyrażeniami:

$$\Lambda_n = \begin{cases} \lambda_{sn1} \pm \lambda_{sn2} \pm \lambda_{sN} \\ \lambda_{\rho n1} \pm \lambda_{\rho n2} \pm \lambda_{sN} \\ \lambda_{sn} \pm \lambda_{\rho n} \pm \lambda_{sN} \end{cases}, \quad \Omega_n = \begin{cases} \omega_{sn1} \pm \omega_{sn2} \\ \omega_{\rho n1} \pm \omega_{\rho n2} \\ \omega_{sn} \pm \omega_{\rho n} \end{cases}, \quad (4)$$

$$\lambda_{sn} = \begin{cases} p(6n+1) \\ p(6n-1) \end{cases}, \quad \omega_{sn} = \begin{cases} \omega \\ -\omega \end{cases}, \quad \lambda_{sN} = NZ_s,$$

$$\lambda_{\rho n} = p(2n+1), \quad \omega_{\rho n} = \frac{\omega}{p} \lambda_{\rho n}, \quad n = 0, 1, 2; \quad N = 0, 1, 2 \dots$$

przy czym:  $p$  — jest liczbą par biegunów,  $\omega$  — częstotścią zmian parametrów elektromagnetycznych,  $Z_s$  — liczbą żłobków statora maszyny.

<sup>4)</sup> Określenie — fala wirująca stosuje się w miejsce nazwy fala obwodowa, używanej w mechanicznej literaturze zagadnień falowych [7]. Pierwsza nazwa stosowana jest w określeniach zmienności przestrzenno-czasowej wielkości elektromagnetycznych, których struktura przenosi się właśnie na efekty mechaniczne.

Wobec zależności (2) przyjmuje się analogiczną postać przestrzenno-czasową przemieszczeń:

$$u_\alpha = \sum_n U_{\alpha n}(r) \exp(iA_n \varphi - \Omega_n t). \quad (5)$$

Na podstawie powyższej zależności i równań (1) otrzymuje się układ równań dla funkcji  $U_{\alpha n}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_{rn}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_{rn}}{dr} + \left( \frac{A_{1n}}{r^2} + \Omega_{1n} \right) U_{rn} + \frac{A_{2n}}{r} \frac{dU_{\varphi n}}{dr} + \frac{A_{3n}}{r^2} U_{\varphi n} &= 0, \\ \frac{d^2 U_{\varphi n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_{\varphi n}}{dr} + \left( \frac{B_{1n}}{r^2} + \Omega_{2n} \right) U_{\varphi n} + \frac{B_{2n}}{r} \frac{dU_{rn}}{dr} + \frac{B_{3n}}{r^2} U_{rn} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} A_{1n} &= \frac{A_n^2 G_{r\varphi} (1 - \nu_r \nu_\varphi) + E_\varphi}{E_r}, & A_{2n} &= \frac{i A_n [G_{r\varphi} (1 - \nu_r \nu_\varphi) + \nu_\varphi E_r]}{E_r}, \\ A_{3n} &= -\frac{i A_n [G_{r\varphi} (1 - \nu_r \nu_\varphi) + E_\varphi]}{E_r}, & \Omega_{1n} &= -\frac{\Omega_n^2 \varrho (1 - \nu_r \nu_\varphi)}{E_r}, & \Omega_{2n} &= -\frac{\Omega_n^2 \varrho}{G_{r\varphi}}, \\ B_{1n} &= \frac{A_n E_\varphi}{G_{r\varphi} (1 - \nu_r \nu_\varphi)} + 1, & B_{2n} &= -\frac{A_{2n} E_r}{G_{r\varphi} (1 - \nu_r \nu_\varphi)}, & B_{3n} &= -\frac{A_{3n} E_r}{G_{r\varphi} (1 - \nu_r \nu_\varphi)}. \end{aligned} \quad (7)$$

### 3. Ogólne rozwiązania dla funkcji przemieszczeń

Przed rozwiązaniem układu równań (6) wygodnie jest dokonać zamiany zmiennych

$$r = \gamma_n r', \quad \gamma_n = \Omega_n \sqrt{\frac{\varrho (1 - \nu_r \nu_\varphi)}{G_{r\varphi}}}, \quad \text{i równania te napisać w postaci:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_{rn}}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{dU_{rn}}{dr'} + \left( \Omega_1 - \frac{A_{1n}}{r'^2} \right) U_{rn} + \frac{A_{2n}}{r'} \frac{dU_{\varphi n}}{dr'} + \frac{A_{3n}}{r'^2} U_{\varphi n} &= 0, \\ \frac{d^2 U_{\varphi n}}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{dU_{\varphi n}}{dr'} + \left( \Omega_2 - \frac{B_{1n}}{r'^2} \right) U_{\varphi n} + \frac{B_{2n}}{r'^2} \frac{dU_{rn}}{dr'} + \frac{B_{3n}}{r'^2} U_{rn} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie oznaczono:

$$\Omega_1 = \frac{G_{r\varphi}}{E_r}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{1 - \nu_r \nu_\varphi}.$$

Rozwiązania układu równań (8) poszukuje się w formie szeregów potęgowych:

$$U_{rn} = \sum_k a_{kn} (\gamma_n r')^{p_n+k}, \quad U_{\varphi n} = \sum_k b_{kn} (\gamma_n r')^{p_n+k}, \quad (9)$$

których struktura jest analogiczna do szeregów funkcji Bessela.

Współczynniki szeregów potęgowych (9) wyznacza się ze związków rekurencyjnych:

$$\begin{aligned} a_{kn} [(p_n+k)^2 - A_{1n}] + b_{kn} [(p_n+k) A_{2n} + A_{3n}] - \Omega_1 a_{(k-2)n} &= 0, \\ b_{kn} [(p_n+k)^2 - B_{1n}] + a_{kn} [(p_n+k) B_{2n} + B_{3n}] - \Omega_2 b_{(k-2)n} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

W powyższych zależnościach oznaczono przez  $p$  pierwiastki równania wyznaczającego dla układu równań (8).

Równanie wyznaczające wynika z (10) przy warunku  $a_{0n} \neq 0$  i  $b_{0n} \neq 0$  i ma w ogólnym przypadku postać:

$$p_n^4 + b_n p_n^2 + c_n = 0, \quad (11)$$

$$b_n = - \left[ 1 + \frac{E_\varphi}{E_r} + \Lambda_n^2 \frac{E_\varphi}{G_{r\varphi}} - 2\Lambda_n^2 \nu_\varphi \right], \quad c_n = \frac{E_\varphi}{E_r} (\Lambda_n^2 - 1)^2.$$

Z powyższych zależności i uwag wynika, że szeregi (6) zawierają tylko współczynniki o wyrazach parzystych a cztery pierwiastki równania wyznaczającego nie zależą od częstotliwości drgań.

Ogólne rozwiązania równań przemieszczeniowych mają postać:

$$u_r = \sum_m^4 \sum_n F_{r mn} \sum_k a_{m2kn} (\gamma r)^{p_{mn} + 2k} \exp i(\Lambda_n \varphi - \Omega_n t), \quad (12)$$

$$u_\varphi = \sum_m^4 \sum_n F_{\varphi mn} \sum_k b_{m2kn} (\gamma r)^{p_{mn} + 2k} \exp i(\Lambda_n \varphi - \Omega_n t),$$

przy czym:

$$a_{m2kn} = \frac{a_{m(2k-2)n} \{ \Omega_1 [(p_{mn} + 2k)^2 - B_{1n}] [(p_{mn} + 2k - 2) A_{2n} + A_{3n}] + \Omega_2 [(p_{mn} + 2k - 2)^2 - A_{1n}] [(p_{mn} + 2k) A_{2n} + A_{3n}] \} - a_{m(2k-4)n} \Omega_1 \Omega_2 [(p_{mn} + 2k) A_{2n} + A_{3n}]}{[(p_{mn} + 2k - 2) A_{2n} + A_{3n}] [(p_{mn} + 2k)^4 - b_n (p_{mn} + 2k)^2 + c_n]}, \quad (13)$$

$$b_{m2kn} = \frac{b_{m(2k-2)n} \{ \Omega_2 [(p_{mn} + 2k)^2 - A_{1n}] [(p_{mn} + 2k - 2) B_{2n} + B_{3n}] + \Omega_1 [(p_{mn} + 2k - 2)^2 - B_{1n}] [(p_{mn} + 2k) B_{2n} + B_{3n}] \} - a_{m(2k-4)n} \Omega_1 \Omega_2 [(p_{mn} + 2k) B_{2n} + B_{3n}]}{[(p_{mn} + 2k - 2) B_{2n} + B_{3n}] [(p_{mn} + 2k)^4 - b_n (p_{mn} + 2k)^2 + c_n]},$$

$$a_{0m} = 1, \quad b_{0mn} = - \frac{p_{mn}^2 - A_{1n}}{p_{mn} A_{2n} + A_{3n}}. \quad m = 1, 2, 3, 4$$

Z formy równania wyznaczającego (11) i związków rekurencyjnych (13) wynika istotna zależność pierwiastków  $p_{mn}$  i współczynników  $a_{m2kn}$ ,  $b_{m2kn}$ , a więc funkcji zmiennej  $r$  rozwiązań przemieszczeń, od parametrów materiałowych ośrodka oraz liczb falowych.

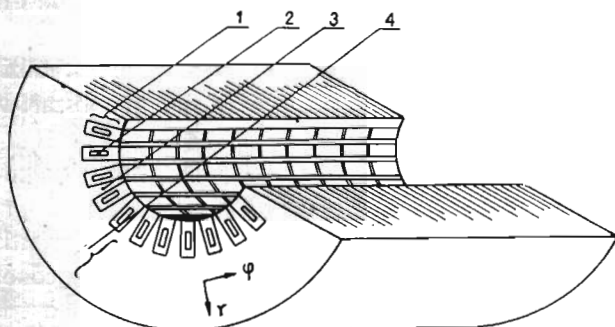
Tak więc charakter zmienności przemieszczeń jest jakościowo zróżnicowany dla poszczególnych harmonicznych i własności materiałowych ośrodków.

#### 4. Uwagi o parametrach materiałowych

Przed specyfikacją rozwiązań funkcji przemieszczeniowych, ze względu na wskazane parametry, wypada przedstawić wyznaczone dotychczas (eksperymentalnie) przedziały wartości stałych materiałowych  $E$ ,  $\nu$  i relacje między składowymi  $E_r$ ,  $E_\varphi$  dla rdzeni statorów turbogeneratorów [1, 3, 5, 9, 12].

Jest rzeczą oczywistą, że wyznaczenie parametrów konstytutywnych ustroju stanowiącego kompozyt obwodów elektrycznych—uzwojeń i obwodu magnetycznego—rdzenia

maszyny elektrycznej jest niezwykle skomplikowane. Spowodowane jest to przede wszystkim ortotropią mechaniczną blach spakietowanego rdzenia oraz kompozytową konstrukcją (miedź — izolacja — żelazo) strefy żłobkowo-zębowej maszyny [4] (rys. 1).



Rys. 1. Szkic przekroju strefy aktywnej rdzenia statora turbogeneratora. 1 — obszar żłobkowo-zębowy; 2 — pręt uzwojenia (miedź); 3 — ząb rdzenia (ferromagnetyk); 4 — obszar jarzma

Ponadto należy zauważyć, że zarówno rdzeń jak i przewody uzwojeń są niejednospójne geometrycznie (zawierają kanały lub kanaliki do przepływu czynników chłodzących), a sztywność całej konstrukcji ulega zmianie podczas eksploatacji maszyny.

Ze względu na wskazane złożoności i osobliwości konstrukcyjne obwodów elektrycznych i magnetycznych turbogeneratorów, wyznaczone parametry konstytutywne mają znaczenie parametrów ekwiwalentnych.

Na podstawie dostępnych wyników badań eksperymentalnych własności materiałowych rdzeni statorów dużych maszyn elektrycznych [1, 3, 5, 9, 12] można określić następujące przedziały wartości dla modułów Younga i współczynników Poissona tych rdzeni:

— jako ośrodków izotropowych

$$E = \langle 0.95 \div 1.7, 1.9 \rangle 10^5 \text{ MPa},$$

$$\nu = \langle 0.27 \div 0.32 \rangle,$$

— jako ośrodków ortotropowych

$$\frac{E_r}{E_\varphi} = \begin{cases} \langle 1.43 \div 1.74 \rangle & \text{dla blach zimno-walcowanych} \\ 1.1 & \text{dla blach gorąco-walcowanych} \end{cases}$$

$$\nu_r = 0.30,$$

dla modułu na ścinanie przyjmuje się wartość  $G_{r\varphi} = 0.81 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ . Wartość współczynnika Poissona w kierunku tangencjalnym wyznacza się z zależności  $E_r \nu_\varphi = E_\varphi \nu_r$  [6].

Należy przy tym zauważyć, że moduł Younga dla pojedynczego pakietu lub blachy oszacowuje się wartościami [12]  $E_r = \langle 2.02 \div 2.25 \rangle 10^5 \text{ MPa}$  w kierunku prostopadłym do kierunku walcowania i  $E_\varphi = \langle 1.3 \div 1.84 \rangle 10^5 \text{ MPa}$  w kierunku walcowania.

Przy czym dolne wartości  $E_r$  i górne  $E_\varphi$  odnoszą się do blach gorąco-walcowanych a pozostałe wartości do blach zimno-walcowanych anizotropowych.

W zestawieniu powyższych parametrów wypada zasygnalizować pracę [3], w której podane są odwrotne zależności dla wartości współrzędnych  $E_r$ ,  $E_\varphi$ , a mianowicie  $\frac{E_r}{E_\varphi} =$

$= 0.67$ ,  $E_r = 1.42 \cdot 10^5$  MPa i wartości współczynnika Poissona w kierunku radialnym równego  $\nu_r = 0.3$  oraz  $G_{rp} = G = 0.81 \cdot 10^5$  MPa.

Z powyższych zestawień wynika, że relacje dla mechanicznych parametrów materiałowych: zblachowanych rdzeni maszyn elektrycznych nie są jednoznacznymi danymi i wymagają dalszych uściśleń.

A ponadto w zaproponowanym schemacie obliczeniowym zachodzi potrzeba zróżnicowania parametrów materiałowych dla poszczególnych podobszarów statora — strefy żłobkowo-zębowej i jarzma.

Brak jednoznacznych danych materiałowych rozważanych ośrodków ustroju statora turbogeneratora utrudnia niewątpliwie analizę ilościową funkcji przemieszczeń, lecz w pewnym zakresie można przeprowadzić dyskusję wartości pierwiastków równania (11) w zależności od wskazanych relacji między tymi parametrami. I jednocześnie przeanalizować pod względem jakościowym wyznaczone funkcje. Jest to o tyle interesujące, że w przypadku istnienia pierwiastków zespolonych następuje istotna zmiana jakościowa w formie fali wirującej.

### 5. Charakterystyka pierwiastków równania wyznaczającego

Przed ogólną charakterystyką lokalizacji pierwiastków równania (11) należy określić przypadki rozwiązań tego równania ze względu na wyróżnik  $\Delta = b_n^2 - 4c_n$ .

W pierwszym przypadku gdy wyróżnik jest dodatni  $\Delta > 0$ , to z uwagi na relację  $-b_n > \sqrt{\Delta}$  otrzymuje się cztery różne pierwiastki rzeczywiste:

$$\left. \begin{matrix} p_{1n} \\ p_{2n} \end{matrix} \right\} = \pm \frac{-b_n + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \left. \begin{matrix} p_{3n} \\ p_{4n} \end{matrix} \right\} = \pm \frac{-b_n - \sqrt{\Delta}}{2}. \quad (14)$$

Gdy  $\Delta = 0$  to istnieją dwa podwójne pierwiastki rzeczywiste:

$$p_{1n} = p_{2n} = \frac{-b_n}{2}, \quad p_{3n} = p_{4n} = \frac{b_n}{2}, \quad (15)$$

W przypadku gdy  $\Delta < 0$ , to otrzymuje się pierwiastki zespolone, które za pomocą wielkości:

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \sqrt{-b_n + \sqrt{b_n^2 - \Delta}}, \quad \beta_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\Delta}{-b_n + \sqrt{b_n^2 - \Delta}}}, \quad (16)$$

można określić:

$$p_{1n} = \alpha_n + i\beta_n, \quad p_{2n} = \alpha_n - i\beta_n, \quad p_{3n} = -\alpha_n + i\beta_n, \quad p_{4n} = -\alpha_n - i\beta_n. \quad (17)$$

Ze względu na zgrubne oszacowania stałych materiałowych  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$  można uznać, że tylko przypadek pierwszy  $\Delta > 0$  i trzeci  $\Delta < 0$  są istotne, ale i w tych przypadkach szczegółowa lokalizacja pierwiastków nie jest możliwa.

Wobec relacji  $-b_n > 0$ ,  $c_n > 0$ , warunek  $\Delta > 0$  można sprowadzić do warunku  $b_n - 2\sqrt{c_n} > 0$ , a więc wyróżnik jest dodatni gdy:

$$\frac{E_\varphi}{G_{r\varphi}} > 2k\nu_r + 2\sqrt{k} - \left( \frac{1 + \sqrt{k}}{\lambda_n} \right)^2, \quad (18)$$

gdzie  $k = \frac{E_\varphi}{E_r}$ .

Dla dużych wartości liczb falowej  $\lambda_n > 10$  można pominąć ostatni składnik po prawej stronie powyższej relacji (18).

Dalszą dyskusję szczegółową utrudnia „nieokreśloność” modułu ścinania  $G_{r\varphi}$ . Przyjęcie natomiast tej wielkości równej wartości  $0.81 \cdot 10^6$  MPa nie wydaje się słuszne wobec przedziałów zmienności wielkości  $E(E_r)$  i  $E_r/E_\varphi$ .

Pomimo wskazanych trudności można stwierdzić, że dla obszernego zbioru parametrów materiałowych wyróżnik jest dodatni dla podstawowej wartości liczby falowej  $\lambda_0 = 2p$ . Natomiast dla wyższych wartości liczb falowych przy warunku  $k < 1$  wyróżnik jest ujemny dla szerokich przedziałów zmienności parametrów  $E_r/E_\varphi$  i  $\nu_r$ .

W przypadku  $k > 1$  wyróżnik jest dodatni również dla dużych wartości liczb falowych.

Przypadek  $k = 1$  odnosi się do ośrodka izotropowego i wówczas pierwiastki równania (11) wynoszą:

$$p_{1n} = \lambda_n + 1, \quad p_{2n} = \lambda_n - 1, \quad p_{3n} = -\lambda_n + 1, \quad p_{4n} = -\lambda_n - 1.$$

## 6. Charakterystyczne formy funkcji przemieszczeń

Ogólne rozwiązanie funkcji przemieszczeń wyrażone jest wzorem (12) i w przypadku pierwiastków rzeczywistych równania wyznaczającego (11), postać tej funkcji<sup>2)</sup> można bezpośrednio stosować do dalszych obliczeń.

Składnik funkcji przemieszczeń uzależniony od zmiennej radialnej ma formę analogiczną do funkcji Bessela pierwszego rodzaju, lecz o zepolonych współczynnikach szeregu. Można wykazać, że szereg ten jest zbieżny jednostajnie w całym obszarze  $r < R$ . Trudno jest jednak, na obecnym etapie badań, wybrać postać standardową dla tego szeregu, ale obliczenia cyfrowe tej funkcji nie stanowią trudności.

Problem pojawia się w wyznaczeniu rozwiązań funkcji przemieszczeń w przypadku istnienia pierwiastków podwójnych ( $\lambda = 0$ ), bowiem wówczas rozwiązania liniowo niezależnego należy poszukać w inny sposób.

Analogicznie jak w przypadku funkcji Bessela drugiego rodzaju, drugie rozwiązanie (w rozpatrywanym przypadku) posiada osobliwość w punkcie  $r = 0$  i ogólna jego postać dla funkcji  $U_\alpha(r)$  (9) może być wyrażona wzorem:

$$U_\alpha(r) = \ln r \sum_k a_{\alpha 2kn} (r\gamma)^{p_{1n} + 2k} + \sum_k \left[ \frac{\partial a_{\alpha 2kn}}{\partial p} \right]_{p=p_{2n}} (r\gamma)^{p_{2n} + 2k} \quad (19)$$

i analogicznie dla przypadku  $p = p_{3n} = p_{4n}$  (15).

Charakterystyczne rozwiązanie funkcji przemieszczeń w rozważanym zagadnieniu odnosi się do przypadku ośrodka izotropowego. Odpowiednie równania przemieszczeniowe

<sup>2)</sup> W rozwiązaniach końcowych należy wziąć oczywiście część rzeczywistą wyznaczonych funkcji.

i współczynniki równań można wyznaczyć na podstawie zależności (1) i (2) w wyniku podstawienia:

$$E_r = E_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_r = \nu_\varphi = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad G_{r\varphi} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (20)$$

Tak więc współczynniki (2) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1, & a_{12} &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & a_{13} &= \frac{1}{2(1-\nu)}, & a_{14} &= -\frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}, \\ a_{21} &= -1, & a_{22} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, & a_{23} &= \frac{1}{1-2\nu}, & a_{24} &= \frac{3}{1-2\nu}, \\ a_{15} &= \frac{\rho(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)}, & a_{25} &= \frac{2\rho(1+\nu)}{E}. \end{aligned} \quad (21)$$

Wobec powyższych zależności równania przemieszczeniowe przyjmują klasyczną postać równań elastokinetyki [8]:

$$\nabla^2 u + \frac{4\nu-1}{1-2\nu} \text{grad div } u - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (22)$$

Ogólne rozwiązania powyższego równania (22), wyznaczone metodą przedstawienia Lamego [8], dla rozważanego zagadnienia drgań ustroju statora turbogenerators wywołanych obciążeniami w formie (3), można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_n \left\{ F_{1n} \left[ -\frac{A_n}{r} J_{A_n}(\gamma_{1n} r) + \gamma_{1n} J_{A_n-1}(\gamma_{1n} r) \right] + F_{2n} \frac{iA_n}{r} J_{A_n}(\gamma_{2n} r) + \right. \\ &\quad \left. + F_{3n} \left[ -\frac{A_n}{r} N_{A_n}(\gamma_{1n} r) + \gamma_{1n} N_{A_n-1}(\gamma_{1n} r) \right] + F_{4n} \frac{iA_n}{r} N_{A_n}(\gamma_{2n} r) \right\} \cdot \exp i(A_n \varphi - \Omega_n t), \\ u_\varphi &= \sum_n \left\{ F_{1n} \frac{iA_n}{r} \gamma_{A_n}(\gamma_{1n} r) + F_{2n} \left[ \frac{A_n}{r} J_{A_n}(\gamma_{2n} r) - \gamma_{2n} J_{A_n-1}(\gamma_{2n} r) \right] + \right. \\ &\quad \left. + F_{3n} \frac{iA_n}{r} N_{A_n}(\gamma_{1n} r) + F_{4n} \left[ \frac{A_n}{r} N_{A_n}(\gamma_{2n} r) - \gamma_{2n} N_{A_n-1}(\gamma_{2n} r) \right] \right\} \cdot \exp i(A_n \varphi - \Omega_n t), \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:  $\gamma_{1n} = \Omega_n \sqrt{a_{15}}$ ,  $\gamma_{2n} = \Omega_n \sqrt{a_{25}}$ ,

$J_{A_n}$ ,  $N_{A_n}$  — funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu  $A_n$ ,

$F_{mn}$  — dowolne stałe  $m = 1, \dots, 4$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Znamienną postać można nadać funkcji przemieszczeń w przypadku zespolonych pierwiastków (17), bowiem część wyrażenia tej funkcji uzależnionej od zmiennej  $r$  można włączyć do czynnika fali wirującej:

$$u_\alpha = \sum_m \sum_n F_{mn} \sum_k a_{\alpha m 2kn} (\gamma_n r)^{\alpha_m + 2k} \exp i(A_n \varphi - \beta_{mn} \ln \gamma_n r - \Omega_n t). \quad (24)$$

Zatem w czynniku funkcji reprezentującym falę wirującą ( $\exp i(A_n \varphi - \Omega_n t)$ ) pojawia się składnik  $\beta_{mn} \ln \gamma_n r$  zmieniający charakter rozprzestrzeniania się tej fali. W bezpośredniej



interpretacji można to określić jako zmianę fazy fali wirującej na liniach parametrycznych  $r = \text{const}$ . Z drugiej strony wskazane wyrażenie oznacza falowe rozprzestrzenianie się przemieszczeń w kierunku radialnym.

Przez analogię do prędkości synchronicznych<sup>3)</sup> harmonicznym fal wirujących  $\omega_{\varphi n} = \Omega_n/\Lambda_n$  można określić prędkość zmienności przemieszczeń w kierunku radialnym  $V_{rsn} = \Omega_n r / \beta_{mn}$ . I jest to element osobliwości w tym efekcie ze względu również na zależność tej prędkości od miejsca w przestrzeni.

Długości fal propagujących się w poszczególnych kierunkach wynoszą:

$$\lambda_{\varphi n} = \frac{2\pi}{\Lambda_n}, \quad \lambda_{rnm} = r \left( e^{\beta_{mn}} - 1 \right). \quad (25)$$

Z przedstawionych zależności i uwag wynika, że wskutek zróżnicowania parametrów materiałowych ośrodków w podobszarach (zęby, żłobki — jarzmo) stroju statora turbogeneratorsa, są również istotnie zróżnicowane, pod względem jakościowym, rozwiązania dla efektów wibracyjnych w tych strefach.

Poza tym na jakościowy przebieg drgań w tych maszynach mają wpływ również takie parametry konstrukcyjne, jak liczby żłobków statora i rotora oraz struktura uzwojeń. Bowiem parametry te decydują o kompozytowej i materiałowej strukturze podobszarów maszyny oraz o liczbach falowych i częstościach drgań.

## 7. Uwagi końcowe

Przedstawione rozwiązania funkcji przemieszczeń stanowią ogólniejszy opis drgań stroju statora turbogeneratorsa niż dotychczas prezentowane rozwiązania dla tego zagadnienia [3, 10, 11, 13]. Uogólnienie to dotyczy ortotropowego modelu maszyny oraz rozszerzonego spektrum liczb falowych i częstości funkcji obciążeń wymuszających drgania, a tym samym dotyczy również rozszerzonego zbioru tych parametrów dla pola przemieszczeń.

Rozszerzenie związków konstytutywnych umożliwia w sposób naturalny rozróżnić i jakościowo analizować efekty wibracyjne w strefie żłobkowo-zębowej i w jarzmie statora.

Na uwagę zasługuje również możliwość uwzględnienia w parametrach materiałowych użłobkowania części rdzenia, a więc struktury maszyny ustalonej w oparciu o kryteria elektromagnetyczne. Zatem prezentowane podejście pozwala analizować drgania maszyny w zależności od konstrukcyjnych parametrów elektromagnetycznych.

W zakończeniu należy zauważyć, że prezentowane w literaturze [2, 13] wyrażenia na amplitudy drgań statorów, wyznaczone w oparciu o model statora w formie cienkościennego, izotropowego i jednorodnego pierścienia, i przy założeniu tylko obciążeń w formie naciągu magnetycznego  $p_r = B_\delta^2 / 2\mu_0$  określonego indukcją szczelinową  $B_\delta$ , chociaż mają pewne zalety z punktu widzenia inżynierskiego, mogą być przydatne tylko do zgrubnego oszacowania współzależności drgań od ramowych parametrów geometrycznych i fizycznych turbogeneratorsa.

<sup>3)</sup> Użycie nazwy — prędkość synchroniczna, ma uzasadnienie w stosowaniu tej nazwy dla przebiegów elektromagnetycznych o analogicznej formie przestrzenno-czasowej zachodzących w turbogeneratorsie — elektrycznej maszynie synchronicznej.

## Literatura

1. В. Б. Андреев, И. Е. Сахаров, *Модуль упругости шихтованного пакета статора*, Вестник электропромышленности № 1, 1962
2. А. ВУТНАР, *Wybrane zagadnienia z konstrukcji i eksploatacji turbogeneratorów*, WPW Warszawa, 1983
3. А. Р. Глазено, В. Е. Школник, *Расчёт частот собственных колебаний сердечника статора турбогенератора*, Электротехника № 4, 1976
4. W. LATEK, *Turbogeneratory*, WNT, Warszawa, 1970
5. R. LEMAITRE, *Flambage de tôles magnétiques*, Revue Générale de l'Électricité, v. 77, N° 6, 1968
6. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Наука, Москва, 1977
7. *Mechanika techniczna. t. III: Drgania i fale*, S. Kałiski [red.] PWN, Warszawa, 1968
8. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970
9. В. М. Подрез, *Жесткость шихтованного сердечника электрической машины*, В кн. Научнотехнические проблемы крупного турбо- и гидрогенераторостроения, Наука, Москва, 1967
10. W. PRZYBOROWSKI, *Drgania ortotropowego rdzenia statora turbogeneratora*, IX Sympozjum — Drgania w układach fizycznych. Poznań-Błażejewko, 1980
11. W. PRZYBOROWSKI, *Uogólniony model drgań rdzeni statorów turbogeneratorów*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 27, 1, 1989
12. Л. Я. Станиславский, Л. Г. Гаврилов, О. Э. Остерник, *Вибрационная надежность мощных турбогенераторов*, Энергия, Москва 1975
13. В. В. Титов, Г. М. Хуторецкий, Г. А. Загородная, Г. П. Вартаьян, Д. И. Заславский, И. А. Смирнов, *Турбогенераторы, расчёт и конструкция*, Энергия, Ленинград, 1967

## Резюме

ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПРОБЛЕМЕ ВИБРАЦИИ СТАТОРОВ  
ТУРБОГЕНЕРАТОРОВ

Представлены различные формы перемещений в функциональном виде применены к проблеме вибрации активной зоны статора турбогенератора.

Функции перемещений проанализированы с учетом отношений между параметрами упругости электромагнитной системы сердечника статора и порядка гармоник напряжений вызывающих вибрацию статора.

## Summary

FUNCTIONS OF DISPLACEMENT FIELD IN THE PROBLEM  
OF VIBRATIONS OF STATORS TURBOGENERATORS

In the paper the different forms of displacement field in the problem of vibrations in active zone of stator core turbogenerator are demonstrated.

The functions forms of displacement have been discussed depending on the constitutive equations and the relations between the materials constants of electromagnetic bodies of stators core as well as the order of stress harmonics produced by vibration of the stator.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 maja 1988 roku.*