

## WYZNACZANIE POWIERZCHNI SWOBODNEJ CIECZY W TRÓJKĄTNYM ROWKU

MARIUSZ KACZMAREK  
*IPPT PAN, Poznań*

JAN. A. KOŁODZIEJ  
*Politechnika Poznańska*

GRZEGORZ MUSIELAK  
*IPPT PAN, Poznań*

W pracy wyznacza się kształt powierzchni swobodnej cieczy znajdującej się w trójkątnym rowku. W tym celu korzysta się z równania Laplace'a-Younga. Parametrami ustalonymi są: kąt rozwarcia rowka, kąt zwilżenia, liczba Bonda. Opisano stosowaną numeryczną metodę optymalizacyjną, podano przykładowe wyniki oraz program w języku Basic mikrokomputera HP86B, przy pomocy którego wykonywano obliczenia.

### 1. Wprowadzenie

W niektórych zagadnieniach technicznych dąży się do zwiększenia powierzchni swobodnej cieczy. Celem może być intensyfikacja procesów wymiany ciepły i masy pomiędzy cieczą i gazem na powierzchni swobodnej (parowanie lub kondensacja). Jedną z dróg zwiększenia powierzchni swobodnej jest stosowanie powierzchni żłobionych trójkątnymi rowkami lub powierzchni pofalowanych, na których zachodzi spływ cieczy pod wpływem sił grawitacji. Przy przepływie wzdłuż rowków, przy niewielkiej ilości cieczy w rowkach, wpływ sił kapilarnych jest istotny i następuje znaczny wzrost efektywnej powierzchni wymiany w porównaniu do spływu po powierzchni płaskiej.

Problem laminarnego przepływu cieczy lepkiej, nieściśliwej w trójkątnym rowku pod wpływem sił grawitacji był rozważany w pracy [1]. Uwzględniono tam efekt napięcia powierzchniowego na powierzchni swobodnej cieczy, jednak przyjęto założenie upraszczające, że powierzchnia swobodna ma stały promień krzywizny. Założenie to jest korzystne z punktu widzenia stosowanej metody rozwiązywania zagadnienia przepływu, zapewnia bowiem analityczną postać funkcji określającej kształt powierzchni swobodnej, może być jednak przybliżeniem niewystarczająco dokładnym z punktu widzenia modelowania rzeczywistej powierzchni swobodnej. Ponadto założenie takie ogranicza budowę modelu teoretycznego optymalizacji procesu wymiany.

Celem niniejszej pracy jest podanie metody numerycznego wyznaczania kształtu powierzchni swobodnej dla dowolnych ilości cieczy w trójkątnym rowku, przy dowolnym napięciu powierzchniowym i dowolnej gęstości cieczy, to jest dla dowolnych liczb Bonda. Założenie stałego promienia krzywizny, jakie przyjęto w pracy [1] jest uzasadnione przy bardzo małych wartościach liczby Bonda. Podstawą rozważań jest związek Laplace'a-Younga, który w rozważanym przypadku prowadzi do dwupunktowego zagadnienia brzegowego z nieliniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu, w którym niewiadomą wielkością jest współrzędna powierzchni swobodnej.

W przyjętej metodzie rozwiązywania zagadnienie brzegowe sprowadza się do zagadnienia początkowego. W takim ujęciu istotna różnica w stosunku do znanych autorom rozwiązań tego typu, np. z pracy [2], w której określano kształt powierzchni swobodnej cieczy, polega na tym, iż w niniejszej pracy nieznany jest jeden z warunków początkowych. Zamiast tego zadany jest warunek określonego pola pod powierzchnią swobodną.

Z uwagi na duże rozpowszechnienie mikrokomputerów do pracy dołączony jest program obliczeń w języku Basic.

## 2. Sformułowanie problemu

Weźmy pod uwagę rowek trójkątny o kącie rozwarcia  $2\Phi$  (rys. 1). Przyjmijmy biegunowy układ współrzędnych  $(r, \varphi)$  o początku w wierzchołku rowka i współrzędnej  $\varphi = 0$  pokrywającej się z osią symetrii rowka. Ciecz znajdująca się w rowku tworzy powierzchnię swobodną, której kształt opisuje funkcja  $r_s = r_s(\varphi)$ . Ze ścianką rowka tworzy ona określony kąt zwilżenia  $\theta$ . Problem polega na wyznaczeniu kształtu powierzchni swobodnej (funkcji  $r_s(\varphi)$ ) przy znanych: kącie wierzchołkowym  $2\Phi$ , ilości cieczy w rowku, kącie zwilżenia  $\theta$  i współczynniku napięcia powierzchniowego.

W stanie ustalonym kształt powierzchni swobodnej w ogólności opisuje związek Laplace'a-Younga:

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

gdzie  $\Delta p$  jest skokiem ciśnienia na powierzchni swobodnej,  $\sigma$  współczynnikiem napięcia powierzchniowego a  $R_1, R_2$  — głównymi promieniami krzywizny powierzchni swobodnej. Z uwagi na fakt, iż rozważana powierzchnia swobodna jest powierzchnią walcową przyjmujemy, że  $R_2 = \infty$ . Ze względu na symetrię wystarczy rozważyć przedział  $\varphi \in \langle 0, \Phi \rangle$ .

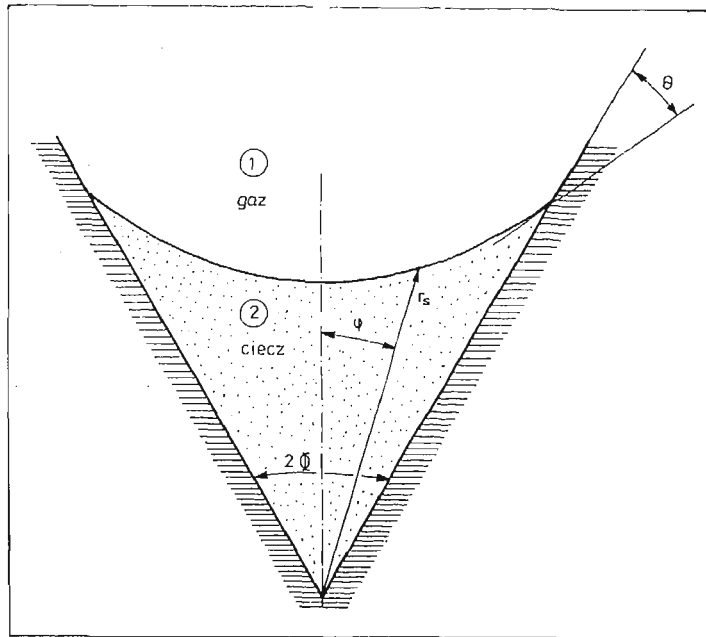
Precyzując wielkości w równaniu (1) przyjmijmy, że w kierunku pionowym zachowaniem ośrodków rządzą prawa statyki płynów. Mamy więc związki:

$$p_1 = -\gamma_1(r \cos \varphi - C_1), \quad (2)$$

$$p_2 = -\gamma_2(r \cos \varphi - C_2), \quad (3)$$

gdzie oznaczono:  $p_1, p_2$  — ciśnienia statyczne w gazie (ośrodek 1) i w cieczy (ośrodek 2),  $\gamma_1, \gamma_2$  — odpowiednie ciężary właściwe,  $C_1, C_2$  — stałe całkowania. Skok ciśnienia  $\Delta p$  na granicy ośrodków jest wówczas równy

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma(r_s \cos \varphi - C), \quad (4)$$



Rys.1. Rowek wypełniony cieczą

gdzie  $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$  i przy  $\gamma_1 \ll \gamma_2$  przyjmuje się, że  $\gamma = \gamma_2$ .  $C = C_1 - C_2$  — stała, określająca wysokość słupa cieczy, dla której  $p_2 = p_1$ . Tak więc, uwzględniając zależność (4) i wzory geometrii różniczkowej równanie (1) przyjmuje postać:

$$\gamma(r_s \cos \varphi - C) = -\sigma \frac{r_s^2 + 2 \left( \frac{dr_s}{d\varphi} \right)^2 - r_s \frac{d^2 r_s}{d\varphi^2}}{\left[ r_s^2 + \left( \frac{dr_s}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (5)$$

Z symetrii zagadnienia wynika warunek brzegowy:

$$\frac{dr_s(\varphi)}{d\varphi} = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi = 0. \quad (6)$$

Drugi warunek brzegowy wynika z kąta zwilżenia na granicy trzech ośrodków i ma postać:

$$\frac{dr_s(\varphi)}{d\varphi} = \frac{r_s}{\operatorname{tg} \theta} \quad \text{dla} \quad \varphi = \Phi. \quad (7)$$

Dodatkowy warunek, jaki musi spełniać rozwiązanie  $r_s(\varphi)$  wynika z zadanej ilości cieczy w rowku i może być sformułowany w postaci:

$$\int_0^{\Phi} r_s^2(\varphi) d\varphi = b^2 \operatorname{tg} \Phi, \quad (8)$$

gdzie  $b$  jest odległością powierzchni swobodnej od dna rowka przy braku sił kapilarnych.

Wprowadzając bezwymiarową zmienną  $R = \frac{r_s}{b}$  równanie (5) i warunki (6-8) można zapisać następująco:

$$\frac{d^2 R}{d\varphi^2} = R + \frac{2}{R} \left( \frac{dR}{d\varphi} \right)^2 + \text{Bo} \left( \cos \varphi - \frac{A}{R} \right) \left[ R^2 + \left( \frac{dR}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (9)$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{R}{\text{tg} \Theta} \quad \text{dla} \quad \varphi = \Phi, \quad (11)$$

$$\int_0^\Phi R^2(\varphi) d\varphi = \text{tg} \Phi, \quad (12)$$

gdzie  $\text{Bo} = \frac{\gamma b^2}{\sigma}$  jest bezwymiarową liczbą Bonda,  $A = \frac{C}{b}$  — bezwymiarową stałą.

Równanie (9) z warunkami brzegowymi (10, 11) formuluje dwupunktowe zagadnienie brzegowe. W równaniu (9) występuje nieznaną parametr  $A$ , do określenia którego dysponujemy dodatkowym warunkiem (12).

### 3. Opis metody rozwiązania zagadnienia

Sprowadźmy sformułowane zagadnienie brzegowe do zagadnienia początkowego. W tym celu, traktując warunek (10) jako pierwszy warunek początkowy, przyjmujemy drugi warunek początkowy w postaci:

$$R_s(\varphi) = S \quad \text{dla} \quad \varphi = 0, \quad (13)$$

gdzie  $S$  jest drugim nieznanym parametrem (obok parametru  $A$ ). Zagadnienie początkowe proponujemy rozwiązywać metodą Rungego-Kutty w wersji podanej w [3] {patrz Appendix}, sprowadzając przedtem równanie (9) do układu dwóch równań pierwszego rzędu w postaci:

$$\frac{dY_1}{d\varphi} = Y_2, \quad (14)$$

$$\frac{dY_2}{d\varphi} = Y_1 + \frac{2}{Y_1} (Y_2)^2 + \text{Bo} \left( \cos \varphi - \frac{A}{Y_1} \right) [(Y_1)^2 + (Y_2)^2]^{3/2}, \quad (15)$$

gdzie:  $Y_1 = R_s(\varphi)$ ,  $Y_2 = \frac{dR_s(\varphi)}{d\varphi}$ .

Rozwiązując problem początkowy sformułowany równaniami (14) i (15) oraz warunkami (10) i (13) dla dowolnie dobranych parametrów  $A$  i  $S$  otrzymamy postać powierzchni swobodnej, która z określonymi błędami spełnia warunki (11) i (12). Zakładając, że istnieje para parametrów  $A$  i  $S$ , dla której warunki (11) i (12) są spełnione dokładnie, naszym celem jest znalezienie rozwiązania z określonym błędem względnym  $DT$  dla kąta

zwilżenia

$$DT = \frac{T - \Theta}{\Theta} \quad (16)$$

i błędem  $DS$  dla pola powierzchni pod krzywą

$$DS = \frac{POL - \text{tg } \Phi}{\text{tg } \Phi}, \quad (17)$$

gdzie  $T$  i  $POL$  są obliczonymi wartościami kąta zwilżenia i pola powierzchni pod krzywą dla zadanych parametrów  $A$  i  $S$ . Realizacja postawionego celu polega na minimalizacji, przy pomocy omówionej niżej procedury numerycznej, funkcji błędu w postaci:

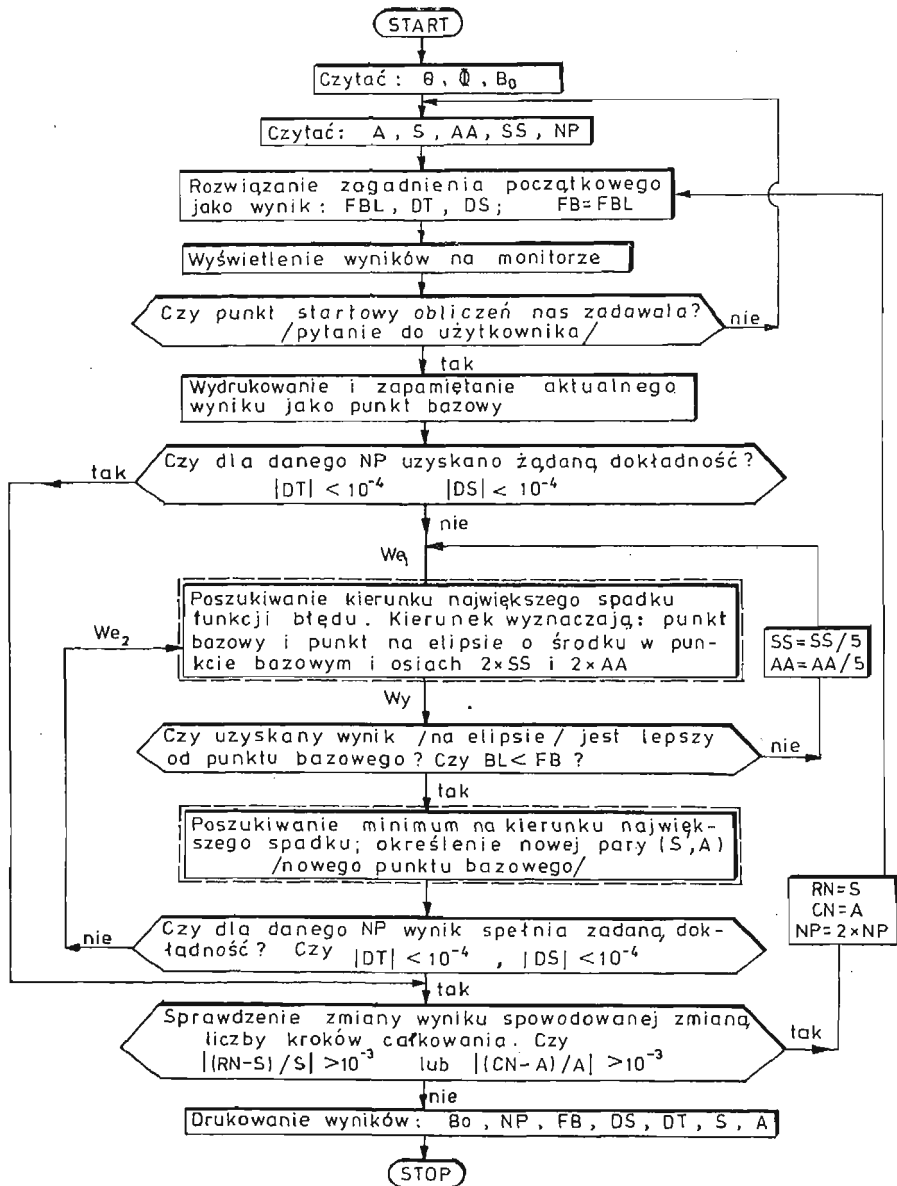
$$FBL = DT^2 + DS^2. \quad (18)$$

Jako warunek zakończenia obliczeń numerycznych przyjmuje się odpowiednio małe wartości dla błędów względnych  $DT$  i  $DS$ .

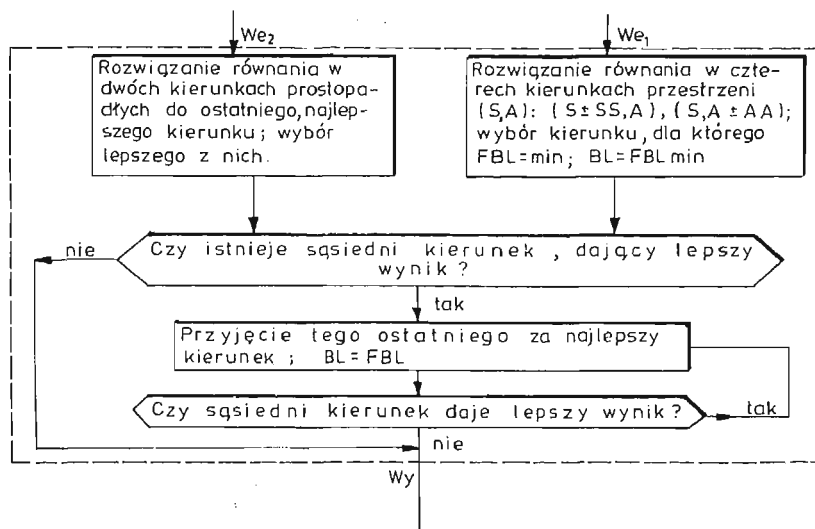
W pracy proponuje się minimalizowanie wprowadzonej funkcji błędu (18) przy pomocy metody będącej pośrednią pomiędzy metodą Gaussa-Seidela (bezgradientową) {[4], str. 200} a metodą największego spadku (gradientową) {[4], str. 203}. Zasadniczo w tej procedurze powtarzają się na przemian dwa etapy obliczeń: poszukiwanie kierunku największego spadku oraz przeszukiwanie tego kierunku. Z uwagi na fakt, że w badanym zagadnieniu nie dysponuje się informacją o gradiencie funkcji błędu  $FBL$  w pierwszym etapie poszukuje się minimum  $FBL$  w skończonej ilości punktów na elipsie w płaszczyźnie  $(A, S)$ . Ilość tych punktów, osie i środek elipsy określa się arbitralnie na początku procedury poszukiwania kierunku największego spadku. Punkt na elipsie, w którym  $FBL$  osiąga minimum i środek elipsy wyznaczają kierunek przybliżony do kierunku największego spadku i jest on dalej nazywany kierunkiem największego spadku. O ile  $FBL$  na elipsie nie osiąga wartości mniejszej aniżeli w jej środku następuje zmniejszenie osi elipsy. W kierunku największego spadku minimum funkcji błędu poszukuje się przy pomocy metody przeszukiwania ze zmiennym krokiem.

Dla przyspieszenia obliczeń pierwsze przybliżenie rozwiązania poszukiwano dla małej ilości kroków całkowania (oznaczonej w algorytmie  $NP$ ) w metodzie Rungego-Kutty. Następnie ilość tych kroków zwiększano tak długo, dopóki wyniki z dwóch kolejnych kroków całkowania różniły się mniej niż założone kryterium (w pracy 1% uzyskanego wyniku). Należy zwrócić uwagę na fakt, że czas obliczeń jest w dużym stopniu zależny od trafności przyjęcia pierwszej pary parametrów  $A$  i  $S$  oraz kroków procedury przeszukiwania (w programie oznaczonych  $AA$  dla  $A$  i  $SS$  dla  $S$ ). Dlatego też w programie wprowadzono możliwość „strzelania” punktem startowym (danymi  $A, S, AA, SS, NP$ ) tak, aby uzyskane pierwsze przybliżenie zapewniało możliwie krótki czas obliczeń.

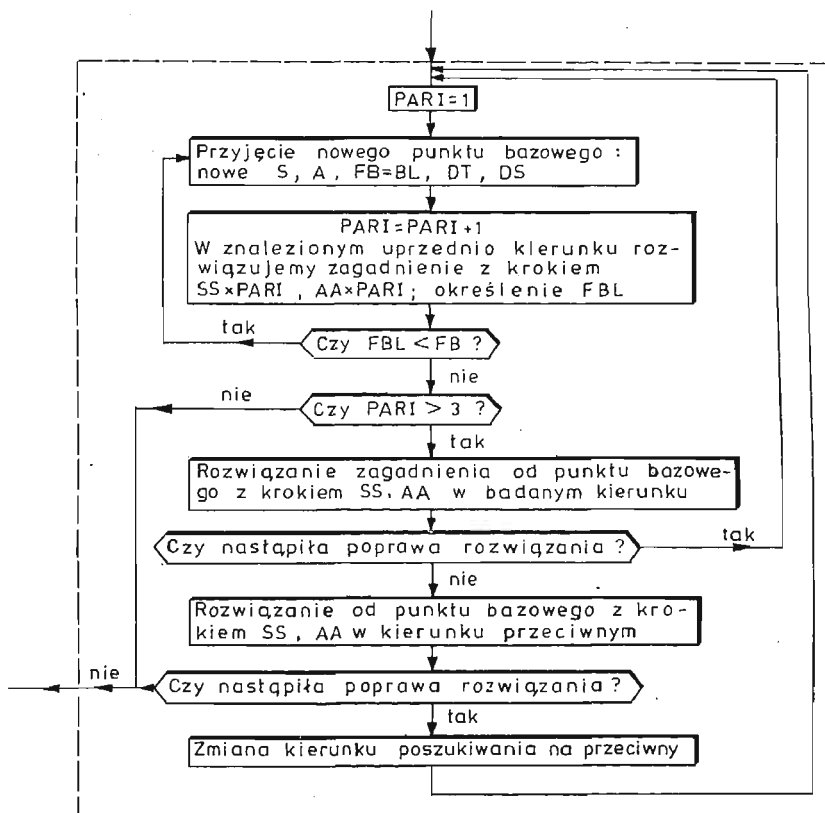
Na rys. 2 podano algorytm obliczeń programu wykorzystanego w pracy, który jest zamieszczony w dodatku. Oddzielnie na rys. 3 i 4 rozpisane zostały fragmenty tej procedury dotyczące poszukiwania kierunku największego spadku oraz poszukiwania minimum na tym kierunku. Algorytm obliczeń z rys. 3, 2 i 4 ma na celu ułatwienie ewentualnemu użytkownikowi korzystania z załączonego programu (obliczenia wykonywano na HP 86B w języku Basic).



Rys. 2. Algorytm obliczeń wyznaczania kształtu powierzchni swobodnej



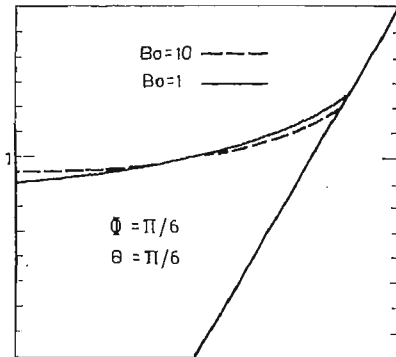
Rys. 3. Algorytm procedury wyznaczenia kierunku największego spadku



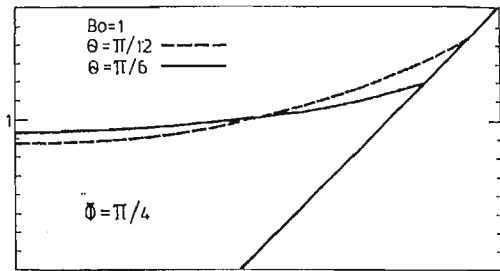
Rys. 4. Algorytm procedury metody przeszukiwania

## 4. Przykładowe wyniki

Przedstawiona metoda wyznaczania powierzchni swobodnej może być wykorzystana dla powierzchni wypukłych zarówno w dodatnim ( $A > S$ ) jak i ujemnym ( $A < S$ ) kierunku osi układu biegunowego. Przykładowe przebiegi powierzchni swobodnych pokazano na rys. 5 i 6. Na rys. 5 przedstawiono powierzchnie swobodne dla równych kątów

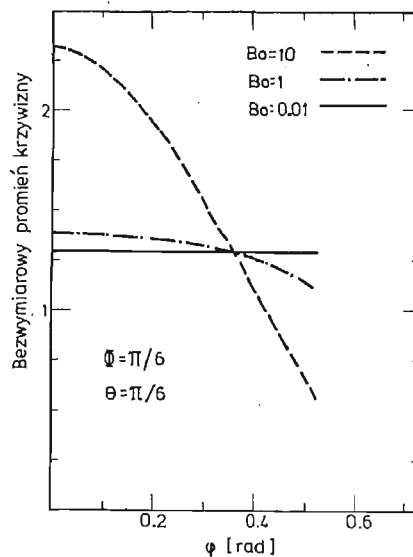


Rys. 5. Profile powierzchni swobodnej dla różnych liczb Bonda



Rys. 6. Profile powierzchni swobodnych dla różnych kątów zwilżenia

zwilżenia i różnych liczb Bonda. Na rys. 6 przedstawiono sytuację odwrotną. W celu oszacowania błędu wynikającego z założenia stałego promienia krzywizny [1] na rys. 7 przedstawiono zależności promienia krzywizny od współrzędnej biegunowej  $\varphi$  dla róż-

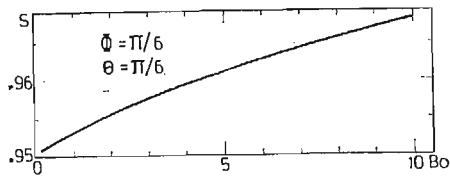


Rys. 7. Bezwymiarowe promienie krzywizny dla różnych liczb Bonda

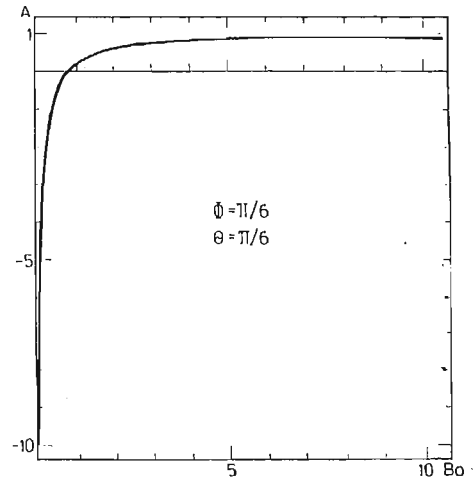


nych liczb Bonda. Z przebiegów można stwierdzić, że popełniony błąd jest niewielki jeżeli liczba Bonda jest mniejsza od 1. Dla większych liczb Bonda błąd ten znacznie rośnie.

Używany przez autorów program wymaga określenia wyjściowej pary parametrów  $A$  i  $S$ . Trafność ich doboru decyduje o szybkości osiągnięcia zadowalających wyników a tę pierwszą ułatwia znajomość charakteru zmian tych wielkości w funkcji liczby Bonda. Przykładowe zależności pokazujące jak zmieniają się parametry  $A$  i  $S$  w funkcji liczby Bonda przedstawiono na rys. 8 i 9. Znajomość jakościowych zależności tych parametrów może być wykorzystana w trakcie obliczeń dotyczących innych kątów rozwarcia  $\Phi$  i zwilżania  $\Theta$ .



Rys. 8. Zależność wysokości cieczy w środku rowka od liczby Bonda



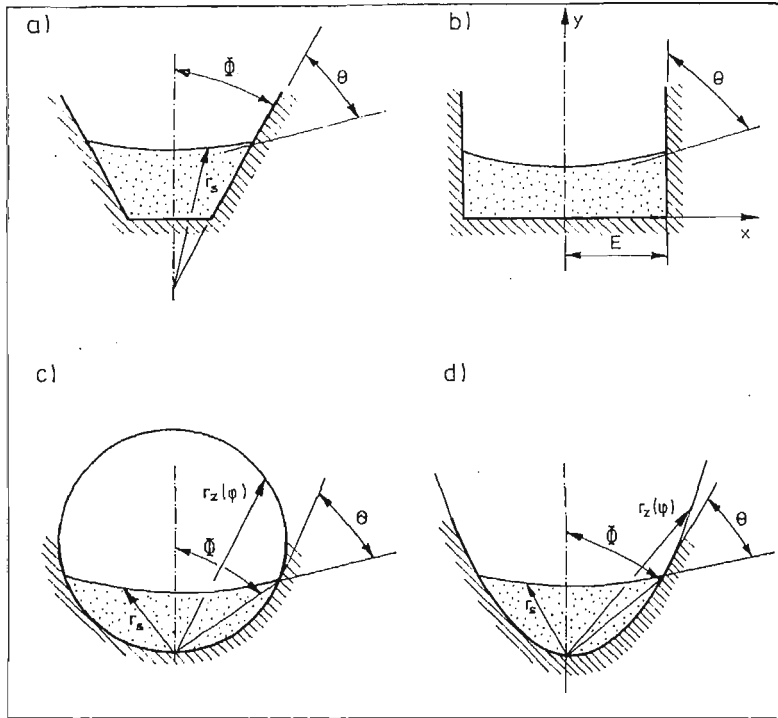
Rys. 9. Zależność parametru  $A$  od liczby Bonda

## 5. Uwagi końcowe

Przedstawiona procedura umożliwia określenie powierzchni swobodnej cieczy w trójkątnym rowku dla dowolnych kątów rozwarcia i zwilżenia oraz dowolnej liczby Bonda. Próby pokazały, że procedura jest zbieżna względem wyboru punktu początkowego  $A$  i  $S$  oraz liczby kroków całkowania. Stosunkowo szybki proces rozwiązywania numerycznego umożliwia wykorzystanie procedury do analizy wpływu poszczególnych wielkości (np. liczby Bonda, kąta zwilżenia, kąta rozwarcia) na kształt powierzchni i pozostałe parametry.

Przedstawiony algorytm postępowania może być względnie łatwo adaptowany do wyznaczania powierzchni swobodnej w rowkach o innych kształtach niż trójkątny, których przykłady zostały przedstawione na rys. 10. Modyfikacja załączonego programu jest uzależniona od kształtu rowka. Dla przypadku a) należy zmienić jedynie wzór na pole powierzchni pod krzywą. W przypadku, b) wygodniej jest zastosować kartezjański

układ współrzędnych w miejsce biegunowego. Zmienia się wówczas postać równania różniczkowego (na prostszą) oraz zamiast granicznej współrzędnej kątowej  $\Phi$  jest współrzędna kartezjańska  $E$ . Dla przedstawionych na rys. 10 przypadków c) i d) rozwiązania należy wyznaczać we współrzędnych biegunowych (tak jak w załączonym programie)



Rys. 10. Przykłady zagadnień możliwych do rozwiązania przy pomocy przedstawionej procedury

przy czym proces całkowania w metodzie Rungego-Kutty należy przerwać w chwili gdy powierzchnia swobodna przecina zadany profil rowka, tzn.  $\Phi$  jest rozwiązaniem równania  $R_s(\varphi) = r_z(\varphi)$

Możliwe byłoby również zastosowanie proponowanej metody do optymalizacji. Przykładowo można poszukiwać największej powierzchni swobodnej (powierzchni wymiany) w funkcji kąta rozwarcia rowka, pola pod krzywą, liczby Bonda.

## 6. Dodatek. Program obliczeń w języku Basic

```

10 ! Program wyznaczający kształt powierzchni swobodnej cieczy
20 ! przy przepływie grawitacyjnym w trójkątnym rowku
30 RAD ! wszystkie obliczenia będą przeprowadzane w radianach
40 ! TH - kat zwilżenia; AL - kat rozwarcia rowka (dane w linii 60)

50 READ TH,AL
60 DATA .523598775598,.785398163398
70 SKAT=PI /8
80 READ BO ! BO - bezwymiarowa liczba Bond'a (dana w linii 90)
90 DATA 1
100 RN,CN=0
110 TA=TAN (AL) @ TT=TAN (TH)
120 CLEAR
130 ! wprowadzanie punktu startowego
140 DISP "S,A,SS,AA,NF=";@ INPUT S,A,SS,AA,NF
150 FARN=0
160 C=A @ Y(1)=S @ GOSUB ROZW
170 DISP "S=";S;"A=";A;"FBL=";FBL;"DT=";DDT;"DS=";DDS @ DISP "Czy p
rogram ma już liczyć";@ INPUT A#
180 IF A##"TAK" THEN 140
190 DT=DDT @ DS=DDS @ FB=FBL @ PRINT "S=";S;"A=";A;"FBL=";FBL;"DT="
;DDT;"DS=";DDS
200 DISP "S=";S;"A=";A;"FBL=";FBL;"DT=";DDT;"DS=";DDS
210 GOSUB SPR @ IF FARN=1 THEN GOTO 150
220 BL=INF
230 ! Początek procedury optymalizującej
240 ! Punkt wejścia algorytmu (rys. 2)
250 FOR Q=0 TO 12 STEP 4
260 KATA=Q*SKAT
270 C=A+AA*COS (KATA) @ Y(1)=S+SS*SIN (KATA)
280 IF S>Y(1) THEN NK
290 IF Y(1)>1 THEN NK
300 GOSUB ROZW
310 IF BL>FBL THEN KAT=KATA @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ BL=FBL
320 NK: NEXT Q
330 KATA=KAT @ GOTO 560
340 IF BL>FB THEN AA=AA*.2 @ SS=SS*.2 @ DISP "zmiana kroku AA,SS=";
AA;SS @ GOTO 220
350 ! Procedura przeszukiwania kierunku
360 FARI=1
370 AR: A=A+AA*COS (KAT)*FARI @ S=S+SS*SIN (KAT)*FARI
380 FB=BL @ DT=KDT @ DS=KDS @ FARI=FARI+1
390 C=A+AA*COS (KAT)*FARI @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT)*FARI
400 GOSUB ROZW
410 IF FBL<FB THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ GOTO AR
420 IF FARI>3 THEN C=A+AA*COS (KAT) @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT) @ GOSUB R
OZW ELSE GOTO 470
430 IF FBL<FB THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ FARI=1 @ GOTO AR
440 IF FARI>3 THEN C=A-AA*COS (KAT) @ Y(1)=S-SS*SIN (KAT) @ GOSUB R
OZW
450 IF FBL<FB THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ FARI=1 @ KAT=(KAT+F
I ) MOD (2*PI ) @ GOTO AR
460 ! Koniec procedury przeszukiwania kierunku

```

```

470 NI: DISP "S=";S;"A=";A,"FBL=";FBL;"DT=";DDT;"DS=";DDS
480 GOSUB SFR @ IF PARN=1 THEN GOTO 150
490 ! Punkt We2 algorytmu (rys. 2)
500 KATA=(KAT+4*SKAT) MOD (2*PI )
510 C=A+AA*COS (KATA) @ Y(1)=S+SS*SIN (KATA)
520 GOSUB ROZW @ BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS
530 KATB=(KAT+12*SKAT) MOD (2*PI )
540 C=A+AA*COS (KATB) @ Y(1)=S+SS*SIN (KATB)
550 GOSUB ROZW @ IF BL>FBL THEN KATA=KATB @ BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS
=DDS
560 ZKAT=SKAT
570 KAT1=(KATA+ZKAT) MOD (2*PI )
580 C=A+AA*COS (KAT1) @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT1)
590 GOSUB ROZW @ IF FBL<BL THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ GOTO
660
600 ZKAT=-SKAT
610 KAT1=(KATA+ZKAT) MOD (2*PI )
620 C=A+AA*COS (KAT1) @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT1)
630 GOSUB ROZW @ IF FBL<BL THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ GOTO
660
640 IF BL>FB THEN AA=AA*.2 @ SS=SS*.2 @ DISP "zmiana kroku AA,SS=";
AA;SS @ GOTO 220
650 KAT=KATA @ GOTO 360
660 KATA=KAT1 @ KAT1=(KATA+ZKAT) MOD (2*PI )
670 C=A+AA*COS (KAT1) @ Y(1)=S+SS*SIN (KAT1)
680 GOSUB ROZW @ IF FBL<BL THEN BL=FBL @ KDT=DDT @ KDS=DDS @ GOTO
660
690 IF BL>FB THEN AA=AA*.2 @ SS=SS*.2 @ DISP "zmiana kroku AA,SS=";
AA;SS @ GOTO 220
700 KAT=KATA @ GOTO 360
710 ! Sprawdzenie dokladnosci uzyskanego wyniku
720 SFR: IF ABS (DT)>.0001 OR ABS (DS)>.0001 THEN RETURN
730 IF ABS ((RN-S)/S)>.001 OR ABS ((CN-A)/A)>.001 THEN DISP "zmiana
kroku calkowania NP";NP*2
740 IF ABS ((RN-S)/S)>.001 OR ABS ((CN-A)/A)>.001 THEN PARN=1 @ RN=
S @ CN=A @ NP=2*NP @ PRINT "zmiana kroku calkowania NP";NP @ RETURN

750 DISP " ***** KONIEC OBLICZEN *****"
760 GOTO KONIEC
770 ! Procedura rozwiazywania problemu poczatkowego
780 ! przy pomocy metody Rungego-Kutty
790 ROZW:
800 H=AL/NP @ M,KR,X=0 @ Y(2)=0 @ G1=Y(1) @ POLB,G2=0
810 LD: M=M+1
820 ON M GOTO A ,B ,C ,L ,E
830 A: FOR I=1 TO 2
840 Q(I)=0
850 NEXT I
860 U=.5
870 GOTO F
880 D: U=1.707107
890 B: X=X+.5*H
900 C: FOR I=1 TO 2
910 Y(I)=Y(I)+U*(F(I)*H-Q(I))
920 Q(I)=2*U*H*F(I)+(1-3*U)*Q(I)
930 NEXT I
940 U=.2928932
950 GOTO F

```

```

960 E: FOR I=1 TO 2
970 Y(I)=Y(I)+H*F(I)/6-Q(I)/3
980 NEXT I
990 M=0 @ K=2
1000 GOTO G
1010 F: K=1
1020 G: IF K=2 THEN K
1030 F(1)=Y(2)
1040 F(2)=Y(1)+2*Y(2)*Y(2)/Y(1)+B0*(COS (X)-C/Y(1))*SQR (Y(1)*Y(1)+
Y(2)*Y(2))^3
1050 GOTO LD
1060 K: AB=Y(1)*COS (X) @ AC=Y(1)*SIN (X)
1070 POLB=POLB+(AB+G1)*(AC-G2)
1080 G1=AB @ G2=AC @ KR=KR+1
1090 IF KR<NF THEN LD
1100 TZ=Y(1)/Y(2) @ DDT=(TZ-TT)/TT @ DDS=(FOL }-AB*AC-TA)/TA @ FBL=D
DT*DDT+DDS*DDS
1110 RETURN
1120 ! Zakonczenie obliczen i wydruk wynikow
1130 KONIEC:
1140 PRINT "OBLICZENIA DLA LICZBY BONDA";B0
1150 PRINT @ PRINT
1160 PRINT "OBLICZENIA DLA NF=";NF
1170 PRINT "WIELKOSC FUNKCJI BLEDU";FB
1180 PRINT "BLAD POLA";DS,"BLAD KATA";DT
1190 PRINT "OBLICZONE WIELKOSCI:"
1200 PRINT "  promien poczatku krzywej S";S
1210 PRINT "  punkt rownowagi cisnien A ";A
1220 STOP
1230 END

```

#### Literatura

1. P. S. AYYASWAMY, I. CATTON, D. K. EDWARDS, *Capillary Flow in Triangular Grooves*, Transactions of the ASME, vol 41, no 1, 332 - 336, (1974).
2. J. SIEKMANN, W. SCHEIDLER, P. TIETZE, *Static Meniscus Configurations in Propellant Tanks under, Reduced Gravity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 28, 103 - 116, (1981).
3. F. M. WHITE, *Viscous Fluid Flow*, Mc Graw-Hill Company, 1974.
4. W. FINDEISEN, J. SZYMAŃSKI, A. WIERZBICKI, *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, Warszawa, PWN, 1980.

#### Резюме

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ТРЕХУГОЛЬНОЙ КАНАВКЕ

В работе получено, при помощи числового метода, решение уравнения Лапласа-Янга для свободной поверхности. Эту поверхность характеризуют три независимые параметра: угол канавки, критерий Бонда и угол увлажнения. Описано метод, подано некоторые результаты и также программу, при помощи которой сделано вычисления на ЭВМ.

## S u m m a r y

## DETERMINATION OF FREE SURFACE OF LIQUID IN A TRIANGULAR GROOVE

Solutions to the Laplace—Young equation for free surface are obtained by proposed numerical method of minimalization. The three independent parameters, which characterize the free surface configuration are the half angle of the liquid-filled triangular groove, the Bond number and the contact angle of the shear-free meniscus. The results and program of calculations in Basic on HP 86B are given in the paper.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 stycznia 1987 roku.*

---