MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 26, 1988

SKRĘPOWANE SKRĘCANIE PRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW O BISYMETRYCZNYCH, ZWARTYCH PRZEKROJACH

KRYSTYNA MAZUR-ŚNIADY

Politechnika Wrocławska

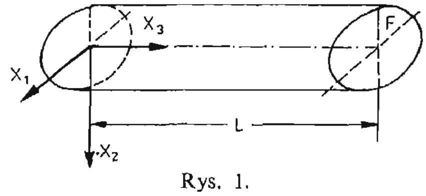
Przedstawiona w niniejszej pracy techniczna teoria skrępowanego skręcania pryzmatycznych prętów o bisymetrycznych, zwartych przekrojach została wyprowadzona w ramach mechaniki analitycznej kontinuum materialnego Cz. Woźniaka [1].

Znane teorie skręcania skrępowanego prętów o zwartych przekrojach bazowały na klasycznej teorii sprężystości uzupełnionej dodatkowymi hipotezami, ograniczając się z konieczności do konkretnych kształtów przekroju poprzecznego (np.: elipsy [2], prostokąta [3]). Szczególną trudność sprawiała realizacja sztywnego utwierdzenia całego przekroju podporowego, na co zwracał uwagę W. Burzyński [4].

Sposób podejścia do zagadnienia stosowany w niniejszej pracy jest oryginalny, otrzymana teoria jest wewnętrznie niesprzeczna. Pojęcie więzów pozwala na przyjęcie zupełnie dowolnych warunków brzegowych, a ponadto pozwala na weryfikację otrzymanych wyników.

1. Wyprowadzenie równań[1)]

Przedmiotem rozważań jest pręt, zajmujący w konfiguracji odniesienia obszar $\Omega = F \times P$, gdzie F jest jednospójnym obszarem na płaszczyźnie OX_1X_2, ograniczonym krzywą odcinkami gładką, symetrycznym względem osi X_1 i X_2, a P jest odcinkiem $\langle 0, L \rangle$ osi X_3 kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych (rys. 1.).



Rys. 1.

[1)] Wskaźniki greckie α, β przebiegają ciąg 1, 2, wskaźniki łacińskie i, j, m przebiegają ciąg 1, 2, 3 Obowiązuje umowa sumacyjna względem wszystkich wskaźników. Przecinek poprzedzający wskaźnik oznacza pochodną cząstkową względem odpowiedniej współrzędnej materialnej, kropka nad symbolem oznacza pochodną względem czasu. Kropka między symbolami oznacza iloczyn skalarowy wektorów i macierzy, natomiast mnożenie macierzy przez macierz i macierzy przez wektor zapisuje się bez użycia znaku działania.

Pręt jest utwierdzony w przekroju $X_3 = 0$.

Gęstość masy pręta oznacza się $\varrho = \varrho(X)$, pole zewnętrznych obciążeń masowych $b = (b_1, b_2, b_3)$, zaś pole zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $p = (p_1, p_2, p_3)$.

Równania ogólnej teorii skręcania prostych pryzmatycznych prętów wyprowadzone na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1] przedstawiono w [5].

Teoria ta opiera się na założeniu nieodkształcalności rzutów przekrojów poprzecznych pręta na płaszczyzny prostopadłe do osi pręta, co realizują więzy wewnętrzne narzucone na funkcję deformacji $\chi(X, t)$:

$$\chi^m_{,\alpha}\chi_{m,\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{1.1}$$

gdzie: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 \text{ dla } \alpha \neq \beta, \\ 1 \text{ dla } \alpha = \beta. \end{cases}$

Wyrażając funkcję deformacji za pomocą wektora przemieszczenia $u = \chi - X$, otrzymuje się po linearyzacji i scałkowaniu:

$$\begin{aligned} u_1 &= \psi_1 - \varphi X_2, \\ u_2 &= \psi_2 + \varphi X_1, \\ u_3 &= \zeta, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie: $\varphi = \varphi(X_3, t)$, $\psi_\alpha = \psi_\alpha(X_3, t)$, $\zeta = \zeta(X_1, X_2, X_3, t)$ są dowolnymi, niezależnymi, różniczkowalnymi funkcjami wszystkich argumentów, pełniącymi rolę współrzędnych uogólnionych. Funkcja φ jest kątem obrotu, ψ_α są przesunięciami rzutu przekroju pręta na płaszczyznę OX_1X_2, funkcja ζ opisuje spaczenie przekroju. Dla prostego, pryzmatycznego pręta zasadę idealności więzów [1] można napisać w postaci:

$$\int_0^L \Big[\int_{\partial F} s \cdot \delta\chi d(\partial F) + \int_F \varrho r \cdot \delta\chi dF\Big] dX_3 + \Big[\int_F s \cdot \delta\chi dF\Big]\Big|_{X_3=0,\ X_3=L} = 0, \tag{1.3}$$

gdzie s oznacza brzegowe, natomiast r masowe siły reakcji więzów.
Eliminując z (1.3) reakcje więzów za pomocą równań ruchu

$$\operatorname{div} T + \varrho b + \varrho r = \varrho\ddot{\chi}, \tag{1.4}$$

(gdzie T jest pierwszym tensorem ekstra naprężenia Pioli-Kirchhoffa i wyraża reakcję materiału ciała na stan odkształcenia) oraz warunków brzegowych:

$$Tn = p + s, \tag{1.5}$$

(gdzie n jest jednostkowym wektorem zewnętrznie normalnym do $\partial\Omega$) oraz podstawiając składowe przemieszczeń wirtualnych (z uwzględnieniem (1.2)) otrzymano w [5] równania ruchu i warunki brzegowe dla współrzędnych uogólnionych.

W pracy [6] otrzymano równania teorii skręcania skrępowanego prętów o zwartych przekrojach poprzez narzucenie na ruch pręta opisany w [5] dodatkowych więzów wewnętrznych i warunków brzegowych.

W niniejszej pracy zawężamy rozważania, ograniczając je do prętów o bisymetrycznych przekrojach poprzecznych. Dodatkowe więzy wewnętrzne, narzucone na funkcję spaczenia przekroju przyjmuje się w postaci:

$$\zeta - \varepsilon X_1 X_2 = 0, \tag{1.6}$$

gdzie $\varepsilon = \varepsilon(X_3, t)$ jest nową współrzędną uogólnioną, określającą stopień skrępowania skręcania wzdłuż długości pręta.

Utwierdzenie pręta uniemożliwia przemieszczenia punktów przekroju $X_3 = 0$ (przekrój podporowy nie paczy się, nie wykonuje obrotu i nie przesuwa się w płaszczyźnie OX_1X_2), co realizują geometryczne więzy brzegowe

$$\begin{aligned} \varepsilon(0, t) &= 0, \\ \varphi(0, t) &= 0, \\ \psi_\alpha(0, t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

W wyniku wprowadzenia dodatkowych więzów (1.6) i (1.7) powstają dodatkowe siły reakcji więzów, które analogicznie jak w pracy [3], wprowadza się do równań ruchu ((2.1) w [5]):

$$\begin{aligned} &T^{3j}_{,j} + \varrho b_3 + R_3 = \varrho\ddot{\chi}_3, \\ &Q_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F \varrho b_\alpha dF + R_{\psi_\alpha} = \int_F \ddot{\chi}_\alpha dF, \\ &M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2X_1 - p_1X_2) d(\partial F) + \int_F \varrho(b_2X_1 - b_1X_2) dF + R_\varphi = \int_F \varrho(\ddot{\chi}_2X_1 - \ddot{\chi}_1X_2) dF, \end{aligned} \tag{1.8}$$

oraz do warunków brzegowych ((2.3) w [5]):

$$\begin{aligned} &T^{3\alpha}n_\alpha - p_3 = \mathring{S}_3 && \text{dla} \quad X_1, X_2 \in \partial F, \\ &T^{33}n_3 - p_3 = S_3 && \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ &Q_\alpha n_\alpha - \int_F p^\alpha dF = S_{\psi_\alpha} && \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ &M_3n_3 - \int_F (p_2X_1 - p_1X_2) dF = S_\varphi && \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \end{aligned} \tag{1.9}$$

gdzie $Q_\alpha \equiv \int_F T^{\alpha 3} dF$, $M_3 \equiv \int_F (T^{23}X_1 - T^{13}X_2) dF$.

Następnie korzysta się z zasady idealności dla więzów dodatkowych:

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big\{ \int_{\partial F} \mathring{S}_3 \delta\zeta d(\partial F) + \int_F R_3 \delta\zeta dF + R_{\psi_1} \delta\psi_1 + R_{\psi_2} \delta\psi_2 + R_\varphi \delta\varphi \Big\} dX_3 + \\ &+ \Big[\int_F S_3 \delta\zeta dF + S_{\psi_1} \delta\psi_1 + S_{\psi_2} \delta\psi_2 + S_\varphi \delta\varphi \Big] \Big|_{\substack{X_3=0, \\ X_3=L.}} = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Składowe przemieszczeń wirtualnych po uwzględnieniu (1.2) i (1.6) przybierają postać:

$$\begin{aligned} \delta\chi_1 &= -X_2 \delta\varphi + \delta\psi_1, \\ \delta\chi_2 &= X_1 \delta\varphi + \delta\psi_2, \\ \delta\chi_3 &= X_1 X_2 \delta\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Eliminując z (1.10) dodatkowe siły reakcji więzów za pomocą (1.8) i (1.9) oraz stostosując lemat du Bois-Reymonda i twierdzenie o divergencji otrzymuje się następujący układ równań ruchu

$$\begin{aligned}
&\int_F [T^{33}_{,3} X_1 X_2 - T^{3\alpha}(X_1 X_2)_{,\alpha}]\,dF + \int_{\partial F} p_3 X_1 X_2\, d(\partial F) + \\
&+ \int_F \varrho b_3 X_1 X_2\, dF = \int_F \varrho \ddot{\varepsilon} X_1^2 X_2^2\, dF, \\
&\int_F T^{13}_{,3}\, dF + \int_{\partial F} p_1\, d(\partial F) + \int_F \varrho b_1\, dF = \int_F \varrho(\ddot{\psi}_1 - \ddot{\varphi} X_2)\, dF, \\
&\int_F T^{23}_{,3}\, dF + \int_{\partial F} p_2\, d(\partial F) + \int_F \varrho b_2\, dF = \int_F \varrho(\ddot{\psi}_2 + \ddot{\varphi} X_1)\, dF, \\
&\int_F (T^{23}_{,3} X_1 - T^{13}_{,3} X_2)\, dF + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2)\, d(\partial F) + \\
&+ \int_F \varrho(b_2 X_1 - b_1 X_2)\, dF = \int_F \varrho[\ddot{\psi}_2 X_1 - \ddot{\psi}_1 X_2 + \ddot{\varphi}(X_1^2 + X_2^2)]\, dF,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

oraz warunki brzegowe dla $X_3 = 0$ i $X_3 = L$:

$$\begin{aligned}
&\int_F (T^{33} n_3 - p_3) X_1 X_2\, dF = 0, \\
&\int_F T^{\alpha 3} dF n_3 - \int_F p_\alpha\, dF = 0, \\
&\int_F (T^{23} X_1 - T^{13} X_2)\, dF n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2)\, dF = 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

W dalszym ciągu ogranicza się rozważania do jednorodnych, izotropowych materiałów, dla których:

$$\begin{aligned}
&T^{11} = T^{22} = C^{1133}\zeta_{,3} = \lambda X_1 X_2\, \varepsilon_{,3}, \\
&T^{12} = T^{21} = C^{1233}\zeta_{,3} = 0, \\
&T^{13} = T^{31} = C^{1313}(\zeta_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3} X_2) = \mu(X_2\, \varepsilon + \psi_{1,3} - X_2\, \varphi_{,3}), \\
&T^{23} = T^{32} = C^{2323}(\zeta_2 + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1) = \mu(X_1\, \varepsilon + \psi_{2,3} + X_1\, \varphi_{,3}), \\
&T^{33} = C^{3333}\zeta_{,3} = (\lambda + 2\mu) X_1 X_2\, \varepsilon_{,3}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Podstawiając (1.14) do (1.12) otrzymuje się układ czterech równań różniczkowych dla czterech współrzędnych uogólnionych:

$$\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu) I \varepsilon_{,33} - \mu I_0\, \varepsilon - \mu I_s \varphi_{,3} + \int_{\partial F} p_3 X_1 X_2\, d(\partial F) + \varrho \int_F b_3 X_1 X_2\, dF = \varrho I \ddot{\varepsilon}, \\
&\mu I_s\, \varepsilon_{,3} + \mu I_0\, \varphi_{,33} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2)\, d(\partial F) + \varrho \int_F (b_2 X_1 - b_1 X_2)\, dF = \varrho I_0\, \ddot{\varphi}, \\
&\mu F \psi_{\alpha,33} + \int_{\partial F} p_\alpha\, d(\partial F) + \varrho \int_F b_\alpha\, dF = \varrho \ddot{\psi}_\alpha F,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

natomiast po podstawieniu do (1.13) otrzymuje się warunki brzegowe dla $X_3 = 0$ i $X_3 = L$:

$$(\lambda+2\mu)I\varepsilon_{,3}n_3 - \int_F p_3 X_1 X_2 dF = 0,$$

$$\mu(I_s\varepsilon + I_0\varphi_{,3})n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2)dE = 0, \tag{1.16}$$

$$\mu F\psi_{\alpha,3}n_3 - \int_F p_1 dF = 0,$$

gdzie $I_1 = \int_F X_2^2 \mathrm{dF}$ i $I_2 = \int_F X_1^2 \mathrm{dF}$ są głównymi, centralnymi momentami bezwładności przekroju, $I_0 = I_1 + I_2$, $I_s = I_2 - I_1$, $I = \int_F X_1^2 X_2^2 dF$.

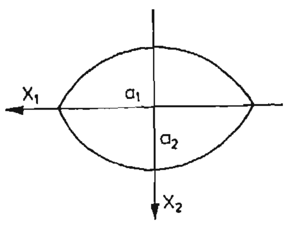
Po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych ε, φ, ψ_α z równań ruchu (1.15) i warunków brzegowych (1.16) uwzględniając sposób podparcia pręta (1.7) można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_i(X, t)$ z (1.2) i (1.6), składowe stanu naprężenia T^{ij} z (1.14), siły reakcji więzów ze wzorów (1.4) i (1.5) oraz dodatkowe siły reakcji więzów z zależności (1.8) i(1.9).

Stosując kryterium fizycznej poprawności więzów modelowych, przedstawione w pracy [1], należy pamiętać o tym, że modelowymi są tylko więzy opisane za pomocą zależności (1.2) i (1.6), natomiast geometryczne warunki brzegowe (1.7) są więzami fizycznymi.

Należy zauważyć, że układ równań (1.15) ma złożoną budowę i w ogólnym przypadku efektywne rozwiązanie można otrzymać na drodze numerycznej. Tylko w szczególnych przypadkach można otrzymać rozwiązanie analityczne, np. dla pręta o przekroju eliptycznym. Jest to temetem rozważań następnego rozdziału pracy.

2. Skręcanie wspornika o przekroju eliptycznym

Rozpatruje się pryzmatyczny, jednorodny, izotropowy pręt o długości L i przekroju poprzecznym w kształcie elipsy (rys. 2.). Osie X_1, X_2 układu współrzędnych kartezjańskich $OX_1X_2X_3$ są zarazem głównymi, centralnymi osiami bezwładności przekroju. Pręt jest



Rys. 2.

sztywno utwierdzony w przekroju $X_3 = 0$, natomiast na swobodnym końcu obciążony jest w sposób statyczny momentem skręcającym $M_s = \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF$; $\left(\int_F p_1 dF = 0,\right.$ $\left.\int_F p_2 dF = 0\right)$. Pomija się wpływ zewnętrznych obciążeń masowych.

Uwzględniając sposób obciążenia pręta otrzymuje się układ równań (1.15) z niewiadomymi współrzędnymi uogólnionymi $\varepsilon(X_3)$, $\varphi(X_3)$, $\psi_\alpha(X_3)$ w postaci układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych sprzężonych i dwóch równań różniczkowych zwyczajnych separowanych.

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)I\varepsilon_{,33}-\mu I_0\varepsilon-\mu I_s\varphi_{,3}=0,\\
&I_s\varepsilon_{,3}+I_0\varphi_{,33}=0,\\
&\psi_{\alpha,33}=0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

natomiast warunki brzegowe (1.16) dla $X_3 = 0$ w postaci:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)I\varepsilon_{,3}+\int_F p_3X_1X_2\,dF=0,\\
&\mu I_s\varepsilon+\mu I_0\varphi_{,3}+\int_F (p_2X_1-p_1X_2)\,dF=0,\\
&\mu F\psi_{\alpha,3}+\int_F p_\alpha\,dF=0,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

zaś dla $X_3 = L$ w postaci:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{,3}=0,\\
&\mu I_s\varepsilon+\mu I_0\varphi_{,3}-M_s=0,\\
&\psi_{\alpha,3}=0.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Utwierdzenie pręta w przekroju podporowym realizują geometryczne więzy brzegowe:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(0)=0,\\
&\varphi(0)=0,\\
&\psi_\alpha(0)=0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Rozwiązując układ równań (2.1) przy uwzględnieniu (2.2), (2.3) i (2.4) otrzymuje się współrzędne uogólnione:

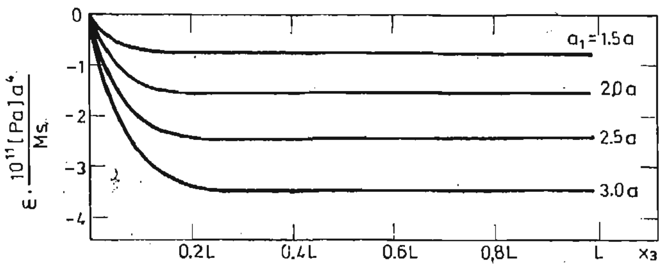
$$
\begin{aligned}
&\varepsilon=-\underline{\frac{M_sI_s}{\mu(I_0^2-I_s^2)}}+\frac{M_sI_s}{\mu(I_0^2-I_s^2)}[\mathrm{ch}(kX_3)-\mathrm{th}(kL)\,\mathrm{sh}(kX_3)],\\
&\varphi=\underline{\frac{M_sI_0}{\mu(I_0^2-I_s^2)}X_3}+\frac{M_sI_s^2}{k\mu I_0(I_0^2-I_s^2)}\{-\mathrm{sh}(kX_3)+\mathrm{th}(kL)[\mathrm{ch}(kX_3)-1]\},\\
&\psi_\alpha\equiv 0,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

gdzie: $k=\sqrt{\dfrac{\mu(I_0^2-I_s^2)}{(\lambda+2\mu)II_0}}$.

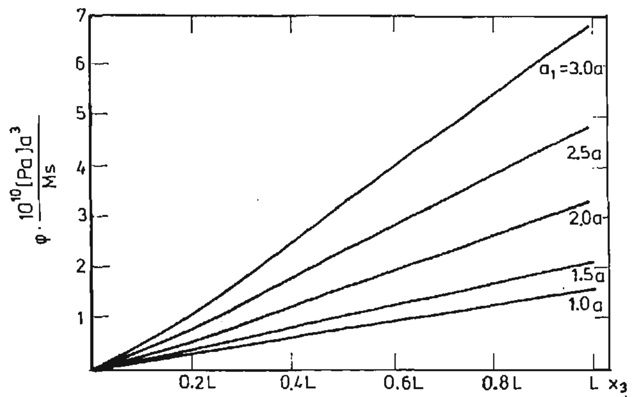
Podkreślone człony w wyrażeniach (2.5) opisujących ε i φ powstają w wyniku skręcania pręta zgodnie z więzami modelowymi (1.2), (1.6), pozostałe są spowodowane narzuceniem więzów fizycznych (2.4) opisujących podparcie pręta. Ten sposób rozróżnienia zachowany zostanie w dalszych rozważaniach.

Przeprowadzono analizę wpływu utwierdzenia i proporcji wymiarów przekroju na funkcje ε i φ. Rozpatrywano pręty z materiału o stałych materiałowych $E = 2{,}1\cdot10^5$ MPa i $\nu = 0{,}3$, o polu powierzchni przekroju poprzecznego równym polu koła o promieniu a. Poziomą półoś elipsy przyjęto kolejno równą a, $1{,}5a$, $2a$, $2{,}5a$, $3a$.

Rys. 3 i 4 przedstawiają wykresy funkcji ε i φ dla prętów o długości $L = 20a$. Funkcja ε osiąga stałą wartość poczynając od współrzędnej $X_3 = 0{,}3L$, natomiast φ staje się liniowa poczynając od $X_3 = 0{,}2L$.



Rys. 3.



Rys. 4.

Podobny charakter wykresów otrzymano dla większych długości pręta (z przedziału $\langle 20a, 40a \rangle$) — wykresy stawały się liniowe w odpowiednio proporcjonalnych odległościach od przekroju utwierdzenia.

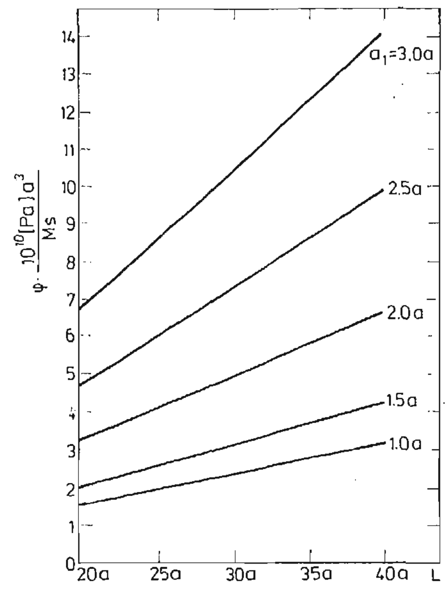
Stwierdzono, że długość pręta praktycznie nie ma wpływu na wartości funkcji ε — zależą one przede wszystkim od kształtu przekroju.

Inaczej jest w przypadku funkcji φ. Liniową zależność wielkości kąta skręcania końca wspornika od długości pręta dla różnych proporcji wymiarów przekroju elipsy pokazano na rys. 5.

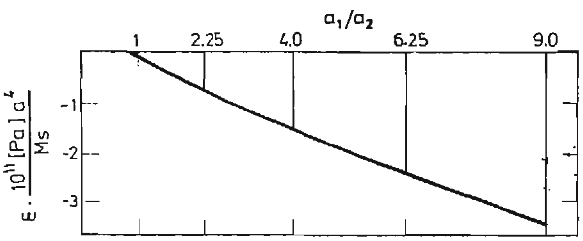
Rys. 6 i 7 przedstawiają wpływ kształtu przekroju na funkcje ε i φ na swobodnym końcu wspornika o długości $20a$.

Na rys. 8 linia krzywa opisuje zmianę kąta φ wyrażonego wzorem (2.5) wzdłuż długości pręta dla wspornika o $L = 20a$, $a_1 = 2a$, zaś linia prosta przedstawia wartości podkreślonego członu w wyrażeniu (2.5) na kąt φ (a więc względny kąt skręcenia w przypadku pręta skręcanego swobodnie).

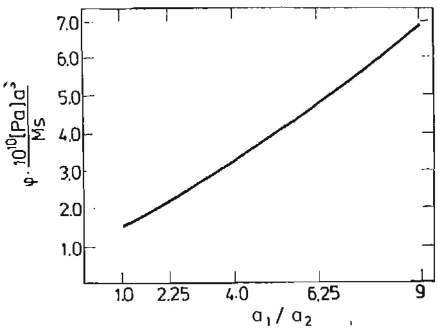
Im bardziej kształt przekroju elipsy odbiega od przekroju kołowego tym większy staje się wpływ zamocowania na ostateczną wartość kąta skręcenia. Rys. 9 przedstawia względną



Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.

różnicę kątów skręcenia w przypadku skręcania swobodnego i skrępowanego dla różnych proporcji półosi elipsy.

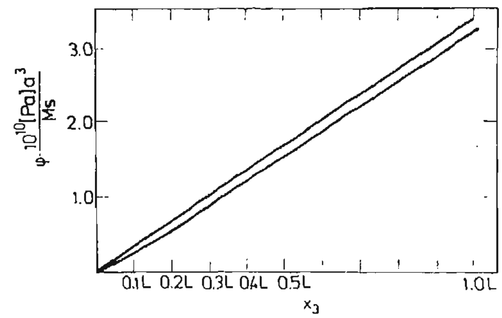
Po podstawieniu (2.5) do (1.14) otrzymuje się składowe stanu naprężenia w następującej postaci:

$$T^{11} = T^{22} = \frac{\lambda M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\mathrm{sh}(kX_3) - \mathrm{th}(kL)\mathrm{ch}(kX_3)]X_1 X_2,$$

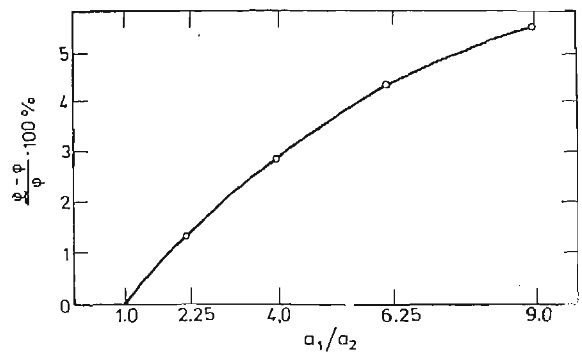
$$T^{12} = 0,$$

$$T^{13} = -\frac{M_s I_0 + I_s}{I_0^2 - I_s^2} X_2 + \frac{M_s I_s(I_0 + I_s)}{I_0(I_0^2 - I_s^2)}$$

$$[\mathrm{ch}(kX_3) - \mathrm{th}(kL)\mathrm{sh}(kX_3)]X_2, \tag{2.6}$$



Rys. 8.



Rys. 9.

$$T^{23} = \frac{M_s(I_0-I_s)}{I_0^2-I_s^2}X_1+\frac{M_sI_s(I_0-I_s)}{I_0(I_0^2-I_s^2)}$$

$$[\mathrm{ch}(kX_3)-\mathrm{th}(kL)\,\mathrm{sh}(kX_3)]X_1,$$

$$T^{33} = \frac{(\lambda+2\mu)M_sI_sk}{\mu(I_0^2-I_s^2)}[\mathrm{sh}(kX_3)-\mathrm{th}(kL)\,\mathrm{ch}(kX_3)]X_1X_2.$$

Podstawiając (2.6) do (1.4) i (1.8) otrzymuje się te siły reakcji więzów, które występują wewnątrz obszaru Ω

$$\varrho r_1 = -T^{1j}_{,j} = -\frac{[I_0\lambda+(I_0+I_s)\mu]M_sI_sk}{\mu I_0(I_0^2-I_s^2)}$$

$$[\mathrm{sh}(kX_3)-\mathrm{th}(kL)\,\mathrm{ch}(kX_3)]X_2,$$

$$\varrho r_2 = -T^{2j}_{,j} = -\frac{[I_0\lambda+(I_0-I_s)\mu]M_sI_sk}{\mu I_0(I_0^2-I_s^2)} \tag{2.7}$$

$$[\mathrm{sh}(kX_3)-\mathrm{th}(kL)\,\mathrm{ch}(kX_3)]X_1,$$

$$R_3 = -T^{3j}_{,j} = -\frac{(\lambda+2\mu)M_sI_sk^2}{\mu(I_0^2-I_s^2)}[\mathrm{ch}(kX_3)-\mathrm{th}(kL)\,\mathrm{sh}(kL)]X_1X_2,$$

$$R_{\varphi_\alpha} = \int\limits_F T^{\alpha 3}_{,3}\, dF \equiv 0, \qquad R_\varphi = \int\limits_F (T^{23}_{,3} X_1 - T^{13}_{,3} X_2)\, dF = 0.$$

Siły reakcji więzów na $\partial\Omega$ można obliczyć podstawiając (2.6) do (1.5) i (1.9).

Na pobocznicy pręta (dla $X_1, X_2 \in \partial F$ i $X_3 \in (0, L)$) otrzymuje się następujące siły reakcji więzów:

$$\begin{aligned}
\mathring{S}_1 &= T^{1\alpha} n_\alpha = \frac{\lambda M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\mathrm{sh}(kX_3) - \mathrm{th}(kL)\mathrm{ch}(kX_3)] X_1 X_2 n_1, \\
\mathring{S}_2 &= T^{2\alpha} n_\alpha = \frac{\lambda M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\mathrm{sh}(kX_3) - \mathrm{th}(kL)\mathrm{ch}(kX_3)] X_1 X_2 n_2, \\
\mathring{S}_3 &= T^{3\alpha} n_\alpha = \underline{\frac{M_s}{I_0^2 - I_s^2} [-(I_0 + I_s) X_2 n_1 + (I_0 - I_s) X_1 n_2]} + \\
&\quad + \frac{M_s I_s}{I_0(I_0^2 - I_s^2)} [\mathrm{ch}(kX_3) - \mathrm{th}(kL)\mathrm{sh}(kX_3)][(I_0 + I_s) X_2 n_1 + (I_0 - I_s) X_1 n_2].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Dla elipsy jak na rys. 2 składowe wektora zewnętrznie normalnego do brzegu mają składowe:

$$n_1 = \frac{a_2^2 X_1}{\sqrt{a_1^4 X_2^2 + a_2^4 X_1^2}}; \quad n_2 = \frac{a_1^2 X_2}{\sqrt{a_1^4 X_2^2 + a_2^4 X_1^2}}, \tag{2.9}$$

w związku z tym podkreślony człon w wyrażeniu $\mathring{S}_3$ jest równy zeru.

W przekrojach końcowych pręta występują następujące siły reakcji więzów:

$$\begin{aligned}
S_1 &= T^{13} n_3 - p_1 = \left\{ \underline{-\frac{M_s X_2}{I_0 - I_s}} + \frac{M_s I_s X_2}{I_0(I_0 - I_s)} [\mathrm{ch}(kX_3) - \mathrm{th}(kL)\mathrm{sh}(kX_3)] \right\} n_3 - p_1, \\
S_2 &= T^{23} n_3 - p_2 = \left\{ \underline{\frac{M_s X_1}{I_0 + I_s}} + \frac{M_s I_s X_1}{I_0(I_0 + I_s)} [\mathrm{ch}(kX_3) - \mathrm{th}(kL)\mathrm{sh}(kX_3)] \right\} n_3 - p_2, \\
S_3 &= T^{33} n_3 - p_3 = \frac{(\lambda + 2\mu) M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} [\mathrm{sh}(kX_3) - \mathrm{th}(kL)\mathrm{ch}(kX_3)] X_1 X_2 n_3 - p_3, \\
S_{\varphi_\alpha} &= \int\limits_F T^{\alpha 3} dF n_3 - \int\limits_F p_\alpha dF \equiv 0, \\
S_\varphi &= \int\limits_T (T^{23} X_1 - T^{13} X_2) dF n_3 - \int\limits_T (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF \equiv 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

W przekroju podporowym ($X_3 = 0$, $n_3 = -1$) otrzymujemy zatem różne od zera siły reakcji więzów:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \underline{\frac{M_s X_2}{I_0 - I_s}} - \frac{M_s I_s X_2}{(I_0 - I_s) I_0} - p_1, \\
S_2 &= \underline{-\frac{M_s X_1}{I_0 + I_s}} - \frac{M_s I_s X_1}{(I_0 + I_s) I_0} - p_2, \\
S_3 &= \frac{(\lambda + 2\mu) M_s I_s k}{\mu(I_0^2 - I_s^2)} \mathrm{th}(kL) X_1 X_2 - p_3,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

natomiast w przekroju $X_3 = L$, $n_3 = 1$ występują następujące siły reakcji więzów:

$$S_1 = -\frac{M_s X_2}{I_0 - I_s} + \frac{M_s I_s X_2}{(I_0 - I_s) I_0 \operatorname{ch}(kL)} - p_1,$$

$$S_2 = \frac{M_s X_1}{I_0 + I_s} + \frac{M_s I_s X_1}{(I_0 + I_s) I_0 \operatorname{ch}(kL)} - p_2, \tag{2.12}$$

$$S_3 \equiv 0.$$

Jak wynika z powyższych obliczeń zastosowane w niniejszej pracy więzy wewnętrzne wywołują siły reakcji więzów modelowych jedynie w końcowych przekrojach pręta. Stanowią one część sił reakcji więzów S_α (dopełnienie stanowią siły reakcji więzów fizycznych, spowodowane sposobem podparcia pręta). Nie jest możliwe rozdzielenie tych sił reakcji, ponieważ nie wiadomo, jaka część siły p_α przypada na więzy modelowe, a jaka na fizyczne.

Przyjmując rozkład obciążenia zewnętrznego w postaci

$$p_1 = -\frac{M_s X_2}{I_0 - I_s} + \frac{M_s I_s X_2}{(I_0 - I_s) I_0 \operatorname{ch}(kL)},$$

$$p_2 = \frac{M_s X_1}{I_0 + I_s} + \frac{M_s I_s X_1}{(I_0 + I_s) I_0 \operatorname{ch}(kL)}, \tag{2.13}$$

(spełnione są warunki $\int\limits_F p_\alpha = 0$, $\int\limits_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF = M_s$), otrzymuje się siły reakcji więzów modelowych i fizycznych na końcu swobodnym (dla $X_3 = L$) równe zeru. Można zatem stwierdzić, że przyjęty model jest dobry i spełnia warunek fizycznej poprawności.

Interesujące jest rozpatrzenie przypadku szczególnego, a mianowicie skręcanego wspornika o przekroju kołowym. Wówczas $a_1 = a_2 = a$, zaś $I_s = 0$. W związku z tym znikają wszystkie siły reakcji więzów modelowych i fizycznych wewnątrz obszaru Ω i na pobocznicy. Pozostają jedynie siły reakcji więzów modelowych na końcach pręta:

$$S_1 = -\frac{M_s X_2}{I_0} n_3 - p_1,$$

$$S_2 = \frac{M_s X_1}{I_0} n_3 - p_2, \tag{2.14}$$

które także znikają na końcu swobodnym w przypadku rozkładu obciążenia zewnętrznego w tym przekroju w postaci:

$$p_1 = -\frac{M_s X_2}{I_0}, \quad p_2 = \frac{M_s X_1}{I_0}. \tag{2.15}$$

Znikanie więzów fizycznych jest w tym przypadku oczywiste. Przekroje pręta okrągłego ze względu na osiową symetrię nie ulegają spaczeniu, w związku z tym jest równa zeru funkcja ε, określająca stopień skrępowania wzdłuż długości pręta, a kąt obrotu φ jest wówczas liniowo zależny od współrzędnej X_3 (tak jak w przypadku skręcania swobodnego).

Literatura

1. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*, Dynamika układów sprężystych — praca zbiorowa, Wrocław 1976.
2. A. i L. FÖPPL, *Drang und Zwang*, Monachium—Berlin 1944, t. 2.
3. J. NOWIŃSKI, *Skręcanie pręta prostopadłościennego, którego jeden przekrój pozostaje płaski*, Arch. Mech. Stos., 1, 1953.
4. W. BURZYŃSKI, *O niedomaganiach i koniecznych uzupełnieniach de Saint-Venantowskiej teorii prętów prostych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, nr 42, Wrocław 1951.
5. K. MAZUR-ŚNIADY, *Some problems of torsion of prismatic rods as bodies with internal constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., sci. techn., 22, 1974, s. 389 - 397.
6. K. MAZUR-ŚNIADY, *Skręcanie pryzmatycznych prętów jako ciał z wewnętrznymi więzami*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 4, 17, 1979, s. 553 - 565.

Praca wykonana w ramach C.P.B.P.01.02.

Р е з ю м е

СТЕСНЁННОЕ КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ О БИСИММЕТРИЧНЫХ СПЛОШНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Темой работы является вывод технической теории стесненного кручения призматических стержней о бисимметричных, сплошных сечениях на основе механики тел с внутренными связями [1]. В примере рассматривается однородную, изотропную консоль о поперечном сечении в виде эллипса. Консоль нагружена крутяшим моментом на свободном конце. Получается аналитическое решение проблемы и анализируется влияние соотношения полуосей эллипса на величины угла кручения и функции стеснения кручения.

S u m m a r y

CONSTRAINED TORSION OF PRISMATIC ROD WITH BISYMMETRIC COMPACT CROSS-SECTION

The aim of the present paper is to derive technical theory of constrained torsion of prismatic rods with bisymmetric compact cross-section on the basis of the theory of bodies with internal constraints [1]. In an example a homogeneous, isotropic cantilever of an elliptic cross-section is studied loaded by a torsion moment in unconstrained cross-section. The analytical solution of the problem is obtained. The influence of the shape of the cross-section on the angle rotation and on constrain function is examined.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 lutego 1987 roku.