

## METODA SUPERELEMENTU W STATYCE UKŁADÓW Z WIĘZAMI JEDNOSTRONNYMI

RYSZARD PISKORSKI

*Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej*

Idea superelementów i rozwiązania operatorowe pewnych układów regularnych pozwoliły otrzymać rozwiązania w postaci zamkniętej zagadnienia statyki mostów pontonowych z więzami jednostronnymi na obroty.

### 1. Wstęp

Pod pojęciem układu z więzami jednostronnymi będzie się rozumieć równania statyki mostów pontonowych, posiadających jednostronne ograniczenia na wzajemne obroty pontonów w połączeniach. Równania te mają postać [2]:

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{K} \cdot z + \mathbf{L} \cdot m, \\ f &\geq \mathbf{L}^T \cdot z, \quad m \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie:  $p$  — wektor obciążeń w węzłach,

$m$  — wektor momentów w punktach zwarcia mostu (reakcje na więzy  $f$ ),

$z$  — wektor ugięć pionowych przegubów,

$f$  — wektor jednostronnych ograniczeń na wzajemne obroty pontonów w przegubach,

$\mathbf{K}$  — macierz sztywności podłoża sprężystego,

$\mathbf{L}$  — macierz struktury układu (operator różnicowy).

Cechą charakterystyczną tego układu są jednostronne więzy w postaci nierówności w (1.1). Więzy te interweniują w postaci reakcji  $m$ , w ten sposób, że  $m > 0$ , gdy  $f = \mathbf{L}^T \cdot z$ . Mówimy wtedy, że pontony są zwarte, tworząc tzw. strefę zwarcia. W ogólnym przypadku obciążenia lokalizacja stref zwarcia nie jest znana i należy ją znajdować drogą dość pracochłonną obliczeń na maszynie cyfrowej. W przypadku, gdy obciążenie mostu skupione jest w pewnym ograniczonym obszarze, wówczas również strefa zwarcia pojawia się w otoczeniu tego obszaru. W takiej sytuacji rozwiązanie układu rozpada się na dwa rozłączne obszary:

a) strefę zwarcia, w której  $m > 0$ ,

b) strefę rozwartą, w której  $m = 0$ .

W strefie zwarcia do wyznaczenia  $z$  z układu (1.1) są ugięcia  $z$  i momenty zwarcia  $m$ .

W strefie rozwarcia tylko ugięcia  $z$  z układu  $p = K \cdot z$ . W punkcie rozdziału obu stref działa siła tnąca wzajemnego oddziaływania w przegubie. Położenie tego punktu nie jest jednak znane 'a priori' i należy je znaleźć z dodatkowego warunku zgodności ugięć.

Takie podejście, mimo niejednoznaczności w sensie długości strefy zwarcia nasuwa pomysł użycia metody dwóch superelementów obejmujących strefę zwarcia i rozwarcia jako rozłączne obiekty do dalszej analizy. Metoda superelementu pozwala bowiem wyeliminować dużą ilość niewiadomych, które do syntezy układu nie są potrzebne. Dotyczy to przede wszystkim strefy rozwartej, która charakteryzuje się zanikającym ciągiem ugięć w miarę oddalania się od punktu przyłożenia siły.

## 2. Półograniczone pasmo pontonów (PPP)

Strefa rozwarta jest półograniczonym ciągiem pontonów, w stanie bezzwarciovym w przegubach, a jedynym obciążeniem zewnętrznym jest siła skupiona na jednym brzegu tej strefy.

Równania (1.1) w przypadku  $n$  jednakowych pontonów sprowadzają się do układu  $p = K \cdot z$ :

$$(3 + \alpha)kz_0 + (3 - \alpha)kz_1 = p_0, \quad (2.1)$$

$$(3 - \alpha)kz_{i-1} + 2(3 + \alpha)kz_i + (3 - \alpha)kz_{i+1} = 0, \quad (2.2)$$

$$(3 - \alpha)kz_{n-1} + (3 + \alpha)kz_n = 0, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.3)$$

gdzie:

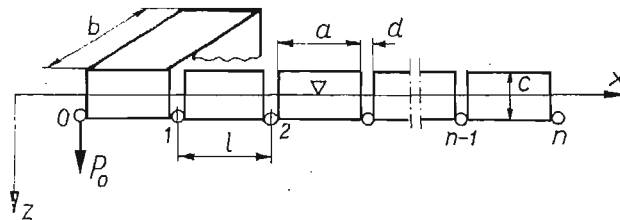
$$k = \frac{\gamma \cdot a \cdot b}{12}, \quad \alpha = \left(\frac{a}{l}\right)^2,$$

$a$  — długość pontonu,

$b$  — szerokość pontonu,

$l$  — odległość między przegubami,

$\gamma$  — ciężar właściwy wody.



Rys. 1.

Układ równań jednorodnych (2.2) z warunkami brzegowymi (2.1) i (2.3) można rozwiązać metodą operatorową [1], zakładając rozwiązanie w postaci  $z_j = A \cdot (r)^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . W rezultacie otrzymamy następujące pierwiastki równania charakterystycznego:

$$r_1 = \frac{1}{r_2} = -\frac{\sqrt{3} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}}, \quad (2.4)$$

oraz

$$z_j = A_1(r_1)^j + A_2 \cdot (r_2)^j. \quad (2.5)$$

Stałe  $A_1, A_2$ , wyznaczone z warunków brzegowych (2.1) i (2.3) wynoszą:

$$A_1 = \frac{[(3-\alpha) + (3+\alpha)r_2]r_2^{n-1}}{M} \cdot \frac{p_0}{k},$$

$$A_2 = \frac{-[(3-\alpha) + (3+\alpha)r_1]r_1^{n-1}}{M} \cdot \frac{p_0}{k},$$

gdzie:

$$M = [(3+\alpha) + (3-\alpha)r_1][(3-\alpha) + (3+\alpha)r_2]r_2^{n-1} + \\ - [(3+\alpha) + (3-\alpha)r_2][(3-\alpha) + (3+\alpha)r_1]r_1^{n-1}.$$

Można wykazać, że ponieważ  $r_1 \cdot r_2 = 1$  oraz  $r_1 \neq r_2$  to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{\alpha}} \frac{p_0}{k} \equiv A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_2 = 0.$$

Obliczenia numeryczne dla  $\alpha = 1$  ( $a = l$ ) wykazują bardzo szybką zbieżność  $A_1$  do  $A$ , a  $A_2$  do zera już dla niewielkiej liczby pontonów (patrz tabl. 1).

Tablica 1

| $n$                  | 2           | 3                   | 4                   | 5                   | 6                   |
|----------------------|-------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\frac{2k}{p_0} A_1$ | 0.58034     | 0.57756             | 0.57737             | 0.577351            | 0.57735             |
| $\frac{2k}{p_0} A_2$ | $3.10^{-3}$ | $2.1 \cdot 10^{-4}$ | $1.5 \cdot 10^{-5}$ | $1.1 \cdot 10^{-6}$ | $7.9 \cdot 10^{-8}$ |

$$\text{Dla } n = \infty \quad \frac{2k}{p_0} A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735.$$

Z powyższego zestawienia można wnioskować, że dla  $n > 4$  półograniczone pasmo pontonów można traktować jako półnieskończone ( $n = \infty$ ). Rozwiązania układu (2.2) mają wówczas szczególnie prostą postać:

$$z_0 = A = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{\alpha}} \frac{p_0}{k}, \quad (2.6)$$

$$z_1 = z_0 \cdot r_1^1,$$

czyli

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{3}+\sqrt{\alpha}} z_0 \quad \text{itd.}$$

Wniosek: PPP traktowane jako superelement posiada sztywność na ugięcie pionowe

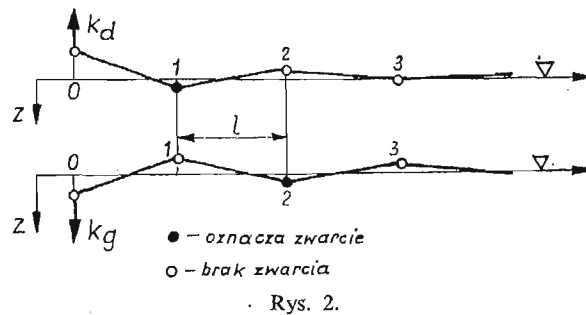
w węzle brzegowym nr. 0 równą:

$$k_0 = 2\sqrt{3}\sqrt{\alpha} \cdot k, \quad (2.7)$$

tzn.  $p_0 = k_0 \cdot z_0$ .

**2.1. Ograniczenia stosowalności superelementu PPP.** Superelement brzegowy charakteryzuje jego sztywność na brzegu ( $k_0$ ). Sztywność ta jest wielkością stałą, dopóki wewnątrz tego elementu nie pojawi się dodatkowe zwarcie, wynikające z wyczerpania się luzów między pontonami. Warunek ten w sposób istotny ogranicza zastosowanie elementu PPP w obliczeniach, zmieniając jego charakterystykę sztywnościową. W tym sensie element PPP posiada charakterystykę nieliniową (zmienną skokowo).

Z zanikającego charakteru ugięć węzłów wewnątrz PPP wynika, że dodatkowe zwarcie może pojawić się albo w węzle 1, gdy  $z_0 < 0$ , albo w węzle 2, gdy  $z_0 > 0$ , (patrz rys. 2).



Badając warunek zwarcia w obu przypadkach w odpowiednich węzłach otrzymuje się następujące ograniczenie na ugięcie  $z_0$ :

$$z_d = -\frac{fl}{(r-1)^2} \leq z_0 \leq -\frac{fl}{(r-1)^2 r} = z_g, \quad (2.8)$$

gdzie:  $r = r_1$  według (2.4)

$f$  — ograniczenie kątów obrotu w przegubach,

$l$  — odległości przegubów.

Dla  $z_0 \notin (z_d, z_g)$  należy zmienić sztywność PPP z  $k_0$  na  $k_g$  lub  $k_d$ . Wartości tych sztywności są następujące:

$$\begin{aligned} k_d &= \beta k \\ k_g &= \left(3 + \alpha - \frac{3 - \alpha}{3 + \alpha + \beta}\right) k, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie:

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ 15 + \alpha - \frac{(9 - \alpha)^2}{15 + \alpha + 4\sqrt{3}\sqrt{\alpha}} \right].$$

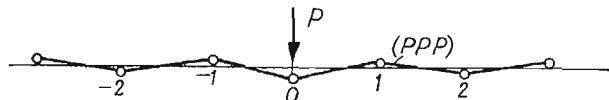
Przykładowo dla  $\alpha = (.8)^2$ :  $k_0 = 2.771 k$ ,  $k_d = 6.17 k$ ,  $k_g = 3.073 k$ . Jak widać, szczególnie  $k_d$  wzrasta dość znacznie, powodując nieliniowość PPP, jeśli  $z_0 < z_d$ .

### 3. Synteza układu zwartego i rozwartego

Zastąpienie części rozwartej układu superelementem PPP ze sztywnością  $k_0$  na brzegu, pozwala sprowadzić zadanie statyki mostu pontonowego do analizy strefy zvarcia, do której zostaną dołączone na końcach elementy sprężyste o znanej charakterystyce (elementy PPP). Ponieważ, jak już wcześniej wspomniano, nie znana jest długość strefy zvarcia, obliczenia można prowadzić zwiększając stopniowo długość strefy zvarcia, począwszy od ustalonej ilości pontonów i sprawdzając warunki ciągłości na styku strefy zvarcia i rozwarcia. Dołączenie jednego pontonu ze strefy rozwarcia nie zmienia charakterystyki elementu dołączonego (PPP), albowiem, jak pokazano w punkcie 2 nie zależy ona od ilości pontonów.

Niewiadome momenty zvarcia i ugięcia wewnątrz strefy zvarcia można zredukować do brzegów, jak to się czyni w metodzie superelementów, wprowadzając macierz brzegową i reakcje brzegów. Metodę tę zilustrujemy na prostym przykładzie z jedną siłą skupioną na moście swobodnie pływającym, wyznaczając rozwiązania we wstępnej fazie tworzenia się strefy zvarcia. Podobne zagadnienie zvarcia punktowego w początkowej fazie ruchu, przy nagłym przyłożeniu siły, można znaleźć w pracy [3].

**3.1. Przykład obciążenia siłą skupioną w przegubie środkowym mostu.** Wykorzystując rozwiązania dla PPP z punktu 2, można znaleźć natychmiast warunki obciążenia powodujące



Rys. 3.

tzw. punktowe zvarcie mostu pod siłą  $P$ , (patrz rys. 3). Model mostu składa się z dwóch symetrycznych elementów PPP, do brzegu których przyłożona jest siła skupiona  $\frac{P}{2}$ . Warunek, przy którym pojawia się zvarcie pomiędzy elementami ma postać:

$$f_0 \geq \left( -\frac{1}{l}, \quad \frac{2}{l}, \quad -\frac{1}{l} \right) \begin{bmatrix} z_{-1} \\ z_0 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

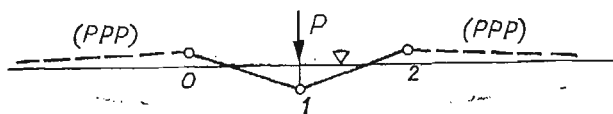
gdzie:  $z_0 = \frac{P_0}{k_0}$ ,  $z_{-1} = z_1 = z_0 \cdot r$  zgodnie z (2.6) i (2.7).

Warunek (3.1) prowadzi do obliczenia siły powodującej pierwsze zvarcie mostu:

$$P_{zw} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}) \cdot kfl. \quad (3.2)$$

Dla  $P > P_{zw}$  pojawia się w przegubie 0 moment zvarcia i od tej chwili należy wprowadzić inny model obliczeniowy, uwzględniający istnienie strefy zvarcia między PPP (rys. 4).

Rozwiążemy to zadanie metodą superelementów. Superelement zwarty obejmuje przeguby 0-1-2. Po obu jego stronach znajdują się superelementy PPP.



Rys. 4.

Równanie równowagi dla superelementu 0-1-2, zgodnie z (1.1) ma postać:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+\alpha)k & (3-\alpha)k & 0 & -\frac{1}{l} \\ (3-\alpha)k & 2(3+\alpha)k & (3-\alpha)k & \frac{2}{l} \\ 0 & (3-\alpha)k & (3+\alpha)k & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{2}{l} & -\frac{1}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Brzeg elementu stanowią przeguby 0 i 2. Ponadto:  $p_0 = p_2 = 0$ ,  $p_1 = P$ ,  $z_0 = z_2$ . Po uporządkowaniu układu (3.3) ze względu na ugięcia brzegowe i wykorzystaniu symetrii otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{f}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3+\alpha)k & (3-\alpha)k & -\frac{1}{l} \\ (3-\alpha)k & (3+\alpha)k & \frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (b) \\ (i) \end{matrix} \quad (3.4)$$

Redukując obciążenie do brzegu otrzymamy kolejno:  
reakcje brzegu

$$r_b = K_{bi} K_{ii}^{-1} p_i = -\frac{P}{2} + 3kfl,$$

siły na brzegu

$$s_b^{(1)} = p_b - r_b = \frac{P}{2} - 3kfl, \quad (3.5)$$

macierz brzegową elementu 0-1-2

$$K_b^{(1)} = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib} = 12k.$$

Od strony superelementu brzegowego PPP:

$$\begin{aligned} s_b^{(2)} &= 0, \\ K_b^{(2)} &= k_0 = 2\sqrt{3} \sqrt{\alpha} \cdot k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zatem na brzegu równanie równowagi jest:

$$s_b^{(1)} + s_b^{(2)} = (K_b^{(1)} + K_b^{(2)}) \cdot z_b, \quad (3.7)$$

skąd:

$$z_b = z_2 = \frac{P - 6kfl}{4\sqrt{3}(2\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})k}. \quad (3.8)$$

Z rozwiązaniem  $z_2$  można wrócić do superelementu (strefy zwarcia) i obliczyć pozostałe niewiadome, np. moment zwarcia:

$$m_1 = \frac{Pl}{2} - 6kz_2 - \frac{3+\alpha}{2} kfl^2. \quad (3.9)$$

Przyjmując  $m_1 = 0$  znajdziemy minimalną siłę, przy której znika zvarcie w środku strefy:

$$P_{min} = (\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})\sqrt{\alpha}kfl, \quad (3.10)$$

wartość której pokrywa się z rozwiązaniem (3.2).

Moment gnący  $m_1$  można wtedy przekształcić do postaci:

$$m_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{3} + \sqrt{\alpha}} (P - P_{min}) \frac{l}{2}. \quad (3.11)$$

Zakładając zvarcie na brzegu między superelementami można obliczyć  $P_{max}$ , czyli siłę, kiedy dołączy się następny ponton ze strefy rozwartej, albo kres założonego typu rozwiązania:

$$P_{max} = 3[2 + (\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})(2\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})]kfl. \quad (3.12)$$

Zatem zakres rozwiązań przyjętych na wstępie jest ograniczony do siły  $P$  spełniającej nierówność:

$$P_{min} \leq P \leq P_{max}. \quad (3.13)$$

Sprawdzimy jeszcze, czy w całym zakresie (3.13) superelement PPP jest liniowy, tzn. czy nie interweniuje warunek (2.8). Łatwo sprawdzić, że:

$$z_2(P_{max}) = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{\alpha})}{4\sqrt{3}} fl < z_a.$$

Na koniec, wracając do (3.8) można zauważyć, że dla siły  $P_0 = 6kfl$   $z_b = 0$ , co oznacza, że znika oddziaływanie między strefami. Strefa rozwarta jest płaska ( $z_i = 0$ ) i następuje „izolacja” strefy zwarcia, bo siła wzajemnego oddziaływania spada do zera. Takie zjawisko można zaobserwować dla dowolnej strefy zwarcia, pomiędzy kolejnymi przyłączeniami pontonów.

#### 4. Podsumowanie

W przykładzie przytoczonym w punkcie 3 pracy, dzięki swej prostocie można było wyznaczyć podstawowe relacje zachodzące w moście w początkowej fazie zwarcia mostu z siłą skupioną w przegubie. Podobne związki można wyznaczyć dla siły przyłożonej w środku pontonu [2].

Dalsza analiza, przy zwiększaniu liczby pontonów w zwarcu nie jest już możliwa w sposób analityczny. Przeprowadzić ją można jedynie na maszynie cyfrowej, wykorzystując opisaną wyżej ideę superelementu. Celem niniejszej pracy było naszkicowanie metody w zagadnieniu statyki mostu z więzami jednostronnymi, a w szczególności zastosowanie elementu PPP.

Dla pewnych układów regularnych możliwe są rozwiązania operatorowe również w strefie zwarcia, ale to już będzie tematem innej pracy.

## 5. Wspomnienie

Niniejszą pracę pragnę poświęcić pamięci Profesora Józefa Więckowskiego, który zapoczątkował prace nad układami dyskretnymi i swoim zaangażowaniem dał asumpt do powstania szeregu prac poświęconych mechanice mostów pływających.

Dzisiaj niestety nie ma Go już wśród nas.

## Literatura

1. R. BITTNER, *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.
2. R. PISKORSKI, *Numeryczne i analityczne zastosowanie sztywnych elementów skończonych do statyki mostu pontonowego z więzami*, Prace Badawcze I. O. P. G. Nr. 1635/MR-632/82, Gdańsk 1982.
3. J. WIĘCKOWSKI, *Elementy dynamiki mostu pontonowego z luzami obrotowymi w opisie dyskretnym*, Prace IMP, z. 77, Gdańsk 1980.

## Резюме

### МЕТОД СУПЕРЭЛЕМЕНТА В СТАТИКЕ СИСТЕМ С ОДНОСТРОННЫМИ СВЯЗЯМИ

Идея суперэлементов и операторное интегрирование некоторых регулярных систем позволили получить в замкнутой форме результаты в статике понтонных мостов с одностронными связями при оборотах.

## Summary

### SUPERELEMENT METHOD IN THE STATICS OF SYSTEM WITH UNILATERAL CONSTRAINTS

Idea of superelement and operator integration solutions of certain regular systems allowed to obtain in exact form the solutions of the ferry-bridge problem with unilateral constraints on pivot.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 grudnia 1986 roku.*