MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 26 (1988)

PRZEPŁYWY TERMODYFUZYJNE SPRZĘŻONE Z POLEM NAPRĘŻEŃ W LEPKOSPRĘŻYSTOŚCI

MAREK WRÓBEL

Wyższa Szkoła Inżynierska, Opole

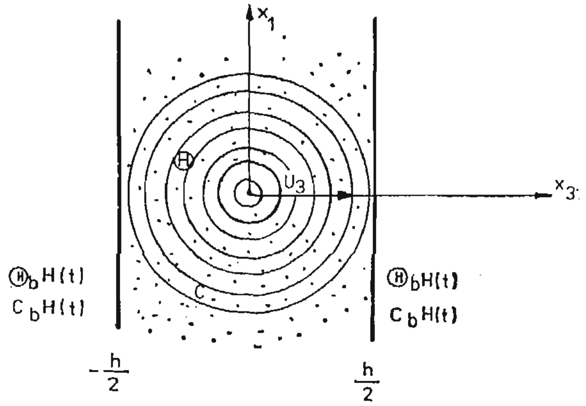
1. Wstęp

Problematyka przepływów cieplno-dyfuzyjnych sprzężonych z polem mechanicznym jest jedną z podstawowych jakie napotykamy w zagadnieniach naprężeń technologicznych występujących w dojrzewającym betonie, naprężeń w korodujących konstrukcjach, gruntach ekspansywnych, czy też przy nakładaniu powłok ochronnych w metalach. Z punktu widzenia budownictwa szczególnie istotny jest pierwszy przypadek, kiedy wzajemnie oddziaływujące na siebie przepływy wilgoci i ciepła oraz pola przemieszczeń determinują późniejsze własności betonu i konstrukcji wykonanych z tego materiału. W pracy podjęto próbę ilościowego oszacowania wpływu wzajemnych sprzężeń między tymi polami, oraz wpływu tych sprzężeń na pole naprężeń, na podstawie rozwiązania pewnego zadania początkowo-brzegowego. Rozwiązanie oparto na odpowiednim funkcjonale [15], którego warunkami stacjonarności są równania termodyfuzji podane przez Nowackiego dla ośrodka sprężystego [10, 11] i uogólnione przez Kubika [6] na zadania sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej. Wydaje się, że taka analiza sprzężeń może być celowa, gdyż autorzy niewielu publikacji z zakresu termodyfuzji sprężystej i lepkosprężystej skupiają uwagę na teoretycznych podstawach problemu [6, 10, 11, 24]. Znane są rozwiązania pewnych zagadnień brzegowych [2, 4, 8, 14] lecz brak jest tam przykładów liczbowych obrazujących rozważane procesy i mogących posłużyć do analizy sprzężeń rozpatrywanych wielkości polowych.

2. Podstawowe założenia i postawienie zadania

Sformułujemy teraz analizowane w pracy zadanie początkowo-brzegowe: Należy wyznaczyć pola temperatury, koncentracji i przemieszczeń, oraz odkształceń i naprężeń zdeterminowane przez zadane na brzegach wartości temperatury i koncentracji, oraz określić wpływ wzajemnych sprzężeń między rozpatrywanymi polami na ich rozkład.

Rozpatrzmy więc warstwę o grubości h, w której występuje pole temperatury Θ, koncentracji C i przemieszczenia U_i (rys. 1). Zakładamy, że zagadnienie przez nas rozpatrywane jest jednowymiarowe, tzn. wszystkie pola zależą od jednej zmiennej przestrzennej x_3, oraz że ośrodek jest izotropowy, brak w nim źródeł ciepła i masy oraz sił masowych.



Rys. 1. Warstwa z polem temperatury, koncentracji i przemieszczenia

Warunki brzegowe podamy w temperaturze i koncentracji:

$$\Theta\left(\pm\frac{h}{2}, t\right) = \Theta_b H(t), \qquad C\left(\pm\frac{h}{2}, t\right) = C_b H(t), \tag{2.1}$$

natomiast za warunki początkowe przyjmujemy wartości przyrostów entropii i koncentracji ponad stan naturalny na całej grubości warstwy równe zero:

$$C(x_3, 0) = 0, \qquad \varrho S(x_3, 0) = 0. \tag{2.2}$$

Wtedy funkcjonał dla sprzężonych pól temperatury, koncentracji i przemieszczenia przyjmie postać (por. (2.31) w pracy [15]):

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\Theta, C, U_3] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \Big[& \frac{1}{2} E_{3333}*dU_{3,3}*dU_{3,3} - \varphi_{33}*dU_{3,3}*d\Theta + \\ & -\frac{1}{2} n*dC*dC + \frac{1}{2} m*d\Theta*d\Theta - \frac{K'}{2}\Phi_{33}*\Phi_{33}*dU_{3,33}*dU_{3,33} + \\ & -K'\Phi_{33}*l*dU_{3,33}*d\Theta_{,3} + K'\Phi_{33}*n*dU_{3,33}*dC_{,3} + \\ & -\frac{K'}{2} l*l*d\Theta_{,3}*d\Theta_{,3} + K'l*n*d\Theta_{,3}*dC_{,3} + \\ & -\frac{K}{2} n*n*dC_{,3}*dC_{,3} - \frac{KH}{2T_0}*\Theta_{,3}*d\Theta_{,3}\Big] dx_3.\end{aligned} \tag{2.3}$$

W zależności (2.3) wielkości E_{3333}, φ_{33}, Φ_{33}, K', K są odpowiednimi do rozpatrywanego zadania składowymi tensorów funkcji materiałowych E_{ijkl}[Pa], φ_{ij}[J/m^{3}K], Φ_{ij}[J/ /kg] i tensorów przewodnictwa dyfuzyjnego K'_{ij}[kg^2/Jms] i cieplnego K_{ij}[J/msK]. Z ko-

lei l[J/kgK], m[J/m^{3}K^2], n[Jm^3/kg^2] są funkcjami materiałowymi, T_0[K] jest temperaturą stanu naturalnego, a $H = H(t)$ oznacza funkcję Heavisid'a (por. [15]).
Powyższe zadanie początkowo-brzegowe rozwiążemy zmodyfikowaną metodą bezpośrednią Ritza [23].

Przyjmujemy do rozwiązania następujące funkcje bazy:
— dla koncentracji:

$$f_k(x_3) = \cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3;\quad f_{k,3}(x_3) = -\frac{\pi(2k-1)}{h}\sin\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3 \tag{2.4}$$

— dla temperatury:

$$g_k(x_3) = \cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3,\quad g_{k,3}(x_3) = -\frac{\pi(2k-1)}{h}\sin\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3, \tag{2.5}$$

— dla przemieszczenia:

$$u_k(x_3) = \sin\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3,\quad u_{k,3}(x_3) = \frac{\pi(2k-1)}{h}\cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3. \tag{2.6}$$

Wartości funkcjonału (2.3) będziemy poszukiwali na kombinacjach liniowych mających postać:

$$\Theta^n(x_3, t) = g_0(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)g_k(x_3), \tag{2.7}$$

$$C^n(x_3, t) = f_0(t) + \sum_{k=1}^{n} b_k(t)f_k(x_3), \tag{2.8}$$

$$U_3^n(x_3, t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_k(x_3). \tag{2.9}$$

gdzie:

$$g_0(t) = \Theta_b H(t), \tag{2.10}$$

$$f_0(t) = C_b H(t), \tag{2.11}$$

$$u_0(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}[\alpha_c C_b + \alpha_T \Theta_b]H(t)x_3 = U_b H(t)x_3, \tag{2.12}$$

przy czym α_T[K^{-1}] i α_c[m^3/kg] są współczynnikami rozszerzalności cieplnej i dyfuzyjnej natomiast $\nu[-]$ jest współczynnikiem Poissona.
Funkcje g_0, f_0 i u_0 spełniają niejednorodne, natomiast funkcje g_k, f_k i u_k — jednorodne warunki brzegowe w temperaturze, koncentracji i odkształceniach. $a_k(t)$, $b_k(t)$ i $c_k(t)$ są tutaj poszukiwanymi funkcjami czasu. Występujące w funkcjonale (2.3) funkcje materiałowe l, m, n przyjmujemy stałe w czasie (por. [2])

$$l(t) = lH(t), \qquad m(t) = mH(t), \qquad n(t) = nH(t), \tag{2.13}$$

oraz zgodnie z [6, 10, 11, 16]:

$$E_{3333} = \frac{15}{14} G(t), \quad \varphi_{33} = \frac{7}{5} \alpha_T E_{3333} = \frac{3}{2} \alpha_T G(t),$$

$$\Phi_{33} = -\frac{7}{5} \alpha_c E_{3333} = -\frac{3}{2} \alpha_c G(t), \tag{2.14}$$

$$D_T = \frac{K}{mT_0}, \quad D_c = K'n.$$

Natomiast z analizy funkcjonału danego zależnością (2.3) wynika kilka funkcji sprzęgających pola termiczne, dyfuzyjne i mechaniczne, które po uwzględnieniu (2.14) można przedstawić w postaci:

1. Funkcja sprzęgająca pole mechaniczne z cieplnym związanym z przepływem ciepła:

$$\varkappa_{c1} = \frac{3}{2} \alpha_T. \tag{2.15}$$

2. Funkcja sprzęgająca pole mechaniczne z cieplnym związanym z przepływem masy:

$$\varkappa_{c2} = \frac{3}{2} K' l \alpha_c. \tag{2.16}$$

3. Funkcja sprzęgająca pole mechaniczne z dyfuzyjnym:

$$\varkappa_T = \frac{3}{2} D_c \alpha_c. \tag{2.17}$$

4. Funkcja sprzęgająca pole cieplne z dyfuzyjnym:

$$\varkappa_u = D_c l. \tag{2.18}$$

Wobec założenia (2.13) funkcje sprzęgające redukują się do roli współczynników sprzęgających (stałych w czasie)

3. Rozwiązanie zagadnienia w warstwie lepkosprężystej

Przyjmujemy, że materiał warstwy podlega zjawiskom reologicznym opisywanym teorią Artuniana [18], w której przyjmuje się, że jądra w całkowych równaniach fizycznych są nieinwariantne względem przesunięć skali czasowej. Natomiast wraz z upływem czasu — materiał taki może być opisany równaniami liniowej lepkosprężystości o jądrach typu splotu (por. [1, 7, 12, 13, 19]). Funkcja relaksacji ma wtedy postać:

$$G(t) = \frac{E_0}{1 + E_0 \tilde{C}_0} [E_0 \tilde{C}_0 e^{-\gamma(1 + E_0 \tilde{C}_0)t} + H(t)], \tag{3.1}$$

a jej transformata Laplace'a:

$$\bar{G}(p) = E_0 \frac{p+\gamma}{p[p+\gamma(1+E_0 \tilde{C}_0)]}. \tag{3.2}$$

Dzięki zastosowaniu metody bezpośredniej Ritza zadanie szukania ekstremum funkcjonału $\mathscr{F}[\Theta^n, C^n, U_3^n]$ sprowadziło się do zadania poszukiwania ekstremum funkcji, której argumentami są poszukiwane funkcje czasu $a_k(t)$, $b_k(t)$ i $c_k(t)$. Warunek istnienia ekstremum tej funkcji prowadzi do układu trzech równań Eulera-Lagrange'a. Po dokonaniu na tym układzie transformacji Laplace'a, uwzględnieniu (3.2) i wprowadzeniu oznaczeń z tabl. 1 otrzymamy:

$$[a_1\varkappa_u+a_2+a_3p]\overline{a}_k+[b_1\varkappa_u]\overline{b}_k+\Bigg[c_1\varkappa_{c2}+c_2\varkappa_{c1}p+$$

$$+\frac{c_6\varkappa_{c2}}{p+R_0}+\frac{c_7\varkappa_{c1}p}{p+R_0}\Bigg]\overline{c}_k=\frac{4}{\pi}\Theta_b\left[d_1+d_2\varkappa_{c1}+d_6\frac{\varkappa_{c1}}{p+R_0}\right], \tag{3.3}$$

$$[a_4\varkappa_u]\overline{a}_k+[b_2+b_3p]\overline{b}_k+\left[c_3\varkappa_T+\frac{c_8\varkappa_T}{p+R_0}\right]\overline{c}_k=\frac{4}{\pi}C_bd_3, \tag{3.4}$$

Tabela 1. Oznaczenia wprowadzone na układzie równań Eulera-Lagrange'a w przestrzeni obrazu

<table>
<tr><th>Warstwa sprężysta</th><th>Warstwa lepkosprężysta</th></tr>
<tr><td>$E(t)=E_0H(t)$</td><td>$E(t)=G(t)=\dfrac{E_0}{1+E_0C_0}[E_0\tilde{C}_0e^{-(1+E_0\tilde{C}_0)t}+H(t)]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_1=-\pi^2(2k-1)^2\dfrac{hl}{n}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_2=-\pi^2(2k-1)^2D_Thm$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_3=-h^3m$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_4=b_1=\pi^2(2k-1)^2h$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_5=c_1=-\pi^3(2k-1)^3E_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_6=c_2=-\pi(2k-1)h^2E_0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$a_7=c_6=\pi^3(2k-1)^3\gamma E_0^2\tilde{C}_0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$a_8=c_7=\pi(2k-1)h^2\gamma E_0^2\tilde{C}_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_2=-\pi^2(2k-1)^2D_cnh$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_3=-h^3n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_4=c_3=\pi^3(2k-1)^3E_0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$b_5=c_8=-\pi^3(2k-1)^3\gamma E_0^2\tilde{C}_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c_4=\dfrac{15}{14}\pi^2(2k-1)^2hE_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c_5=-\pi^4(2k-1)^4\dfrac{E_0^2}{D_clh}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$c_9=-\dfrac{15}{14}\pi^2(2k-1)^2h\gamma E_0^2\tilde{C}_0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$c_{10}=\pi^4(2k-1)^4E_0^3\gamma^2\tilde{C}_0\dfrac{2+E_0\tilde{C}_0}{D_clh}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$c_{11}=\pi^4(2k-1)^4E_0^3\dfrac{2\gamma\tilde{C}_0}{D_clh}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$d_1=(-1)^{k+1}h^3m/(2k-1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$d_2=(-1)^{k+1}h^3E_0\overline{U}_b/(2k-1)\overline{\Theta}_b$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$d_3=(-1)^{k+1}h^3n/(2k-1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$d_4=-\dfrac{15}{14}(-1)^{k+1}E_0h^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$d_5=(-1)^{k+1}E_0h^2\overline{\Theta}_b/\overline{U}_b$</td></tr>
<tr><td></td><td>$d_6=-(-1)^{k+1}h^3\gamma E_0^2\tilde{C}_0\overline{U}_b/\overline{\Theta}_b$</td></tr>
<tr><td></td><td>$d_7=\dfrac{15}{14}(-1)^{k+1}h^2\gamma E_0^2\tilde{C}_0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$d_8=-(-1)^{k+1}h^2\gamma E_0^2\tilde{C}_0\overline{\Theta}_b/\overline{U}_b$</td></tr>
<tr><td></td><td>$R_0=\gamma(1+E_0\tilde{C}_0)$</td></tr>
</table>

$$\left[a_5\varkappa_{c1}+a_6\varkappa_{c1}p+\frac{a_7\varkappa_{c2}}{p+R_0}+\frac{a_8\varkappa_{c1}p}{p+R_0}\right]\bar{a}_k+\left[b_4\varkappa_T+\frac{b_5\varkappa_T}{p+R_0}\right]\bar{b}_k+ \tag{3.5}$$

$$+\left[c_4p+c_5\varkappa_{c2}\varkappa_T+\frac{c_9p}{p+R_0}+\frac{c_{10}\varkappa_{c2}\varkappa_T}{(p+R_0)^2}\right]\bar{c}_k=$$

$$=4U_b\left(d_u+d_5\varkappa_{c1}+\frac{d_7}{p+R_0}+\frac{d_8\varkappa_{c1}}{p+R_0}\right).$$

Z układu równań (3.3)÷(3.5) obliczamy wartości poszukiwanych funkcji $\bar{a}_k(p)$, $\bar{b}_k(p)$, $\bar{c}_k(p)$ w przestrzeni obrazu. Dokonując następnie retransformacji Laplace'a po wstawieniu do (2.7)÷(2.9) otrzymujemy poszukiwane wielkości polowe:

$$\Theta^n(x_3,t)=\Theta_b\left[H(t)+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right], \tag{3.6}$$

$$C^n(x_3,t)=C_b\left[H(t)+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}b_k(t)\cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right], \tag{3.7}$$

Tabela 2. Współczynniki rozwiązania zadania początkowo-brzegowego w warstwie lepkosprężystej

$\underset{\sim}{a}_0$	$\dfrac{R^5-R^4A_1+R^3A_2-R^2A_3+RA_4-A_5}{(R+p_{1k})(R+p_{2k})(R+p_{3k})(R+p_{4k})(R+p_{5k})}$	
$\underset{\sim}{b}_0$	$\dfrac{R^5-R^4B_1+R^3B_2-R^2B_3+RB_4-B_5}{(R+p_{1k})(R+p_{2k})(R+p_{3k})(R+p_{4k})(R+p_{5k})}$	
$\underset{\sim}{c}_0$	$\dfrac{R^5-R^4C_1+R^3C_2-R^2C_3+RC_4-C_5}{(R+p_{1k})(R+p_{2k})(R+p_{3k})(R+p_{4k})(R+p_{5k})}$	
$\underset{\sim}{a}_i$	$\dfrac{p_{ik}^5+p_{ik}^4A_1+p_{ik}^3A_2+p_{ik}^2A_3+p_{ik}A_4+A_5}{(p_{ik}+R)(p_{ik}-p_{1k})(p_{ik}-p_{2k})(p_{ik}-p_{3k})(p_{ik}-p_{4k})(p_{ik}-p_{5k})}$	Bez czynnika w minowniku, dla którego wyrażenie w nawiasach (...) jest równe zeru.
$\underset{\sim}{b}_i$	$\dfrac{p_{ik}^5+p_{ik}^4B_1+p_{ik}^3B_2+p_{ik}^2B_3+p_{ik}B_4+B_5}{(p_{ik}+R)(p_{ik}-p_{1k})(p_{ik}-p_{2k})(p_{ik}-p_{3k})(p_{ik}-p_{4k})(p_{ik}-p_{5k})}$	
$\underset{\sim}{c}_i$	$\dfrac{p_{ik}^5+p_{ik}^4C_1+p_{ik}^3C_2+p_{ik}^2C_3+p_{ik}C_4+C_5}{(p_{ik}+R)(p_{ik}-p_{1k})(p_{ik}-p_{2k})(p_{ik}-p_{3k})(p_{ik}-p_{4k})(p_{ik}-p_{5k})}$	
$\underset{\sim}{a}_{iR}$	$\dfrac{p_{ik}^5+p_{ik}^4A_1+p_{ik}^3A_2+p_{ik}^2A_3+p_{ik}A_4+A_5}{(p_{ik}+R)^2(p_{ik}-p_{1k})(p_{ik}-p_{2k})(p_{ik}-p_{3k})(p_{ik}-p_{4k})(p_{ik}-p_{5k})}$	Bez czynnika w mianowniku, dla którego wyrażenie w nawiasach (...) jest równe zeru.
$\underset{\sim}{b}_{iR}$	$\dfrac{p_{ik}^5+p_{ik}^4B_1+p_{ik}^3B_2+p_{ik}^2B_3+p_{ik}B_4+B_5}{(p_{ik}+R)^2(p_{ik}-p_{1k})(p_{ik}-p_{2k})(p_{ik}-p_{3k})(p_{ik}-p_{4k})(p_{ik}-p_{5k})}$	
$\underset{\sim}{c}_{iR}$	$\dfrac{p_{ik}^5+p_{ik}^4C_1+p_{ik}^3C_2+p_{ik}^2C_3+p_{ik}C_4+C_5}{(p_{ik}+R)^2(p_{ik}-p_{1k})(p_{ik}-p_{2k})(p_{ik}-p_{3k})(p_{ik}-p_{4k})(p_{ik}-p_{5k})}$	

$$U_3^n(x_3, t) = U_b\left[H(t)x_3 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} c_k(t)\sin\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right], \tag{3.8}$$

gdzie:

$$a_k(t) = A\left[\underset{\sim}{a}_0 e^{-Rt} + \sum_{i=1}^{5} \underset{\sim}{a}_i e^{p_{ik}t}\right], \tag{3.9}$$

$$b_k(t) = B\left[\underset{\sim}{b}_0 e^{-Rt} + \sum_{i=1} \underset{\sim}{b}_i e^{p_{ik}t}\right], \tag{3.10}$$

$$c_k(t) = \underset{\sim}{C}\left[\underset{\sim}{c}_0 e^{-Rt} + \sum_{i=1}^{5} \underset{\sim}{c}_i e^{p_{ik}t}\right], \tag{3.11}$$

a współczynniki $\underset{\sim}{a}_i$, $\underset{\sim}{b}_i$ i $\underset{\sim}{c}_i$ znajdują się w tabl. 2.
Wielkości $A, A_1, \ldots, A_5, B, B_1, \ldots, B_5, \underset{\sim}{C}, C_1, \ldots, C_5$ z tabl. 2 oraz z zależności (3.9)÷÷(3.11) są funkcjami stałych materiałowych, oraz współczynników sprzęgających (2.15)÷÷(2.18). Występujące w zależnościach (3.9)÷(3.11) wielkości p_{ik} ($i = 1, \ldots, 5$) są pierwiastkami równania piątego stopnia ($p^5+p^4D_1+p^3D_2+p^2D_3+pD_4+D_5 = 0$), które rozwiązywano numerycznie.

Pole odkształceń dla danego zadania początkowo-brzegowego otrzymamy z zależności na tensor odkształcenia Cauchy'ego [6, 10, 11]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j}+U_{j,i}) \rightarrow \varepsilon_{33}^n(x_3, t) =$$

$$= U_b\left[H(t) + \frac{4}{h}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)c_k(t)\cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right]. \tag{3.12}$$

Z kolei przystąpimy do wyznaczenia składowych tensora naprężenia [6]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu * d\varepsilon_{ij} + (\lambda * d\varepsilon_{kk} - \gamma_T * d\Theta + \gamma_c * dC)\delta_{ij}. \tag{3.13}$$

Jeżeli na zależności (3.13) dokonamy transformacji Laplace'a, skorzystamy ze związków (3.1) i (3.2), oraz z transformat wielkości polowych (3.6)÷(3.8), to po retransformacji otrzymamy następujące składowe tensora naprężenia w przestrzeni oryginału:

$$\sigma_{11}^n(x_3, t) = \sigma_{22}^n(x_3, t) = \frac{E_0}{1-2\nu}\left\{\frac{\nu}{1+\nu}\varepsilon_{33R}^n(x_3, t) + \right.$$

$$\left. - [\alpha_c C_R^n(x_3, t) + \alpha_T \Theta_R^n(x_3, t)]\right\}, \tag{3.14}$$

$$\sigma_{33}^n(x_3, t) = 0, \tag{3.15}$$

gdzie:

$$\Theta_R^n(x_3, t) = \Theta_b\left\{H(t) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[a_k(t) - a_{kR}(t)]\cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right\}, \tag{3.16}$$

$$C^n_R(x_3, t) = C_b\left\{H(t) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[b_k(t) - b_{kR}(t)]\cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right\}, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon^n_{33R}(x_3, t) = U_b\left\{H(t) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)[c_k(t) - c_{kR}(t)]\cdot\cos\frac{\pi(2k-1)}{h}x_3\right\}, \quad (3.18)$$

przy czym:

$$a_{kR}(t) = A_R\left[\underset{\sim}{a}_0 t e^{-Rt} + \sum_{i=1}^{5}\underset{\sim}{a}_{iR}(e^{p_{ik}t} - e^{-Rt})\right], \quad (3.19)$$

$$b_{kR}(t) = B_R\left[\underset{\sim}{b}_0 t e^{-Rt} + \sum_{i=1}^{5}\underset{\sim}{b}_{iR}(e^{p_{ik}t} - e^{-Rt})\right], \quad (3.20)$$

$$c_{kR}(t) = \underset{\sim}{C}_R\left[\underset{\sim}{c}_0 t e^{-Rt} + \sum_{i=1}^{5}\underset{\sim}{c}_{iR}(e^{p_{ik}t} - e^{-Rt})\right], \quad (3.21)$$

$$A_R = A\gamma E_0\tilde{C}_0,\ B_R = B\gamma E_0\tilde{C}_0,\ \underset{\sim}{C}_R = \underset{\sim}{C}\gamma E_0\tilde{C}_0, \quad (3.22)$$

a współczynniki $\underset{\sim}{a}_0$, $\underset{\sim}{b}_0$, $\underset{\sim}{c}_0$, $\underset{\sim}{a}_{iR}$, $\underset{\sim}{b}_{iR}$, $\underset{\sim}{c}_{iR}$ znajdują się w tabl. 2.

4. Realizacja numeryczna i zestawienie wyników

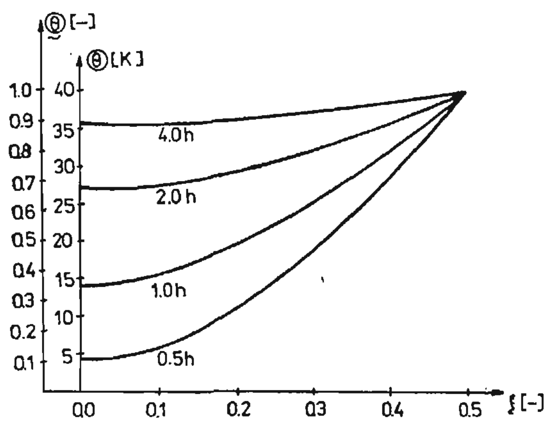
W oparciu o przedstawione rozwiązanie analityczne opracowano program na EMC ODRA 1204 w języku Algol 60. Do przeprowadzenia obliczeń wykorzystano następujące wartości odpowiednich współczynników i funkcji materiałowych dotyczących dojrzewającego betonu (po sprowadzeniu do jednostek układu SI):

— współczynniki dyfuzji D_c [5, 17, 20] i przewodności cieplnej D_T [3, 9]:

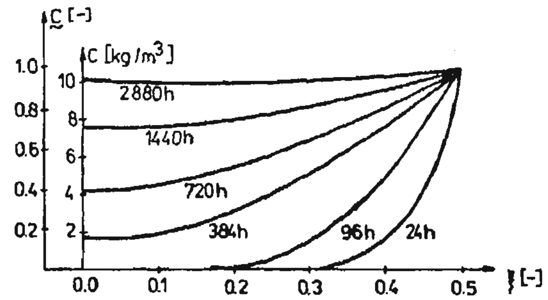
$$D_c = 6\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{m^2/h}],\quad D_T = 4\cdot 10^{-2}\ [\mathrm{m^2/h}], \quad (4.1)$$

— współczynniki rozszerzalności cieplnej α_T [3, 9] i dyfuzyjnej α_c [5, 7]:

$$\alpha_T = 4.7\cdot 10^{-6}\ [1/\mathrm{K}],\quad \alpha_c = 1.25\cdot 10^{-5}\ [\mathrm{m^3/kg}], \quad (4.2)$$

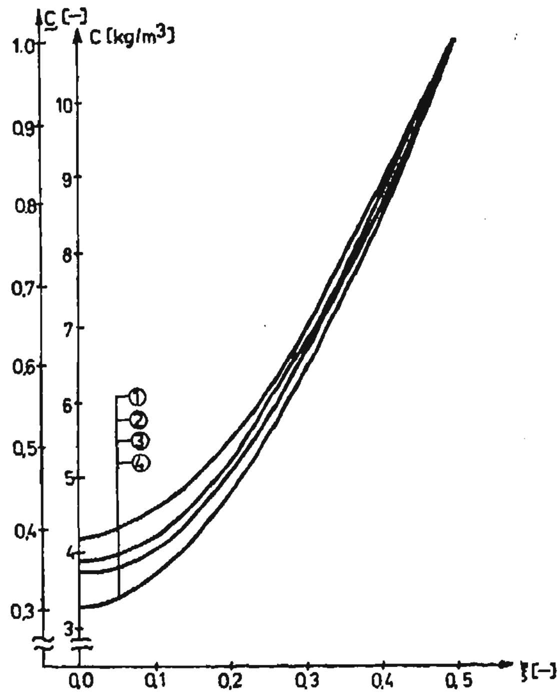


Rys. 2. Rozkład temperatury w warstwie dla przypadku: $\varkappa_u = \varkappa_T = \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0$



Rys. 3. Rozkład koncentracji w warstwie dla przypadku:

$\varkappa_u = \varkappa_T = \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0$



Rys. 4. Rozkład koncentracji w warstwie lepkosprężystej dla czasu $t = 720$ h

① $\varkappa_u = \varkappa_T = \varkappa_{C2} = 0$; $\varkappa_{C1} \neq 0$ oraz $\varkappa_u = \varkappa_T = 0$; $\varkappa_{C2} \neq 0$; $\varkappa_{C1} \neq 0$

② $\varkappa_u \neq 0$; $\varkappa_T = \varkappa_{C2} = 0$; $\varkappa_{C1} \neq 0$ oraz $\varkappa_u \neq 0$; $\varkappa_T = 0$; $\varkappa_{C2} \neq 0$; $\varkappa_{C1} \neq 0$

③ $\varkappa_u = 0$; $\varkappa_T \neq 0$; $\varkappa_{C2} = 0$; $\varkappa_{C1} \neq 0$ oraz $\varkappa_u = 0$; $\varkappa_T \neq 0$; $\varkappa_{C2} \neq 0$; $\varkappa_{C1} \neq 0$

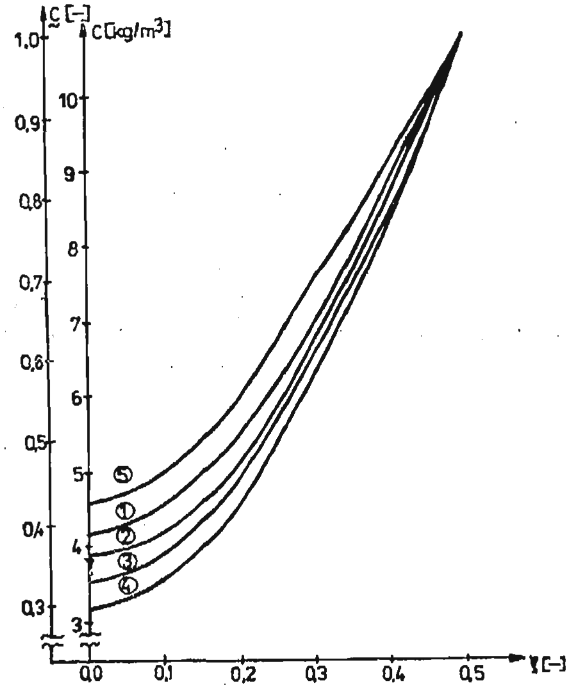
④ $\varkappa_u \neq 0$; $\varkappa_T \neq 0$; $\varkappa_{C2} = 0$; $\varkappa_{C1} \neq 0$ oraz $\varkappa_u \neq 0$; $\varkappa_T \neq 0$; $\varkappa_{C2} \neq 0$; $\varkappa_{C1} \neq 0$

— współczynniki materiałowe m [3, 9], n, l [21, 22]:

$$l = 1305.4 \text{ [J/kgK]}, \quad m = 7862.5 \text{ [J/m}^3\text{K}^2\text{]}, \quad n = 134.2 \text{ [J/m}^3\text{kg}^2\text{]}, \tag{4.3}$$

— współczynniki C_0 i γ [5, 7]:

$$C_0 = 9.75 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^2\text{/N]}, \quad \gamma = 12.46 \cdot 10^2 \text{ [1/h]}, \tag{4.4}$$



Rys. 5. Rozkład koncentracji w warstwie lepkosprężystej dla czasu $t = 720$ h

① $\varkappa_u = \varkappa_T = \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0$

② $\varkappa_u \neq 0;\quad \varkappa_T = \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0;$ oraz $\varkappa_u \neq 0;\quad \varkappa_T = 0;\quad \varkappa_{C2} \neq 0;\quad \varkappa_{C1} = 0$
oraz $\varkappa_u = 0;\quad \varkappa_T \neq 0;\quad \varkappa_{C2} \neq 0;\quad \varkappa_{C1} = 0$

③ $\varkappa_u = 0;\quad \varkappa_T \neq 0;\quad \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0$

④ $\varkappa_u \neq 0;\quad \varkappa_T \neq 0;\quad \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0$ oraz $\varkappa_u \neq 0;\quad \varkappa_T \neq 0;\quad \varkappa_{C2} \neq 0;\quad \varkappa_{C1} = 0$
$\varkappa_u = \varkappa_T = 0;\quad \varkappa_{C2} \neq 0;\quad \varkappa_{C1} = 0$

— moduł sprężystości podłużnej E_0 [9] i współczynnik Poissona ν [7]:

$$E_0 = 2 \cdot 10^{10}\ [\mathrm{Pa}], \qquad \nu = \frac{1}{6}\ [-], \tag{4.5}$$

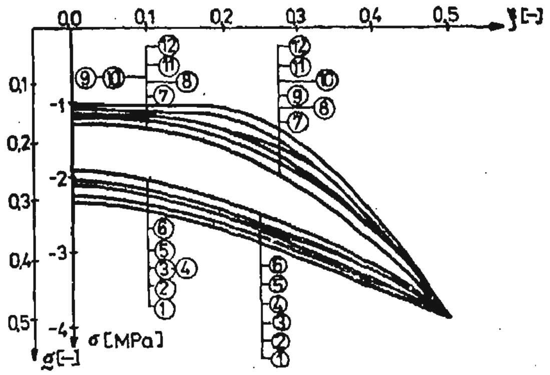
— warunki brzegowe w temperaturze Θ_b [3] i koncentracji C_b [7]:

$$\Theta_b = 40.0\ [\mathrm{K}], \qquad C_b = 10.8\ [\mathrm{kg/m^3}]. \tag{4.6}$$

Wyniki numeryczne przedstawiono w postaci graficznej na rysunkach 2÷15. Mając na uwadze ograniczoną objętość pracy zilustrowano tu tylko najistotniejsze z nich Ze względu na symetrię zadania (rys. 1) na wykresach przedstawiono jedynie wyniki przebiegu procesów dla połowy rozpatrywanej warstwy. Aby umożliwić lepszą analizę ilościową prezentowanych wyników wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe;

$$\xi = \frac{x_3}{h}, \qquad \underset{\sim}{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta_b}, \qquad \underset{\sim}{C} = \frac{C}{C_b}, \qquad \underset{\sim}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_b}, \tag{4.7}$$

przy czym dla temperatury i koncentracji poziomem odniesienia są zadane wartości temperatury i koncentracji na brzegach, natomiast dla naprężeń — poziom ustalonych naprężeń osiąganych w rozpatrywanym procesie w warstwie sprężystej. W trakcie analizy

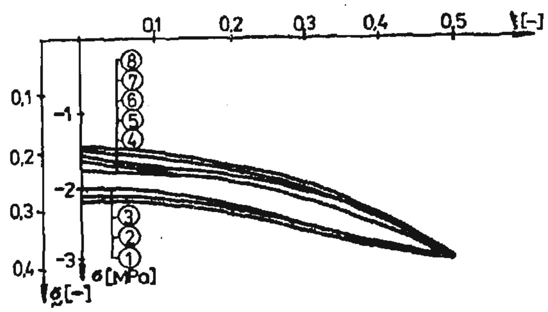


Rys. 6. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla czasu t = 384 h

$$
① \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &= 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \wedge \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \quad ② \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &\neq 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \quad ③ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &= 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \wedge \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right.
$$

$$
④ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &\neq 0 \\ \varkappa_{C2} &= 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \quad ⑤ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &\neq 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \quad ⑥ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &\neq 0 \\ \varkappa_{C2} &= 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \quad ⑦ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &= 0 \\ \varkappa_{C1} &\neq 0 \end{aligned}\right. \wedge \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &\neq 0 \end{aligned}\right.
$$

$$
⑧ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &\neq 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \end{aligned}\right. \quad ⑨ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \end{aligned}\right. \wedge \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C1} &\neq 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \end{aligned}\right. \quad ⑩ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \end{aligned}\right. \quad ⑪ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &\neq 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \end{aligned}\right. \quad ⑫ \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \end{aligned}\right.
$$



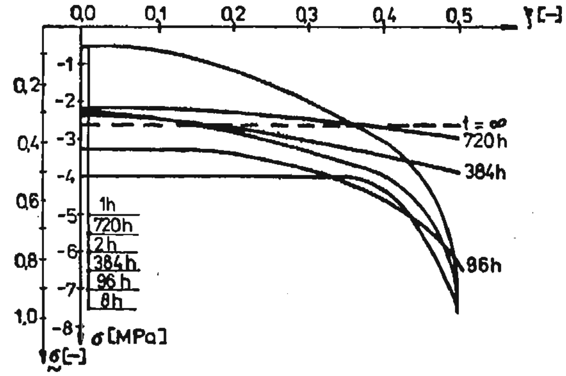
Rys. 7. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla czasu t = 720 h

$$
① \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &= 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \wedge \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &= 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \wedge \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &\neq 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right. \wedge \left\{\begin{aligned} \varkappa_u &\neq 0 \\ \varkappa_T &= 0 \\ \varkappa_{C2} &= 0 \\ \varkappa_{C1} &= 0 \end{aligned}\right.
$$

$$② \begin{cases} \varkappa_u = 0 \\ \varkappa_T \neq 0 \\ \varkappa_{C2} \neq 0 \\ \varkappa_{C1} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \varkappa_u = 0 \\ \varkappa_T \neq 0 \\ \varkappa_{C2} = 0 \\ \varkappa_{C1} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \varkappa_u \neq 0 \\ \varkappa_T \neq 0 \\ \varkappa_{C2} \neq 0 \\ \varkappa_{C1} = 0 \end{cases} \quad ③ \begin{cases} \varkappa_u \neq 0 \\ \varkappa_T \neq 0 \\ \varkappa_{C2} = 0 \\ \varkappa_{C1} = 0 \end{cases}$$

$$④ \begin{cases} \varkappa_u = 0 \\ \varkappa_T = 0 \\ \varkappa_{C2} = 0 \\ \varkappa_{C1} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \varkappa_u = 0 \\ \varkappa_T = 0 \\ \varkappa_{C2} = 0 \\ \varkappa_{C1} \neq 0 \end{cases} \quad ⑤ \begin{cases} \varkappa_u \neq 0 \\ \varkappa_T = 0 \\ \varkappa_{C2} = 0 \\ \varkappa_{C1} \neq 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \varkappa_u \neq 0 \\ \varkappa_T = 0 \\ \varkappa_{C2} \neq 0 \\ \varkappa_{C1} \neq 0 \end{cases}$$

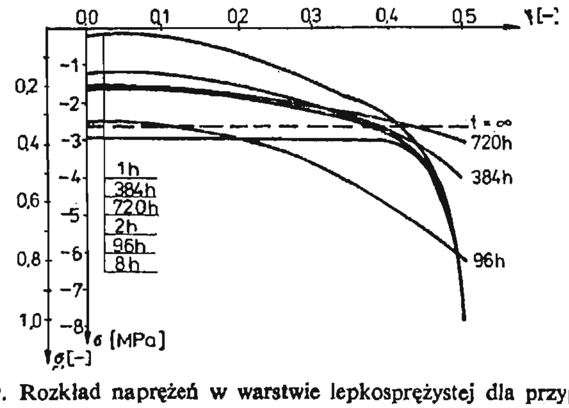
$$⑥ \begin{cases} \varkappa_u = 0 \\ \varkappa_T \neq 0 \\ \varkappa_{C1} \neq 0 \\ \varkappa_{C2} \neq 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \varkappa_u = 0 \\ \varkappa_T \neq 0 \\ \varkappa_{C1} = 0 \\ \varkappa_{C2} \neq 0 \end{cases} \quad ⑦ \begin{cases} \varkappa_u \neq 0 \\ \varkappa_T \neq 0 \\ \varkappa_{C1} \neq 0 \\ \varkappa_{C2} \neq 0 \end{cases} \quad ⑧ \begin{cases} \varkappa_u \neq 0 \\ \varkappa_T \neq 0 \\ \varkappa_{C1} = 0 \\ \varkappa_{C2} \neq 0 \end{cases}$$



Rys. 8. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla przypadku:

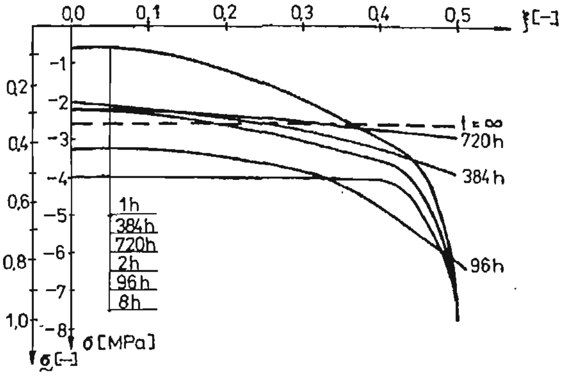
$\varkappa_u = \varkappa_T = \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0.$

Dla t = 96 h pojawiają się zauważalne różnice między naprężeniami w warstwach sprężystej i lepkosprężystej



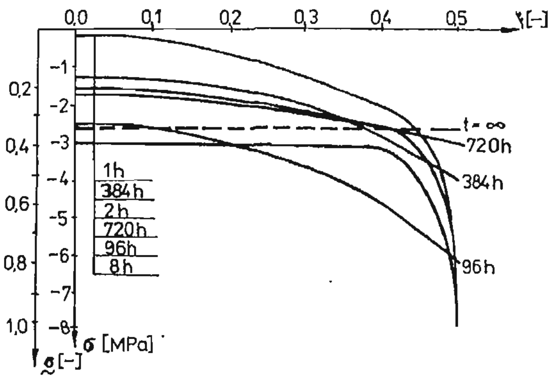
Rys. 9. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla przypadku:

$\varkappa_T \neq 0; \quad \varkappa_u = \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0$



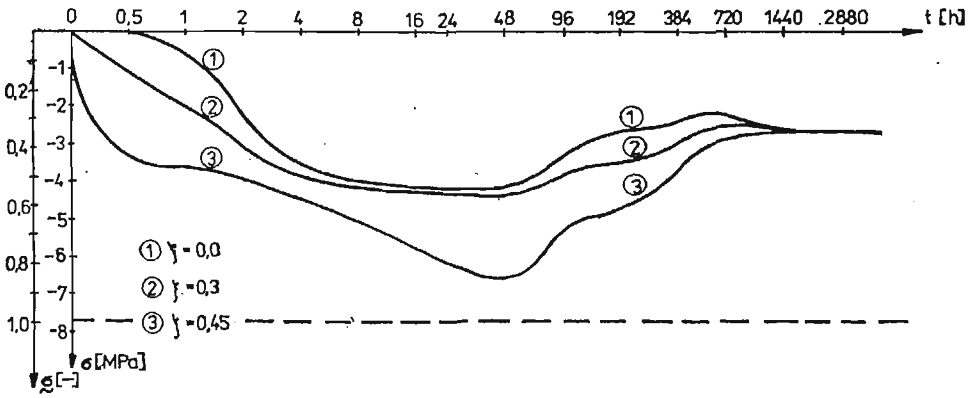
Rys. 10. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla przypadku:

$\varkappa_{C2} \neq \varkappa_{C1} \neq 0; \quad \varkappa_u = \varkappa_T = 0$

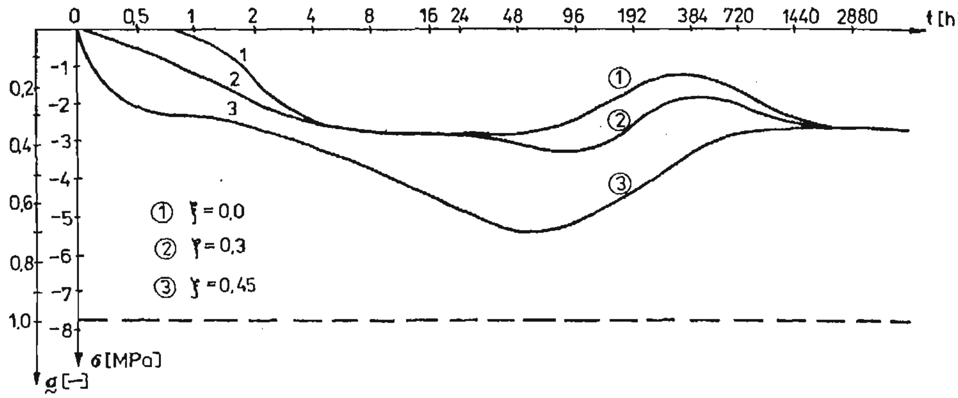


Rys. 11. Rozkład naprężeń w warstwie lepkosprężystej dla przypadku:

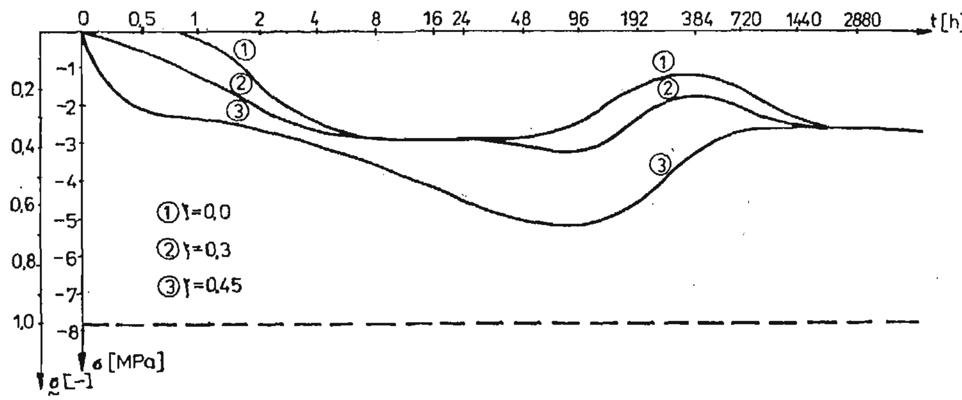
$\varkappa_T \neq \varkappa_{C2} \neq 0; \quad \varkappa_u = 0; \quad \varkappa_{C1} \neq 0$



Rys. 12. Warstwa lepkosprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku: $\varkappa_u = \varkappa_T = \varkappa_{C2} = \varkappa_{C1} = 0$. Linią przerywaną oznaczono poziom ustalonych naprężeń (t = 2880h) w warstwie sprężystej



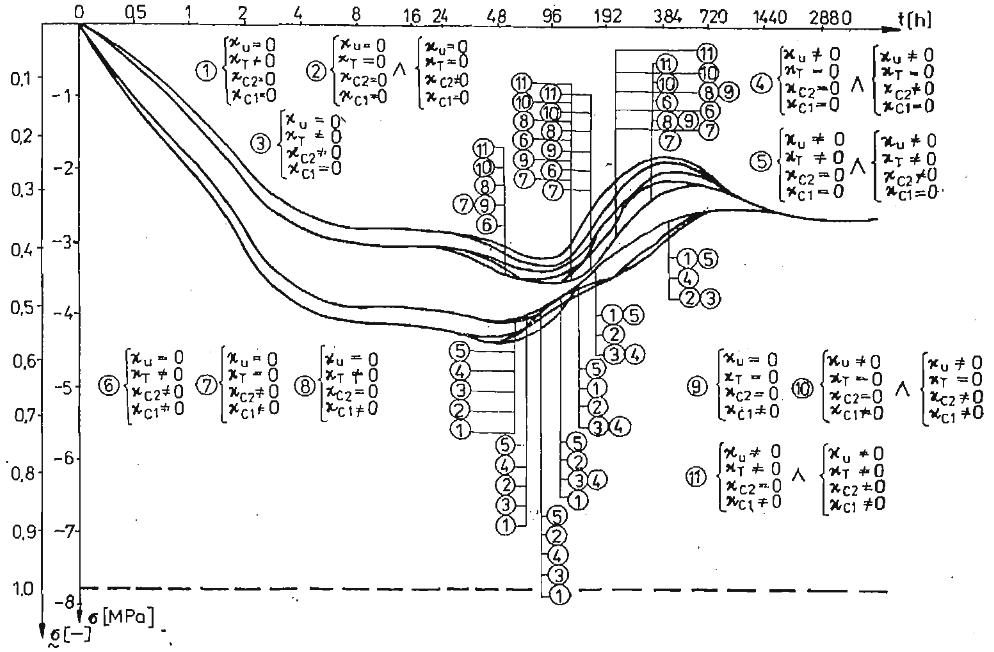
Rys. 13. Warstwa lepkosprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku: $\varkappa_u \neq \varkappa_{C1} \neq 0$; $\varkappa_T = \varkappa_{C2} = 0$. Linią przerywaną oznaczono poziom ustalonych naprężeń (t = 5760h) w warstwie sprężystej



Rys. 14. Warstwa lepkosprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku: $\varkappa_u \neq \varkappa_T \neq \varkappa_{C2} \neq \varkappa_{C1} \neq 0$. Linią przerywaną oznaczono poziom ustalonych naprężeń (t = 5760 h) w warstwie sprężystej

prezentowanych wykresów korzystać należy z definicji współczynników sprzęgających (2.15)÷(2.18). Każdy z nich w zależności od stopnia sprzężenia rozpatrywanego zadania przybierać może bowiem wartość równą lub różną od zera. W ten sposób zadanie w sposób naturalny dzieli się na szesnaście elementarnych przypadków. I tak np. zadaniu zupełnie niesprzężonemu odpowiada przypadek $\varkappa_u = \varkappa_T = \varkappa_{c2} = \varkappa_{c1} = 0$, natomiast zadaniu w którym występuje pełne sprzężenie rozpatrywanych pól — przypadek $\varkappa_u \neq \varkappa_T \neq \varkappa_{c2} \neq \varkappa_{c1} \neq 0$.

Brak pełnego kompletu danych dla innych technologii sprawił, że przyjęto beton jako rozpatrywany ośrodek. Należy jednak pamiętać, że w toku rozwiązania postawionego problemu początkowo-brzegowego poczyniliśmy szereg założeń upraszczających, z których najistotniejsze to pominięcie źródeł ciepła i masy, oraz przyjęcie stałych (uśrednionych) funkcji materiałowych określających własności fizyczne betonu. Okazuje się, że w sytuacjach, gdy zmiany temperatury i koncentracji wywołane reakcjami hydratacji są małe w porównaniu ze zmianami tych wielkości spowodowanymi przepływami ciepła i masy, to zaniedbanie źródeł ciepła i masy jest uzasadnione. Przyjęcie takiego uprosz-



Rys. 15. Warstwa lepkosprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla $\xi = 0.3$. Linią przerywaną oznaczono poziom ustalonych naprężeń w warstwie sprężystej

czenia jak również przyjęcie stałych (uśrednionych) wartości współczynników dyfuzji i termodyfuzji jest na podstawie prac [17, 20, 22] obszernie uzasadnione w pracy [2].

Analizowane w pracy zadanie początkowo-brzegowe należy więc traktować jako kolejne przybliżenie tego złożonego problemu. Ze względu na ograniczoną objętość pracy nie będziemy tu przeprowadzali szczegółowej analizy otrzymanych wyników numerycznych. Warto jednak zaznaczyć — pozostają one w dobrej zgodności z wynikami innych autorów. I tak, jeżeli chodzi o wpływ sprzężeń na rozwój pola cieplnego, oraz sprzężenia cieplno-dyfuzyjne z pracami [2, 17, 20, 22], natomiast w zakresie zagadnień sprzężenia pola mechanicznego z polem koncentracji — z pracą [16]. Otrzymane wyniki numeryczne w sensie opisanych wcześniej założeń upraszczających nabierają znaczenia jako wyniki ilościowe obrazujące wpływ sprzężeń rozpatrywanych pól na siebie. Mogą się one okazać pomocne w rozstrzygnięciu nierzadkiego dylematu, czy dane zadanie początkowo-brzegowe rozwiązywać jako niesprzężone, czy też analizować bardziej złożone zadanie sprzężone.

Literatura

1. R. M. Christensen, *Theory of viscoelasticity*, Academic Press New York and London 1971.
2. F. Gajda, *Sprzężenie cieplno-dyfuzyjne w ciałach lepkosprężystych*, dysertacja doktorska, Politechnika Wrocławska 1983.
3. F. Grudziński, Procesy cieplne w technologii betonów, Warszawa 1976.
4. K. Grysa, R. Szczepański, *O płaskim quasi-statycznym zagadnieniu termodyfuzji dla sprężystego walca kołowego*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 17, 1979.

5. J. Kasperkiewicz, *Dyfuzja wilgoci i deformacje skurczowe w betonie*, PWN, Warszawa 1972.
6. J. Kubik, *Analogie i podobieństwo w liniowych ośrodkach odkształcalnych*, Z. N. Pol. Śl., Bud. 38, Gliwice 1975.
7. A. Mitzel, *Reologia betonu*, PWN, Warszawa 1972.
8. R. Mokryk, Z. Olesiak, *Termodyfuzja w zagadnieniu kontaktu warstwy i półprzestrzeni sprężystej* Mech. Teoret. i Stos. 3/4, 20, 1982.
9. A. M. Neville, *Właściwości betonu*, PWN, Warszawa 1977.
10. W. Nowacki, *Certain problems of thermodiffusion in solids*, A.M.S. 23, 6, 1971.
11. W. Nowacki, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 13, 1975.
12. Z. Olesiak, *Dynamiczne zagadnienia ciał o właściwościach lepko-sprężystych*, Rozpr. Inż. 9, 3, 1961.
13. Z. Piekarski, G. Szefer, *Pełzanie półpłaszczyzny przy mieszanych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inż. 4, 18, 1970.
14. J. Stefaniak, J. Jankowski, *Płaskie fale harmoniczne i dyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 18, 1980.
15. M. Wróbel, *Wariacyjne ujęcie przepływów termodyfuzyjnych sprzężonych z polem naprężeń*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 25, 1987.
16. J. Wyrwał, *Wariacyjne ujęcie termodyfuzji lepkosprężystej*, dysertacja doktorska, Politechnika Krakowska 1979.
17. С. В. Александровский, *Расчёт бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести*, Стройиздат, Москва 1973
18. Н. Х. Арутунян, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Москва 1952
19. Н. Х. Арутунян, *Ползучест стареющих материалов. Ползучест бетона*, Мех. Твёрд. Тела, Москва 6, 1967
20. Л. Я. Волосян, *Тепло- и массообмен при термообработке бетонных и железобетонных изделий*, Минск 1973
21. А. В. Лыков, *Теоретические основы строительной физики*, Минск 1961
22. Л. А. Малинина; *Тепловлажностная обработка тяжелого бетона*, Москва 1977
23. П. В. Цой, *Методы расчёта отдельных задач тепломассопереноса*, Москва 1971
24. Р. Н. Швец, Я. М. Дасюк, *О вариационных теоремах термодиффузии деформируемых твёрдых тел*, Мат. Физ. 22, 1977

Резюме

ТЕРМОДИФФУЗИОННЫЕ ПЕРЕПЛЫВЫ СВЯЗАННЫЕ С ПОЛЕМ НАПРЯЖЕНИЯ В ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В работе обсуждено термодиффузионные переплывы связанные с механическим полем в однородном, изотропном, вязкоупругом слое. Процесс вызывают данные величины температуры и концентрации на крах слоя, так же как происходит в классическом процессе запаривания бетона. Для решения проблемы использовано соответствующий функционал и модифицированный непосредственный метод Ритца. Результаты представлено в графической форме.

Summary

HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEM COUPLED WITH STRESS FIELD IN VISCOELASTICITY

Problem of heat and mass transfer coupled with stress field in homogeneous and isotropic viscoelastic layer is treated. The process is based on the value of temperature and concentration on the boundary as in technological processes in concrete. The solution is based on the appropriate functional and a modified direct Ritz method is used. The results are represented in the diagram form.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 maja 1987 roku.