

## MINIMALIZACJA ZUŻYCIA PALIWA W LOCIE NA ZADANĄ ODLEGŁOŚĆ

RYSZARD MAROŃSKI

*Politechnika Warszawska*

Zagadnienie minimalizacji zużycia paliwa przez samolot w locie na zadaną odległość, mimo iż upłynęło wiele lat od jego sformułowania, nie doczekało się, jak dotąd, zadowalającego rozwiązania. W pracy wskazano na podstawową trudność polegającą na tym, że o ile dla założonej stałej wysokości lotu pewne sterowanie z klasy funkcji przedziałami ciągłych może spełniać warunki konieczny i wystarczający optymalności na łuku osobliwym, o tyle dla zmiennej wysokości lotu sterowanie optymalne w podanej klasie funkcji może nie istnieć. W pracy omówiono niektóre pojęcia teorii sterowania optymalnego, dokonano przeglądu stosowanych modeli ruchu samolotu i na tym tle wskazano, na podstawie cytowanej literatury, główne kierunki poszukiwań rozwiązania zadania.

### Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $A$  — punkt początkowy,
- $B$  — punkt końcowy,
- $C_x$  — współczynnik oporu aerodynamicznego,
- $C_{x0}$  — współczynnik oporu aerodynamicznego przy zerowej sile nośnej,
- $C_z$  — współczynnik siły nośnej,
- $E$  — energia właściwa samolotu, (energia przypadająca na jednostkę ciężaru)
- $g$  — przyspieszenie ziemskie,
- $H$  — hamiltonian,
- $h$  — wysokość lotu samolotu,
- $J$  — wskaźnik jakości,
- $K$  — współczynnik w biegunowej samolotu,
- $M$  — masa samolotu,
- $m$  — masa zużytego paliwa,
- $P_s$  — ciąg silnika,
- $P_x$  — opór aerodynamiczny,
- $P_z$  — siła nośna,

- $Q$  — współczynnik jednostkowego zużycia paliwa,  
 $S$  — pole powierzchni płata,  
 $t$  — czas,  
 $u$  — wektor sterujący,  
 $V$  — prędkość lotu,  
 $x$  — współrzędna poziomego położenia samolotu,  
 $\mathbf{x}$  — wektor stanu,  
 $\gamma$  — kąt toru lotu,  
 $\eta$  — współczynnik wykorzystania ciągu ( $P_s = \eta P_{smax}$ ),  
 $\lambda$  — wektor sprzężony,  
 $\rho$  — gęstość powietrza,  
 $\omega$  — funkcja fundamentalna rozwiązania.

### Znaczenie indeksów:

- $(\cdot)_{max}$  — wartość maksymalna,  
 $(\cdot)_{min}$  — wartość minimalna,  
 $(\cdot)_{mo}$  — wartość odpowiadająca minimalnemu oporowi,  
 $(:)$  — pochodna względem czasu,  
 $(\cdot)'$  — pochodna,  
 $(\cdot)^T$  — transpozycja wektora.

## 1. Wprowadzenie

Rozważmy następujące zagadnienie. Samolot porusza się w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni Ziemi. Rozpoczyna swój ruch w zadanym punkcie płaszczyzny i ma osiągnąć inny zadany punkt w taki sposób, aby zużyć najmniej paliwa. Czas przelotu nie jest z góry zadany. Jak widać sformułowanie problemu na tym etapie jest mało precyzyjne. Jego uściślenie może nastąpić dopiero po dokonaniu wyboru modelu ruchu samolotu. Omówieniu stosowanych modeli ruchu poświęcono rozdział trzeci niniejszego opracowania, przedtem jednak (w rozdziale drugim) omówiono wybrane pojęcia teorii sterowania optymalnego. W rozdziale czwartym pokazano, dla tego samego modelu ruchu samolotu, ale przy różnych założeniach odnośnie stałości wysokości lotu, że rozwiązanie zadania może bądź zawierać łuki osobliwe, bądź w ogóle nie istnieć w klasie sterowań przedziałami ciągłych. Rozdział piąty zawiera krótkie omówienie wyników otrzymanych przez innych autorów.

## 2. Wybrane pojęcia teorii sterowania optymalnego

Najprostsze zadanie rachunku wariacyjnego sformułowane jest w następujący sposób: poszukiwana jest taka krzywa opisana funkcją  $y(x)$  przechodząca przez wybrane punkty  $A$  i  $B$ , minimalizująca całkowity wskaźnik jakości (funkcjonał):

$$J = \int_A^B f_0(x, y, y') dx, \quad (1)$$

w którym  $f_0(x, y, y')$  jest znaną funkcją swoich argumentów. Funkcję  $y(x)$  można wyznaczyć rozwiązując równanie Eulera-Lagrange'a [3, 4]:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f_0}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f_0}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

z warunkami brzegowymi:

$$y(x_A) = y_A, \quad y(x_B) = y_B. \quad (3)$$

Warunek (2) jest warunkiem koniecznym ekstremum, a otrzymywany jest z przyrównania do zera wariacji funkcjonału (1). Równanie (2) jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, zatem jego rozwiązanie zawiera dwie stałe dowolne, które mogą być wyznaczone z warunków brzegowych (3).

W szczególnym przypadku podanego zagadnienia, gdy funkcjonał jest liniowy ze względu na pochodną  $y'$ :

$$J = \int_A^B [\varphi(x, y) + y' \psi(x, y)] dx, \quad (4)$$

równanie Eulera-Lagrange'a degeneruje się do następującego równania algebraicznego:

$$\omega(x, y) = 0, \quad (5)$$

gdzie:

$$\omega(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (6)$$

Funkcja  $\omega(x, y)$  nazywa się funkcją fundamentalną rozwiązania [11], zaś krzywa  $y(x)$  będąca rozwiązaniem równania (5) nazywa się łukiem osobliwym (singular arc). Na ogół nie jest ona rozwiązaniem postawionego zadania, gdyż nie zawiera stałych dowolnych pozwalających na spełnienie warunków (3). Dalszą konsekwencją jest również to, że inne warunki konieczne nie zachowują tradycyjnej postaci.

Klasyczny rachunek wariacyjny nie uwzględnia ograniczeń nałożonych na pochodną  $u = y'$ , to jest ograniczeń:

$$u_{min} \leq u \leq u_{max}. \quad (7)$$

Ich uwzględnienie można uznać za istotny wkład współczesnej teorii sterowania optymalnego. Dołączenie ograniczeń (7) do zagadnienia opisanego funkcjonałem (4) z warunkami brzegowymi (3) w istotny sposób zmienia możliwość jego rozwiązania. Zdegenerowane równanie Eulera-Lagrange'a (5) jest warunkiem koniecznym optimum jedynie dla tej części krzywej  $y(x)$ , dla której ograniczenia (7) nie są aktywne, to znaczy:

$$u_{min} < u < u_{max}. \quad (8)$$

Możliwe jest zatem osiągnięcie punktów  $A$  i  $B$  ekstremali dla  $u = u_{min}$  lub  $u = u_{max}$ .

Oryginalną, bo nie nawiązującą do metodyki rachunku wariacyjnego, metodę rozwiązania zagadnienia z funkcjonałem liniowym ze względu na  $y'$ , podał i zastosował do szeregu

przypadków Miele. Metoda ta daje warunki konieczny i wystarczający optymalności, dlatego też zostanie tu przytoczona.

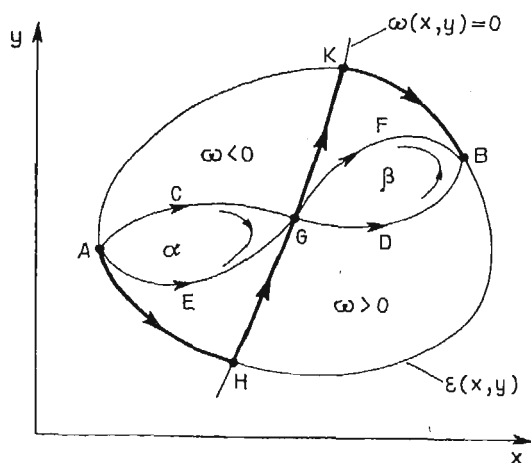
Założmy, że wszystkie rozwiązania dopuszczalne zadania zawierają się we wnętrzu krzywej domkniętej:

$$\varepsilon(x, y) = 0 \quad (9)$$

oraz, że punkty początkowy  $A$  i końcowy  $B$  leżą na tej krzywej

$$\varepsilon(x_A, y_A) = 0, \quad \varepsilon(x_B, y_B) = 0. \quad (10)$$

Założmy ponadto, że krzywa  $\omega(x, y) = 0$  dzieli ten obszar na dwa podobszary, w których znak  $\omega$  jest określony, na przykład taki jak na rysunku 1. Obliczmy teraz różnicę wartości



Rys. 1. Obszar rozwiązań dopuszczalnych (AHGKB — krzywa minimalizująca funkcjonal)

funkcjonału (4) dla dwóch arbitralnie wybranych trajektorii  $ACGDB$  i  $AEGFB$  łączących punkty  $A$  i  $B$ :

$$\begin{aligned} J_{ACGDB} - J_{AEGFB} &= \int_{ACGDB} \varphi dx + \psi dy - \int_{AEGFB} \varphi dx + \psi dy = \\ &= \oint_{ACGEA} \varphi dx + \psi dy + \oint_{GDBFG} \varphi dx + \psi dy, \end{aligned} \quad (11)$$

skąd, po zastosowaniu twierdzenia Greena otrzymamy:

$$J_{ACGDB} - J_{AEGFB} = - \iint_{\alpha} \omega dx dy + \iint_{\beta} \omega dx dy, \quad (12)$$

dzie  $\omega$  ane jest związkem (6), zaś  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają obszary ograniczone odpowiednio krzywymi  $ACGEA$  i  $GDBFG$ . Jeżeli w obszarze  $\alpha$   $\omega < 0$ , zaś w obszarze  $\beta$   $\omega > 0$ , to wówczas:

$$J_{ACGDB} > J_{AEGFB}. \quad (13)$$

Ze względu na to, że obie krzywe  $ACGDB$  i  $AEGFB$  można wybrać dowolnie, to można powiedzieć, że krzywa  $AHGKB$  minimalizuje funkcjonał (4). Szczegóły dotyczące innych przypadków znajdują się w pracy [11].

W teorii sterowania optymalnego zadanie minimalizacji funkcjonału sformułowane jest w sposób następujący: poszukujemy w klasie funkcji przedziałami ciągłych takiego wektora sterowania  $u(t)$

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}, \quad (14)$$

aby całkowity wskaźnik jakości:

$$J = \int_{t_A}^{t_B} f_0(x, u, t) dt \quad (15)$$

przy ograniczeniach w postaci równań stanu

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (16)$$

i zadanych warunkach brzegowych, osiągał minimum. Do wyznaczenia sterowania optymalnego  $u^*$  można posłużyć się warunkiem koniecznym minimum funkcjonału — zasadą maksimum Pontriagina. W tym celu należy poszukać sterowania maksymalizującego hamiltonian zadania:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \arg \max_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} H(x, u, \lambda, t) = \\ &= \arg \max_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} [-f_0(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Wektor  $\lambda$  nazywany jest wektorem sprzężonym z wektorem stanu  $x$ , albo inaczej wektorem mnożników Lagrange'a. Spełnia on równanie:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (18)$$

(Ze względu na oczywiste podobieństwo do równań mechaniki analitycznej równania stanu (16) i sprzężone (18) nazywane są także równaniami kanonicznymi Hamiltona). Rozwiązanie zadania sterowania optymalnego polega na rozwiązaniu zagadnienia brzegowego dla równań stanu (16) i równań sprzężonych (18) przy sterowaniu wyznaczonym związkami (17). We wnętrzu zbioru sterowań dopuszczalnych związkowi (17) odpowiadają warunki:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0. \quad (19)$$

Pierwszy z nich, po rozwikłaniu ze względu na wektor sterowania, pozwala zwykle na wyznaczenie sterowania optymalnego  $u^*$ , drugi zaś oznacza, że macierz drugich pochodnych hamiltonianu względem wektora sterowania ma być ujemnie określona. Jest to tak zwany silny warunek Legendre'a-Clebscha. Jeżeli macierz ta jest ujemnie półokreślona to mówimy, że spełniony jest słaby warunek Legendre'a-Clebscha.

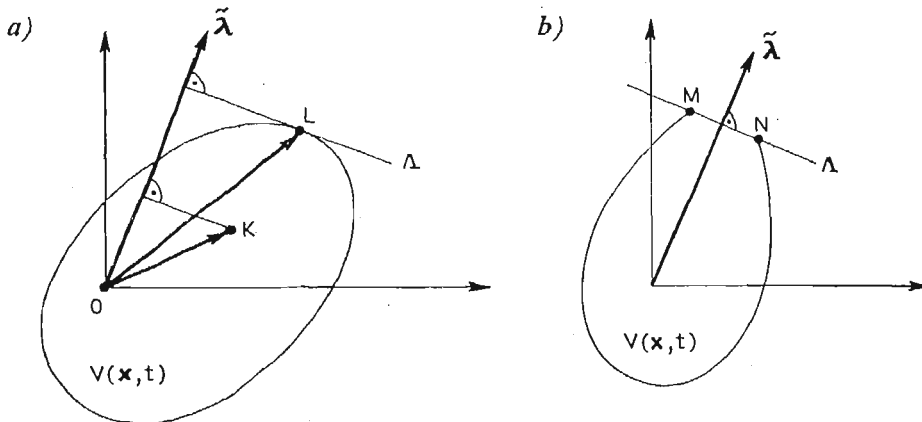
Postać zasady maksimum danej związkami (17) pozwala na następującą interpretację geometryczną [12, 18]. Utwórzmy zbiór prędkości uogólnionych:

$$V(x, t) = \{f(x, u, t), f_0(x, u, t) : u \in \langle u_{min}, u_{max} \rangle\}, \quad (20)$$

jako zbiór miejsc geometrycznych końca wektora  $\{f(x, u, t), f_0(x, u, t)\}$  przy ustalonych  $x$  i  $t$ , podczas gdy  $u$  zmienia się wewnątrz całego zbioru sterowań dopuszczalnych  $\langle u_{min}, u_{max} \rangle$ . Zasada maksimum wyraża żądanie, aby w każdej chwili czasu rzut wektora  $\vec{OK}$  na kierunek rozszerzonego wektora sprzężonego  $\tilde{\lambda} = \{\lambda, -1\}$  był maksymalny (punkt  $L$  na rys. 2a). Punkt  $L$  odpowiadający rozwiązaniu optymalnemu może być interpretowany jako punkt wspólny hiperpłaszczyzny  $\Lambda$  stycznej do zbioru prędkości uogólnionych i tego zbioru. Wektor sprzężony  $\tilde{\lambda}$  jest wtedy wektorem normalnym do tej hiperpłaszczyzny.

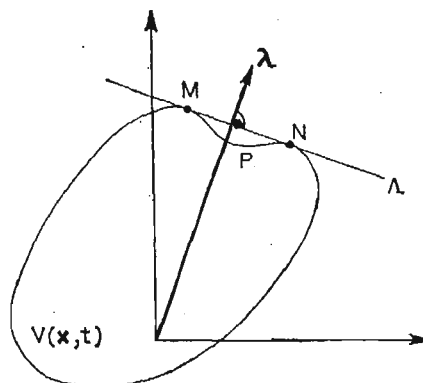
Rozważmy następujące sytuacje:

1° — Zbiór prędkości uogólnionych  $V$  jest wypukły i ma on z hiperpłaszczyzną  $\Lambda$  w danej chwili czasu jeden punkt wspólny. Rozwiązaniu optymalnemu odpowiada punkt  $L$  wykresu (rys. 2a).



Rys. 2. Wypukły zbiór prędkości uogólnionych

2° — Zbiór prędkości uogólnionych  $V$  jest wypukły i ma on z hiperpłaszczyzną  $\Lambda$  nieskończenie wiele punktów wspólnych. Niech  $V_\Lambda$  oznacza przecięcie zbiorów  $V$  i  $\Lambda$  (na rys. 2b odcinek  $MN$ ).  $V_\Lambda$  jest zbiorem wypukłym z założenia wypukłości zbioru  $V$ . Żaden punkt



Rys. 3. Niewypukły zbiór prędkości uogólnionych

zbioru  $V_A$  nie jest wyróżniony — zasada maksimum w swojej podstawowej wersji zawodzi. Sterowanie odpowiadające punktom zbioru  $V_A$  jest osobliwe.

3° — Zbiór prędkości uogólnionych  $V$  nie jest wypukły (na rys. 3 krzywa  $MPN$ ), wówczas można go uczynić wypukłym w sposób sztuczny zastępując ten zbiór najmniejszym zbiorem wypukłym go zawierającym (odcinek  $MN$  na rys. 3). Może wówczas dojść do pojedynczego przełączenia sterowania pomiędzy punktami  $M$  i  $N$ , może być jednak wygenerowany stan należący do owego uzupełnienia zbioru, który sam do zbioru  $V$  nie należy, a otrzymywany jest w wyniku nieskończonej częstoty przełączeń sterowania pomiędzy punktami zbioru  $V$  (punktami  $M$  i  $N$  na rys. 3). Sterowanie odpowiadające takiej sytuacji będziemy nazywali sterowaniem uogólnionym (chattering control).

Przytoczone przykłady wskazują, że istotną ze względu na istnienie rozwiązania w klasie sterowań przedziałami ciągłych własnością zadania jest wypukłość zbioru prędkości uogólnionych. Faktycznie znajduje to potwierdzenie w twierdzeniu egzystencjalnym (porównaj [8], str. 284). Rozwiązanie zadania istnieje również w przypadku szczególnym, gdy hamiltonian liniowo zależy od sterowania (porównaj [8], str. 288).

Jeżeli hamiltonian jest liniowo zależny od sterowania, to na łuku osobliwym (przypadek 2°) pochodna hamiltonianu względem sterowania znika tożsamościowo. Istotnie, rozważmy funkcjonał w postaci (4), to jest:

$$J = \int_{t_A}^{t_B} [\varphi(t, x) + \psi(t, x)u] dt, \quad (21)$$

z następującym równaniem stanu:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = u. \quad (22)$$

Hamiltonian ma wtedy postać:

$$H = -\varphi(t, x) - \psi(t, x)u + \lambda u. \quad (23)$$

Dla zmiennej sprzężonej:

$$\lambda = \psi(t, x) \quad (24)$$

hamiltonian nie zależy od sterowania (jego pochodna względem sterowania znika)

Po wykorzystaniu (22) otrzymujemy następującą zależność:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x} u. \quad (25)$$

Zmienna sprzężona  $\lambda$  spełnia również równanie (18):

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} u. \quad (26)$$

Odejmując stronami równania (25) i (26) mamy:

$$\omega(t, x) = \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad (27)$$

czyli otrzymaliśmy równanie łuku osobliwego (porównaj (5)).

Sterowanie na łuku osobliwym, dla hamiltonianu liniowo zależnego od sterowania, można wyznaczyć z warunku, że  $\partial H/\partial u$  jest tożsamościowo równe zero. Otrzymujemy wtedy ciąg warunków (porównaj [12, 20]):

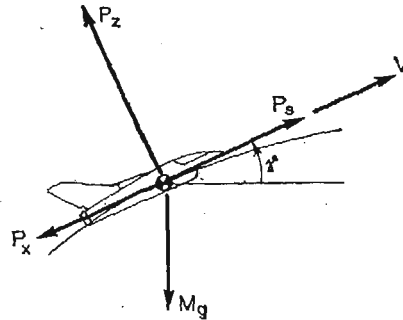
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0, \dots \quad (28)$$

Mimo, że w pierwszym warunku (28) pochodna  $\partial H/\partial u$  nie zależy od sterowania, to zależy od  $(x, \lambda, t)$ , a zatem jej kolejne pochodne względem czasu mogą jawnie zawierać sterowanie poprzez związki (16) i (18). Należy jednak pamiętać, że na łuku osobliwym warunek konieczny Legendre'a-Clebscha spełniony jest jedynie w słabej postaci, dlatego trzeba go badać oddzielnie (porównaj [12, 18]).

### 3. Modele ruchu samolotu

W niniejszym rozdziale przedstawiono stosowany przez autora [9] model ruchu samolotu traktowanego jak punkt materialny oraz pokazano przy jakich dodatkowych założeniach upraszczających można z tego modelu otrzymać model najprostszy, tak zwany model energetyczny [13]. Wszystkie modele ruchu badane w cytowanej literaturze mieszczą się w podanym przedziale, chociaż, z uwagi na różnorodność założeń upraszczających poczynionych przez ich autorów, trudno omawiać każdy z nich oddzielnie. Model energetyczny będzie natomiast wykorzystany w rozdziale 4.

Zakładamy, że samolot ma stale zachowaną równowagę momentów podłużnych i jest traktowany jak punkt materialny poruszający się w płaszczyźnie pionowej względem płaskiej powierzchni nieruchomej Ziemi. Zakładamy ponadto, że wektory ciągu  $P_s$  oraz prędkości lotu  $V$  są współliniowe. Siły działające na samolot przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Siły działające na samolot

Z twierdzenia o pochodnej pędu względem czasu otrzymujemy (porównaj [9]):

$$M \frac{dV}{dt} = \eta P_{smax} - P_x - Mg \sin \gamma, \quad (29)$$

$$MV \frac{d\gamma}{dt} = P_z - Mg \cos \gamma. \quad (30)$$



Powyższy układ równań uzupełniają dwa związki kinematyczne:

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma, \quad (31)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \gamma, \quad (32)$$

oraz zakładając, że zmiana masy następuje tylko w wyniku spalania paliwa, równanie zmiany masy samolotu:

$$\frac{dM}{dt} = -\eta Q. \quad (33)$$

Siła nośna  $P_z$  i opór  $P_x$  są funkcjami prędkości  $V$ , wysokości lotu  $h$  oraz kąta natarcia, a współczynnik jednostkowego zużycia paliwa  $Q$  zależy od prędkości i wysokości lotu.

Równania (29)÷(33) tworzą układ równań stanu (16). Zmiennymi stanu są wielkości stojące pod znakiem pochodnej, zaś zmiennymi sterującymi te wielkości, które nie dadzą się wyrazić jako funkcje zmiennych stanu i czasu. Wskaźnikiem jakości jest masa zużytego paliwa w chwili końcowej  $m(t_B)$ , gdzie:

$$m(t) = \int_{t_A}^t \eta Q dt; \quad m(t_A) = 0. \quad (34)$$

Zamiast tego związku wygodniej posługiwać się równaniem:

$$\frac{dm}{dt} = \eta Q, \quad (35)$$

z warunkiem początkowym  $m(t_A) = 0$ . (Zachodzi oczywisty związek między masą samolotu  $M$  a masą zużytego paliwa  $m$ :  $M(t) = M(t_A) - m(t)$ ).

W sformułowanym zadaniu zmienne stanu w chwili początkowej  $t_A$  są określone, natomiast w chwili końcowej  $t_B$  mogą być ustalone lub dowolne. Zasięg lotu ( $x_B - x_A$ ) jest zadany, czas przelotu ( $t_B - t_A$ ) nie jest z góry znany i wynika z rozwiązania zadania. Z uwagi na to, że równania stanu są autonomiczne, zaś całkowanie równań różniczkowych najlepiej przeprowadzać w znanym przedziale zmiennej niezależnej, zamiast czasu  $t$  wprowadza się zwykle nową zmienną niezależną  $x$  wykorzystując równanie (32). (Zagadnieniem analogicznym do rozważanego jest zadanie maksymalizacji zasięgu lotu, wówczas wygodnie jest za zmienną niezależną uważać zużyte paliwo, którego ilość przeznaczona na przelot jest z góry znana).

Uprościmy teraz równania ruchu samolotu (29)÷(33) otrzymując tak zwany model energetyczny. Wprowadzamy w tym celu nową zmienną stanu — energię właściwą samolotu określoną związkiem

$$E = h + \frac{V^2}{2g}. \quad (36)$$

Różniczkując ten związek względem czasu, po uwzględnieniu (31) mamy:

$$\frac{dE}{dt} = V \sin \gamma + \frac{V}{g} \frac{dV}{dt}. \quad (37)$$

Po wyznaczeniu z tego równania  $dV/dt$  i wstawieniu do równania (29) otrzymujemy:

$$\frac{Mg}{V} \left( \frac{dE}{dt} - V \sin \gamma \right) = \eta P_{smax} - P_x - Mg \sin \gamma, \quad (38)$$

skąd:

$$\frac{dE}{dt} = (\eta P_{smax} - P_x) \frac{V}{Mg}. \quad (39)$$

Jest to najprostsze równanie różniczkowe opisujące dynamikę samolotu. Wyraża ono fakt, że różnica mocy dostarczanej do układu i mocy traconej na skutek dyssypacji jest równa przyrostowi energii tego układu, stąd też nazwa modelu opisywanego tym równaniem — model energetyczny. Ruch samolotu opisany jest wtedy równaniami (39), (36) oraz związkami otrzymanymi z zależności (30) i (32) przy założeniu, że  $d\gamma/dt \approx 0$  i, że kąt pochylenia trajektorii  $\gamma$  jest mały:

$$P_z = Mg, \quad (40)$$

$$\frac{dx}{dt} = V. \quad (41)$$

Energetyczny model ruchu samolotu nie wymaga aby prędkość  $V$  i wysokość lotu  $h$  były ciągłymi funkcjami czasu. Obie te funkcje mogą doznawać nieciągłości pod warunkiem, że energia właściwa  $E$  jest ciągłą funkcją czasu. Własność ta odgrywa istotną rolę w zagadnieniu rozpędzania z jednoczesnym nabieraniem wysokości [13].

#### 4. Rozwiązanie zadania dla modelu energetycznego

Celem niniejszego rozdziału jest pokazanie, że dla energetycznego modelu ruchu samolotu przy założeniu stałej wysokości lotu można względnie prosto otrzymać rozwiązanie optymalne metodą Mielego. Rozwiązanie to zawiera łuk osobliwy odpowiadający lotowi ustalonemu, co jest zgodne z intuicją i praktyką. Odstąpienie od założenia o stałej wysokości lotu prowadzi do zaskakującego wniosku. Nie tylko otrzymane poprzednio rozwiązanie nie jest optymalne, rozwiązanie zadania może w ogóle nie istnieć w klasie sterowań przedziałami ciągłych.

Przy założeniu, że lot samolotu o stałej masie  $M$  odbywa się na stałej wysokości ( $h = \text{const.}$ ) równania (39) i (35) po wykorzystaniu (41) przybierają postacie:

$$\frac{dV}{dx} = (\eta P_{smax} - P_x) / MV, \quad (42)$$

$$\frac{dm}{dx} = \eta Q / V. \quad (43)$$

Zagadnienie minimalizacji zużycia paliwa, dla zadanych warunków brzegowych:

$$E(x_A) = E_A, \quad E(x_B) = E_B, \quad m(x_A) = 0, \quad (44)$$

można sprowadzić do zagadnienia minimalizacji całki liniowej:

$$m(x_B) = \int_A^B \frac{\eta Q}{V} dx = \int_A^B \psi(V) dV + \varphi(V) dx, \quad (45)$$

gdzie funkcje  $\psi(V)$  i  $\varphi(V)$  można określić wyznaczając  $\eta$  ze wzoru (42), wtedy:

$$\psi(V) = \frac{Q(V)M}{P_{smax}}, \quad \varphi(V) = \frac{Q(V)P_x(V)}{VP_{smax}}. \quad (46)$$

Postać funkcjonału (45) jest analogiczna do postaci danej wzorem (4). Przyjmując, że biegunowa samolotu dana jest w klasyczny sposób:

$$C_x = C_{x0} + KC_z^2, \quad (47)$$

po wykorzystaniu (40) z drugiego warunku (46) otrzymujemy:

$$\varphi(V) = \frac{QC_1 V}{P_{smax}} + \frac{QC_2}{P_{smax} V^3}, \quad (48)$$

gdzie:

$$C_1 = 0.5\rho SC_{x0}, \quad C_2 = \frac{2M^2 g^2 K}{\rho S}. \quad (49)$$

Przy założeniu, że  $P_{smax}$ ,  $Q$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  nie zależą od prędkości lotu, funkcja fundamentalna rozwiązania (6) ma postać:

$$\omega(x, V) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial V} = -\frac{QC_1}{P_{smax}} + \frac{3QC_2}{P_{smax} V^4}. \quad (50)$$

Po przyrównaniu jej do zera otrzymujemy rozwiązanie optymalne na łuku osobliwym

$$V = \sqrt[4]{\frac{3C_2}{C_1}} = const. \quad (51)$$

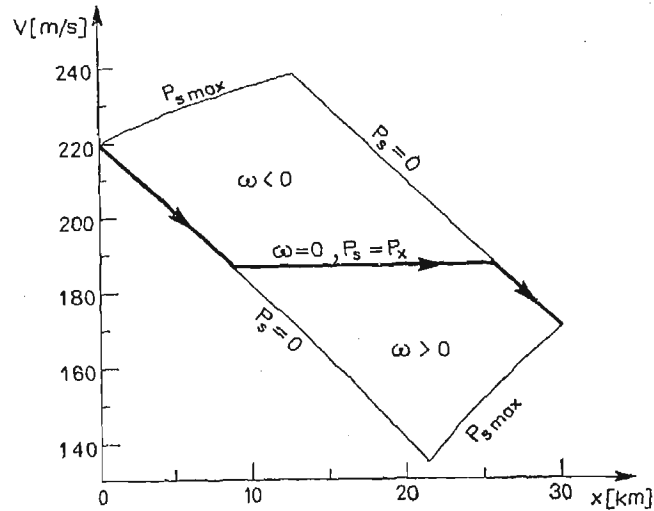
Z powyższego warunku oraz z równania (42) wynika, że na łuku osobliwym trajektorii optymalnej ciąg pośredni silnika stale równoważy opór aerodynamiczny samolotu:

$$P_s = P_{smax} \eta = P_x. \quad (52)$$

Granice obszaru rozwiązań dopuszczalnych na płaszczyźnie  $(x, V)$  wyznaczają krzywe poprowadzone z punktów początkowego i końcowego, a otrzymane ze scałkowania równania (42) dla  $\eta = 0$  i  $\eta = 1$ .

Przykładowe rozwiązanie zagadnienia dla samolotu klasy TU-134A zawiera rys. 5. Składa się ono z trzech odcinków: skrajnych, na których ciąg jest minimalny  $P_s = 0$  i środkowego, gdzie ciąg ma wartość pośrednią.

Odstąpienie od założenia o stałej wysokości lotu prowadzi do istotnych komplikacji. Metody Mielego nie można zastosować, co więcej, nabiera znaczenia kwestia istnienia rozwiązania w klasie sterowań przedziałami ciągłych. Twierdzenie egzystencjalne (patrz [8] str. 284) wymaga bowiem, aby zbiór prędkości uogólnionych był wypukły. Dla energetycznego modelu ruchu samolotu warunek ten nie jest spełniony, na co zwrócono uwagę w pracy [19].



Rys. 5. Rozwiązanie zagadnienia dla stałej wysokości lotu

Pokażemy teraz, że uzyskane poprzednio sterowanie, w przypadku gdy wysokość lotu może być zmienna, nie jest optymalne. Lepsze od niego jest sterowanie uogólnione.

Rozważmy ruch samolotu opisany modelem energetycznym. Równania tego modelu po zmianie zmiennej niezależnej, są następujące (porównaj związki (39), (35), (40), (41), (36)):

$$\frac{dE}{dx} = E' = (\eta P_{smax} - P_x) / Mg, \quad (53)$$

$$\frac{dm}{dx} = m' = \eta Q / V, \quad (54)$$

$$P_z = Mg, \quad (55)$$

$$E = h + \frac{V^2}{2g}. \quad (56)$$

Minimalizowana jest masa zużytego paliwa  $m(x_B)$  przy warunkach brzegowych (44), przy czym dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że:

$$E(x_A) = E(x_B) = E_0. \quad (57)$$

Biegunowa samolotu opisana jest zależnością (47), zaś o wielkościach  $P_{smax}$ ,  $Q$ ,  $\rho$ ,  $C_{x0}$ ,  $K$ , podobnie jak poprzednio zakładamy, że są stałe. Dokonamy zamiany zmiennych w podany w pracy [6] sposób:

$$\hat{E} = E(P_z/P_x)_{max}, \quad (58)$$

$$\hat{m} = mV_{mo}P/Q, \quad (59)$$

gdzie  $(P_z/P_x)_{max}$  jest doskonałością maksymalną przy spełnionym warunku (55):

$$(P_z/P_x)_{max} = Mg/P_{xmo}, \quad (60)$$

$P_{xmo}$  jest minimalnym oporem przy spełnionym warunku (55),  $V_{mo}$  jest prędkością lotu przy jakiej występuje opór minimalny  $P_{xmo}$  zaś  $p = P_{smax}/P_{xmo}$ . Po wykonaniu prostych przekształceń równania (53), (54) przybierają postacie:

$$\hat{E}' = \eta p - \frac{1}{2} \left( u^2 + \frac{1}{u^2} \right), \tag{61}$$

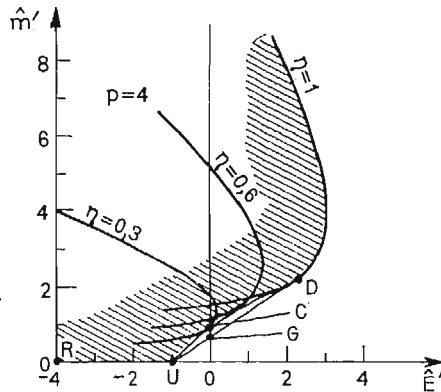
$$\hat{m}' = \eta p / u, \tag{62}$$

gdzie  $u$  jest prędkością bezwymiarową  $u = V/V_{mo}$ . Po wyeliminowaniu  $u$  z równań (61) i (62) mamy:

$$\hat{E}' = \sigma - 0.5[(\sigma/\hat{m}')^2 + (\hat{m}'/\sigma)^2] = f(\hat{m}', \sigma), \tag{63}$$

gdzie  $\sigma = \eta p$  ( $0 \leq \sigma \leq p$ ).

Dla wybranego samolotu i ustalonych współczynników wykorzystania ciągu  $\eta \in \langle 0, 1 \rangle$  równanie (63) przedstawia rodzinę krzywych pokazanych na rys. 6. Zakreskowana



Rys. 6. Dyskusja rozwiązania zagadnienia dla zmiennej wysokości lotu

część wykresu reprezentuje zbiór prędkości uogólnionych. Równanie (63) nie zależy od czasu ani od współrzędnej poziomego położenia samolotu  $x$ , zatem otrzymany z niego wykres jest słuszny w różnych chwilach czasu. Odcinek  $RU$  wykresu odpowiada lotowi szybowemu, gdyż dla  $\hat{m}' = 0$  z równania (62) wynika, że  $\eta = 0$ . Punkt  $U$  o współrzędnych  $(-1, 0)$  odpowiada lotowi szybowemu na takim kącie natarcia, że opór jest minimalny, wtedy z równania (61) wynika, że  $u = 1$ . Krzywa  $UCD$  jest obwiednią rodziny krzywych danych równaniem (63), przy czym  $\sigma$  zmienia się od 0 do  $p$ . Dla typowych samolotów zbiór prędkości uogólnionych (zakreskowany obszar na rys. 6) nie jest wypukły, co pociąga za sobą istotne następstwa. Lot ustalony  $\hat{E}' = 0$  spełnia warunki brzegowe  $E(x_A) = E(x_B)$  — odpowiada mu punkt  $C$  wykresu. Punkt  $G$  pozwala jednak na zmniejszenie zużycia paliwa, gdyż odpowiadająca mu wartość  $\hat{m}'$  (a więc ilość zużytego paliwa na jednostkę odległości) jest mniejsza. Sterowanie odpowiadające temu stanowi może być wygenerowane w wyniku nieskończenie częstych przełączeń ciągu pomiędzy punktami  $U$  ( $\eta = 0$ ) i  $D$  ( $\eta = 1$ ), zatem lot ustalony dla przyjętego modelu ruchu samolotu nie jest optymalny, co więcej optymalne sterowanie ciągiem może nie należeć do klasy funkcji przedziałami ciągłych.

## 5. Uwagi o rozwiązaniach zadania

Przedstawiony w rozdziale 4 przykład wskazuje na to, że do zadania minimalizacji zużycia paliwa należy podchodzić dość ostrożnie. Znajduje to odzwierciedlenie w cytowanych opracowaniach tematu. Dość wcześnie zauważono bowiem, że rozwiązanie zadania powinno uwzględniać łuki osobliwe, gdyż występowały one w podobnych zagadnieniach dotyczących lotu raket w atmosferze. Zadania takie z powodzeniem rozwiązywał Miele opracowaną przez siebie metodą już pod koniec lat pięćdziesiątych (prace te zostały zebrane w publikacji [11]). Metoda ta, choć bardzo skuteczna, stosunkowo rzadko może być stosowana, gdyż dotyczy jedynie funkcjonałów w postaci (4). Dopiero rozwój metod współczesnej teorii sterowania optymalnego dostarczył narzędzi pozwalających na dalsze badanie problemu. Już w 1971 roku podano wynik badania zbioru prędkości uogólnionych dla energetycznego modelu ruchu samolotu F4 [19]. Zbiór ten nie jest wypukły, a co z tego wynika, lot ustalony nie jest optymalny. Lepszy od niego jest lot ze sterowaniem uogólnionym ciągiem. Jedynie dla dystansów lotu na tyle krótkich aby lot ustalony w ogóle nie występował, optymalna trajektoria składa się ze wznoszenia na pełnym ciągu i lotu szybowego. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że sterowanie przełączne o częstości przełączeń na tyle dużej, aby można je było uznać za przybliżenie sterowania uogólnionego, nie jest realizowalne praktycznie. Zmiana obrotów współczesnego silnika lotniczego wymaga kilkunastu sekund, nie mówiąc już o kwestiach trwałości sprzętu i komfortu lotu. Te względy zapewne sprawiły, że autorzy opracowania [19] w dalszych swoich pracach poszukiwali takiego modelu ruchu samolotu, dla którego trajektoria optymalna byłaby zbliżona do stosowanej w praktyce. W artykule [14], dla energetycznego modelu ruchu wzbogaconego o równanie (31), pokazali oni, że sterowanie pośrednie ciągiem dla warunków lotu ustalonego może być optymalne na łuku osobliwym. Sterowanie to spełnia wówczas warunki (28). Powyższy rezultat został podważony przez Speyera [16], który wykazał, że rozwiązanie ustalone nie spełnia warunków koniecznych Legendre'a-Clebscha. W kolejnym artykule polemicznym [15] Schultz pokazał, że dla modelu ruchu z pracy [14] wzbogaconego o równanie (30) sterowanie na łuku osobliwym, odpowiadające warunkom lotu ustalonego, spełnia warunki Legendre'a-Clebscha. Jednakże i ten rezultat został podważony. W artykule [17] Speyer wykazał, że dla przyjętego przez Schultza modelu ruchu samolotu lot ustalony nie jest optymalny dla dostatecznie długich czasów lotu (powyżej 2.8 min.). Warunek konieczny Jacobiego nie jest wtedy spełniony. Speyer wykluczył również sterowanie uogólnione jako nie optymalne. Mimo, iż cytowana praca nie zawiera metody wyznaczenia sterowania optymalnego, jej autor pokazał, że sterowanie okresowe ciągiem i siłą nośną powoduje zmniejszenie wskaźnika jakości w porównaniu z lotem ustalonym. Zysk ten nie jest jednak duży, nie przekracza bowiem pół procenta. Tak więc poszukiwania modelu ruchu samolotu, dla którego lot ustalony okazałby się optymalny nie zakończyły się, jak dotąd, powodzeniem.

Wydaje się, że prace dotyczące sformułowanego zadania można podzielić na dwie główne grupy:

- pierwsza, stara się oszacować ile można zaoszczędzić paliwa stosując sterowanie uogólnione lub sterowanie okresowe [5, 6, 17]:
- druga, kierując się względami praktycznymi, poszukuje rozwiązań suboptymal-

nych otrzymanych w wyniku założenia, że rozwiązanie istnieje w klasie sterowań przedziałami ciągłych z uwzględnieniem łuków osobliwych [9] (co w świetle przytoczonych rozważań nie jest zupełnie pewne), bądź założeń równoważnych: o stałości kąta natarcia [7], o stałości wysokości lotu [1] lub o równości oporu aerodynamicznego i ciągu [2] na odcinku trajektorii odpowiadającemu lotowi ustalonemu.

Jeżeli idzie o pierwszą grupę prac to najpełniejsze oszacowanie oszczędności zużycia paliwa dla modelu energetycznego można znaleźć w pracy [6]. Sterowanie uogólnione w porównaniu ze sterowaniem odpowiadającym lotowi ustalonemu daje oszczędności zależne od parametru  $p = P_{smax}/P_{xmo}$  i są one tym większe im większy jest ten stosunek (a więc dla samolotów o dużym nadmiarze ciągu w lotach na niewielkich wysokościach). W skrajnych przypadkach, dla nowo projektowanych samolotów, zysk ten może sięgać 30%. Dla istniejących samolotów w lotach na dużych wysokościach zysk ten nie przekracza kilku procent, co jest wielkością porównywalną z błędami wskaźnika jakości wynikającymi z uproszczeń modelowych.

Jeśli idzie o drugą grupę prac to na uwagę zasługuje praca [1] ze względu na prostotę stosowanej tam metody, a co za tym idzie, na szybkość wykonywania obliczeń, co w zastosowaniach praktycznych ma istotne znaczenie [10].

## 6. Uwagi końcowe

W pracy pokazano, że dla tego samego energetycznego modelu ruchu samolotu, ale przy różnych założeniach odnośnie stałości wysokości lotu, rozwiązania zadania minimalizacji zużycia paliwa mogą być jakościowo różne. Przy założeniu, że lot odbywa się na stałej wysokości, rozwiązanie ustalone ( $V = \text{const.}$ ,  $\eta = \text{const.}$ ) spełnia warunki konieczny i wystarczający optymalności, wynik ten jest zgodny zarówno z twierdzeniem egzystencjalnym (patrz [8], str. 288) jak i z intuicją. Próba uogólnienia otrzymanego wyniku na przypadek zmiennej wysokości lotu może prowadzić do błędu, gdyż nie są spełnione założenia twierdzenia egzystencjalnego o wypukłości zbioru prędkości uogólnionych (patrz [8], str. 284). Sterowanie uogólnione jest wtedy lepsze od sterowania ustalonego, co nie jest zgodne ani z intuicją, ani ze stosowaną praktyką. Bardziej złożone modele ruchu samolotu wymagają dalszych badań charakteru rozwiązania zadania.

## Literatura

1. J. F. BARMAN, H. ERZBERGER, *Fixed-Range Optimum Trajectories for Short-Haul Aircraft*, J. of Aircraft, Vol. 13, No. 10, Oct. 1972.
2. A. J. CALISE, *Extended Energy Management Methods for Flight Performance Optimization*, AIAA Journal, Vol. 15, No. 3, March 1977.
3. L. E. ELSGOLC, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1960.
4. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1972.
5. E. G. GILBERT, M. G. PERSONS, *Periodic Control and the Optimality of Aircraft Cruise*, J. of Aircraft, Vol. 13, No. 10, Oct. 1976.
6. S. C. HOULIHAN, E. M. CLIFF, H. J. KELLEY, *Study of Chattering Cruise*, J. of Aircraft, Vol. 19, No. 2, Feb. 1982.

7. E. LARGE, *Minimum Fuel Paths for a Subsonic Aircraft*, J. of Aircraft, Vol. 18, No. 5, May 1981.
8. E. B. LEE, L. MARKUS, *Foundations of Optimal Control Theory* (wydanie rosyjskie), Nauka, Moskwa 1972.
9. R. MAROŃSKI, W. ŁUCJANEK, *Optymalizacja trajektorii samolotu w locie na zadaną odległość*, Archiwum Budowy Maszyn, Tom XXVI, zeszyt 2, 1979.
10. R. MAROŃSKI, *Praktyczne wyznaczanie optymalnych warunków lotu samolotu*, Materiały XXV Symp. „Modelowanie w Mechanice”, Kudowa marzec 1986.
11. A. MIELE, *Extremization of Linear Integrals by Green's Theorem*, w zbiorze Leitman G. (editor): Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems, Academic Press, New York 1962.
12. H. M. ROBBINS, *A Generalized Legendre-Clebsch Condition for the Singular Cases of Optimal Control*, IBM Journal, July 1967.
13. E. S. RUTOWSKI, *Energy Approach to the General Aircraft Performance Problem*, J. of Aeronautical Sciences, March 1954.
14. R. L. SCHULTZ, N. R. ZAGALSKY, *Aircraft Performance Optimization*, J. of Aircraft, Vol. 9, No. 2, Feb. 1972.
15. R. L. SCHULTZ, *Fuel Optimality of Cruise*, J. of Aircraft, Vol. 11, No. 9, Sept. 1974.
16. J. L. SPEYER, *On the Fuel Optimality of Cruise*, J. of Aircraft, Vol. 10, No. 12, Dec. 1973.
17. J. L. SPEYER, *Nonoptimality of the Steady-State Cruise for Aircraft*, AIAA Journal, Vol. 14, No. 11, Nov. 1976.
18. N. X. VINH, *Optimal Trajectories in Atmospheric Flight*, Elsevier, Amsterdam 1981.
19. N. R. ZAGALSKY, R. P. IRONS, R. L. SCHULTZ, *Energy State Approximation and Minimum-Fuel Fixed-Range Trajectories*, J. of Aircraft, Vol. 8, No. 6, June 1971.
20. В. Т. Злацкий, Б. Н. Кифоренко, *Оптимальные траектории с сингулярными дугами*, Автоматика и Телемеханика, 12, 1974.

#### Р е з ю м е

#### МИНИМАЛИЗАЦИЯ РАСХОДА ТОПЛИВА В ПОЛЁТЕ ПО ЗАДАННОМ РАССТОЯНИИ

Задача минимализации расхода топлива самолёта в полёте по заданному расстоянию, хотя прошло много лет от её формулировки, не нашла до сих пор удовлетворительного решения. В статье показано, что основная трудность заключается в том, что если для определённой постоянной высоты полёта определённое управление из класса кусочно непрерывных функции может выполнять конечные и необходимые условия оптимальности на сингулярной дуге, то для переменной высоты полёта оптимальное управление в этой классе может не существовать. В статье дается обзор некоторых понятий теории оптимального управления, а также обзор применяемых моделей движения самолёта. На этом фоне указано, на основе цитированной литературы, основное направление решения задачи.

#### S u m m a r y

#### MINIMIZATION OF FUEL CONSUMPTION DURING FLIGHT ON A GIVEN DISTANCE

The problem of minimum fuel consumption by the aircraft for a given distance flight has been considered for years in many papers, however, the satisfactory solution of that problem has not been found yet.

In the paper it has been shown, that the solutions for control in the form of piecewise functions exist only for the flights of constant altitude, but may not exist for the more general cases. Some concepts of optimal control theory are also discussed, models of aircraft motion are reviewed and, on the base of cited references, basic directions of conducting the research are pointed out.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 września 1987 roku.*