

METODA ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH W ZAGADNIENIACH GEOMETRYCZNIE NIELINIOWYCH

ANNA PODHORECKA

Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz

1. Wstęp

Zagadnienia formułowane i analizowane w nieliniowej mechanice continuum sprowadzają się do rozwiązywania złożonych układów równań różniczkowych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych i czasu. Znamy szereg prób zastosowania różnorodnych metod analitycznych i numerycznych do rozwiązywania tego typu problemów. Jedną ze stosowanych z powodzeniem metod jest metoda elementów skończonych, której podstawowa zaleta, to łatwość automatyzowania obliczeń. O licznych zastosowaniach tej metody traktuje monografia Zienkiewicza [1]. Zrobiono tam też wzmiankę o możliwości stosowania elementów skończonych w przestrzeni i czasie, odsyłając zainteresowanych do prac źródłowych [2, 3]. Jednakże ani w żadnej z tych prac, ani w rozprawach Argyrisa, Scharpfa i Chana [4, 5] nie wprowadzono pojęcia elementu czasoprzestrzennego. Jedynie Oden w pracy [6] potraktował czasoprzestrzeń jako obiekt dzielony na elementy skończone, ale w późniejszych jego publikacjach nie napotkano żadnych śladów rozwijania tego pomysłu. W 1975 roku Kączkowski [7, 8] wykorzystując do końca wszystkie konsekwencje wynikające z wprowadzenia czwartego wymiaru i nadając wielkościom dynamicznym własne interpretacje geometryczne lub statyczne opracował metodę elementów czasoprzestrzennych (MECZ).

W metodzie tej traktowanie na równi czasu i przestrzeni umożliwia wprowadzenie pojęcia elementu czasoprzestrzennego i pozwala na formalne stosowanie znanych procedur wyznaczania macierzy sztywności ustroju, bez potrzeby jakichkolwiek ich modyfikacji. Idea metody Kączkowskiego (MECZ) polega na dyskretyzacji continuum czasoprzestrzennego, w wyniku czego przejście od równań różniczkowych cząstkowych do równań algebraicznych odbywa się w jednym etapie. W klasycznym podejściu do numerycznej analizy zjawisk dynamicznych postępuje się inaczej; z równań cząstkowych przechodzi się do równań różniczkowych zwyczajnych, które dopiero po wykonaniu odpowiedniej dyskretyzacji zastępujemy równaniami algebraicznymi. Próbę wykorzystania MECZ do zagadnień geometrycznie nieliniowych przedstawił Witkowski w swojej pracy habilitacyjnej [9].

W niniejszej pracy pokazano inne rozwiązanie dynamicznych problemów geometrycznie nieliniowych metodą elementów czasoprzestrzennych.

2. Odkształcenia

Przyjęto opis materialny zmiennych konfiguracji (opis Lagrange'a). Jeżeli korzystamy z tego samego kartezjańskiego (prostoliniowego i ortogonalnego) układu współrzędnych do opisu zarówno konfiguracji pierwotnej jak też końcowej, to tensor odkształcenia Greena E_{ij} można wyrazić wzorem [10]:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right] - E_{ij}^0, \quad (2.1)$$

(E_{ij}^0 — odkształcenia wstępne, \mathbf{u} — wektor przemieszczeń).

Składowe stanu naprężenia odniesione do stanu pierwotnego reprezentuje tensor naprężenia Kirchhoffa (II tensor Pioli-Kirchhoffa) S_{ij} :

$$S_{ij} = D_{ijkl}(E_{ij})E_{ij} + S_{ij}^0, \quad (2.2)$$

gdzie D_{ijkl} jest tensorem zależnym od cech materiałowych i odkształceń, a S_{ij}^0 oznacza naprężenia wstępne. Jawne sformułowanie tensora D_{ijkl} , np. dla ciała liniowo sprężystego, nie jest łatwe, gdyż składowe tensora odkształcenia E_{ij} nie mają interpretacji geometrycznej. Taką interpretację mają natomiast wydłużenia względne ε_{kk} i odkształcenia postaciowe γ_{ik} [10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= \sqrt{1+2E_{kk}} - 1, \\ \cos \varphi_{ik} &= \cos(90^\circ - \gamma_{ik}) = \sin 2\varepsilon_{ik} = \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}}, \\ \gamma_{ik} &= 2\varepsilon_{ik}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie γ_{ik} oznacza miarę zmiany kąta prostego. Rozłóżmy funkcje (2.3) w szereg potęgowy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= \sqrt{1+2E_{kk}} - 1 = E_{kk} \left(1 - \frac{1}{2} E_{kk} + \frac{1}{2} E_{kk}^2 + \dots \right), \\ |2E_{kk}| &\leq 1, \\ 2\varepsilon_{ik} &= \arcsin \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} = E_{ik} \left\{ \frac{2}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \frac{E_{ik}E_{ik}}{[\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}]^3} + \dots \right\}, \\ \left| \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} \right| &< 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Symetryczny tensor Pioli-Kirchhoffa S_{ij} można zapisać w formie prawa liniowego stosując miary ε_{ik} (2.4):

$$S_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + S_{ij}^0. \quad (2.5)$$

Tensor własności materiałowych C_{ijkl} nie zależy od odkształceń i np. dla ciała izotropowego opisuje go wzór:

$$C_{ijkl} = \lambda' \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu' (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.6)$$

(λ' i μ' — stałe Lamégo).

Wprowadzając związki (2.4) do wzoru (2.5) uzyskamy prawo fizyczne w postaci (2.2), przy czym tensor $D_{ijkl}(E_{ij})$ ma postać:

$$D_{ijkl}(E_{ij}) = \begin{cases} C_{ijkl}a_{kk} & \text{dla } l = k, \\ C_{ijkl}b_{kl} & \text{dla } l \neq k, \end{cases} \quad (2.7)$$

gdzie:

$$a_{kk} = 1 - \frac{1}{2} E_{kk} + \frac{1}{2} E_{kk}E_{kk} - \dots, \quad (2.8)$$

$$b_{kl} = \frac{1}{\sqrt{(1+2E_{kk})(1+2E_{ll})}} \left\{ 1 + \frac{2E_{lk}E_{lk}}{3(1+2E_{ll})(1+2E_{kk})} + \dots \right\}.$$

Przy założeniu małych odkształceń E_{ik} można przyjąć, że tensor D_{ijkl} nie zależy od odkształceń:

$$D_{ijkl} = C_{ijkl}, \quad (2.9)$$

gdź:

$$a_{kk} \cong 1, \quad b_{kl} \cong 1.$$

Mając S_{ij} i u_i można wyznaczyć tensor naprężenia Cauchy [10] odniesiony do konfiguracji aktualnej:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left[S_{ij} + \left(\delta_{i\beta} \frac{\partial u_j}{\partial X_\alpha} + \delta_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} + \frac{\partial u_j}{\partial X_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial X_\beta} \right) S_{\alpha\beta} \right]. \quad (2.10)$$

Liniowa zależność tensora Pioli-Kirchhoffa S_{ij} od odkształceń wcale nie oznacza jednoczesnej liniowości tensora Cauchy'ego σ_{ij} , co wprost wynika z wzoru (2.10).

3. Równanie czteropracy wirtualnej

Rozpatrujemy ciało stanowiące ośrodek ciągły, które w konfiguracji początkowej charakteryzują objętość \mathcal{B}_0 , powierzchnia brzegowa $\partial\mathcal{B}_0$ i gęstość ρ_0 , a w konfiguracji aktualnej odpowiednio \mathcal{B} , $\partial\mathcal{B}$, ρ .

Pracę sił zewnętrznych (p_{0i} — siły powierzchniowe, $\rho_0 f_{0i}$ — siły masowe, $\rho_0 \ddot{u}_i$ — siły bezwładności) na wirtualnych przemieszczeniach δu_i wyraża wzór:

$$\delta L_z = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \rho_0 f_{0i} dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \rho_0 \ddot{u}_i dV_0. \quad (3.1)$$

Podobnie możemy opisać pracę sił wewnętrznych (naprężeń) na wirtualnych odkształceniach δE_{ij} :

$$\delta L_w = \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{ij} S_{ij} dV_0. \quad (3.2)$$

Korzystając z równości prac sił wewnętrznych i zewnętrznych mamy:

$$\delta L = \delta L_z - \delta L_w = 0,$$

$$\delta L = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \rho_0 f_{0i} dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \rho_0 \ddot{u}_i dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{ij} S_{ij} dV_0 = 0. \quad (3.3)$$

Równość pracy sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach i pracy sił wewnętrznych na wirtualnych odkształceniach musi zachodzić w każdej chwili t m.in. należącej do przedziału czasu od t_p do t_k [11].

$$\delta\chi = \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{0i} dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \ddot{u}_i dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{IJ} S_{IJ} dV_0 \right\} dt = 0, \quad (3.4)$$

Wykonując całkowanie przez części trzeciej całki:

$$\int_{t_p}^{t_k} \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \ddot{u}_i dV_0 dt = \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \dot{u}_i \Big|_{t_p}^{t_k} dV_0 - \int_{t_p}^{t_k} \int_{\mathcal{B}_0} \delta \dot{u}_i \varrho_0 \dot{u}_i dV_0 dt, \quad (3.5)$$

uzyskujemy ostatecznie równie czteropracy wirtualnej [8]:

$$\begin{aligned} \delta\chi = \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{0i} dV_0 \right\} dt - \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \dot{u}_i \Big|_{t_p}^{t_k} dV_0 + \\ + \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\mathcal{B}_0} \delta \dot{u}_i \varrho_0 \dot{u}_i dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{IJ} S_{IJ} dV_0 \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Jeżeli wprowadzimy ograniczenie, że w chwilach t_p i t_k wariacje δu_i zanikają [12, 13]:

$$\delta u_i(t_p) = \delta u_i(t_k) = 0, \quad (3.7)$$

to równanie (3.6) przyjmie prostszą formę:

$$\delta\chi = \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{0i} dV_0 \right\} dt + \int_{t_p}^{t_k} \left\{ \int_{\mathcal{B}_0} \delta \dot{u}_i \varrho_0 \dot{u}_i dV_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{IJ} S_{IJ} dV_0 \right\} dt = 0. \quad (3.8)$$

Kolejne całki równania (3.8) reprezentują:

— wariację energii potencjalnej obciążeń:

$$dL = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \delta u_i p_{0i} dA_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{0i} dV_0, \quad (3.9)$$

— wariację energii kinetycznej:

$$\delta E_k = \int_{\mathcal{B}_0} \delta \dot{u}_i \varrho_0 \dot{u}_i dV_0, \quad (3.10)$$

— wariację energii potencjalnej odkształceń:

$$\delta E_p = \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{IJ} S_{IJ} dV_0. \quad (3.11)$$

Wprowadzając oznaczenia całek (3.9)÷(3.11) do równania (3.8) uzyskamy zasadę Hamiltona [10]:

$$\delta\chi = \delta \int_{t_p}^{t_k} (L + E_k - E_p) dt = 0, \quad (3.12)$$

gdzie:

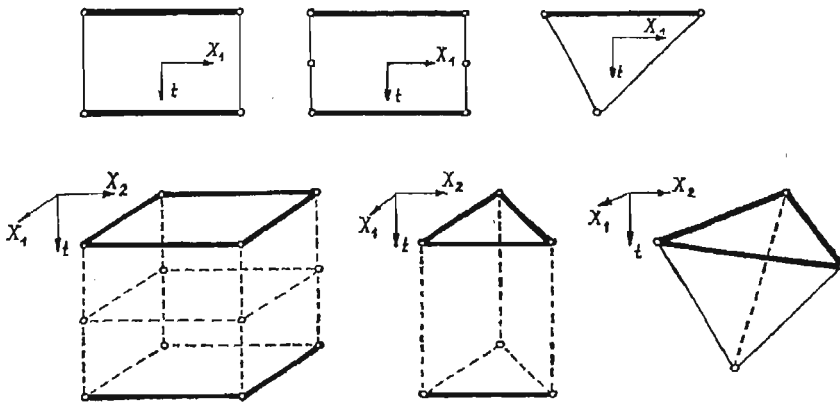
$$A = L + E_k - E_p \tag{3.13}$$

jest funkcją Lagrange'a.

Z powyższych rozważań wynika, że równanie czteropracy wirtualnej (3.6) ma charakter bardziej ogólny niż zasada Hamiltona (3.8).

4. Równanie ruchu dla zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni

Czasoprzestrzeń dyskretyzujemy na skończoną liczbę elementów czasoprzestrzennych o dowolnym kształcie (rys. 1).



Rys. 1.

Pole przemieszczeń elementu i pole prędkości tych przemieszczeń opisują funkcje:

$$\begin{aligned} u_i^e(X, t) &= N_{i\alpha}^e(X, t) r_\alpha^e, \\ \dot{u}_i^e(X, t) &= \dot{N}_{i\alpha}^e(X, t) r_\alpha^e, \\ e &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie $N_{i\alpha}^e(X, t)$ jest funkcją kształtu zależną od X i t , a r_α^e — przedstawia przemieszczenia węzłów.

Wariacje przemieszczeń i wariacje prędkości przemieszczeń można opisać innymi funkcjami kształtu (w szczególności $W_{i\alpha} = N_{i\alpha}$ — sposób Galerkinia) [1]:

$$\begin{aligned} \delta u_i^e(X, t) &= W_{i\alpha}^e(X, t) \delta r_\alpha^e, \\ \delta \dot{u}_i^e(X, t) &= \dot{W}_{i\alpha}^e(X, t) \delta r_\alpha^e. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Odkształcenia E_{ij} (2.1) elementu czasoprzestrzennego są w następujący sposób zależne od przemieszczeń węzłów:

$$E_{ij}^e(X, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i^e}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^e}{\partial X_i} - \frac{\partial u_k^e}{\partial X_i} \frac{\partial u_k^e}{\partial X_j} \right] = [{}'B_{ij\alpha}^e + {}''B_{ij\alpha}^e] r_\alpha^e, \tag{4.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}'B_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} [N_{i\alpha,j}^e + N_{j\alpha,i}^e], \\ {}''B_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} N_{k\alpha,i}^e N_{k\beta,j}^e r_\beta^e. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Podobnie od przemieszczeń węzłowych elementu czasoprzestrzennego uzależniamy wariacje odkształceń:

$$\delta E_{ij}^e(X, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u_i^e)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\delta u_j^e)}{\partial X_i} + 2 \frac{\partial(\delta u_k^e)}{\partial X_i} \frac{\partial(\delta u_k^e)}{\partial X_j} \right] = [{}'\tilde{B}_{ij\alpha}^e + 2''\tilde{B}_{ij\alpha}^e] \delta r_\alpha^e \quad (4.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}'\tilde{B}_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} (W_{i\alpha,j}^e + W_{j\alpha,i}^e), \\ {}''\tilde{B}_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} W_{k\alpha,i}^e W_{k\beta,j}^e r_\beta^e. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Naprężenia (2.2) po wykorzystaniu wzoru (4.3) opiszemy następująco:

$$S_{ij}^e = D_{ijkl}^e E_{kl}^e = D_{ijkl}^e ({}'B_{kl\alpha}^e + {}'B_{k\alpha l}^e) r_\alpha^e. \quad (4.7)$$

Dla ciała liniowo sprężystego tensor D_{ijkl} określa wzór (2.7), przy czym wielkości a_{kk} i b_{kl} wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned} a_{kk}^e &= 1 - \frac{1}{2} ({}'B_{kk\alpha}^e + {}''B_{kk\alpha}^e) r_\alpha^e + \dots, \\ b_{kl}^e &= \frac{1}{\sqrt{\{1 + 2[{}'B_{kk\alpha}^e + {}''B_{kk\alpha}^e] r_\alpha^e\} \{1 + 2[{}'B_{ll\beta}^e + {}''B_{ll\beta}^e] r_\beta^e\}}} \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2[{}'B_{kl\alpha}^e + {}''B_{kl\alpha}^e] r_\alpha^e [{}'B_{kl\beta}^e + {}''B_{kl\beta}^e] r_\beta^e}{3 \{1 + 2[{}'B_{kk\alpha}^e + {}''B_{kk\alpha}^e] r_\alpha^e\} \{1 + 2[{}'B_{ll\beta}^e + {}''B_{ll\beta}^e] r_\beta^e\}} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wprowadzając związki (4.1) ÷ (4.9) do równania czteropracy wirtualnej (3.6) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \delta \chi &= \sum_{e=1}^m \left\{ \iint_{\partial\Omega_e} \delta r_\alpha^e p_{0i}^e N_{i\alpha}^e d(\partial\Omega) + \int_{\Omega_e} \delta r_\alpha^e \rho_0^e f_{0i}^e N_{i\alpha}^e d\Omega + \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathcal{B}_{0\alpha}^e} \delta r_\alpha^e \rho_0^e N_{i\alpha}^e u_i^e \Big|_{t_p}^{t_k} d\mathcal{B} + \int_{\Omega_e} \delta r_\alpha^e \rho_0^e \dot{N}_{i\alpha}^e \dot{N}_{j\beta}^e r_\beta^e d\Omega + \right. \\ &\quad \left. - \iint_{\Omega_e} \delta r_\alpha^e D_{ijkl}^e [{}'\tilde{B}_{ij\alpha}^e + 2''\tilde{B}_{ij\alpha}^e] [{}'B_{kl\beta}^e + {}''B_{kl\beta}^e] r_\beta^e d\Omega \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdzie Ω_e oznacza obszar elementu czasoprzestrzennego.

Relacja (4.10) musi zachodzić dla dowolnej wariacji przemieszczeń δr_α . Ostatecznie uzyskujemy nieliniowe równania ruchu, które mają charakter równań równowagi i są ważne dla całej zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni:

$$\sum_{e=1}^m \{ [{}'K_{\alpha\beta}^{(kon)} + {}'K_{\alpha\beta}^{(u)} + {}'K_{\alpha\beta}^{(g)} - {}'M_{\alpha\beta}] r_\beta^e - {}'R_\alpha \} = 0, \quad (4.11)$$

gdzie:

$${}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)} = \int_{\Omega_e} D_{ijkl}^e \tilde{B}_{ij\alpha}^e B_{kl\beta}^e d\Omega, \quad (4.12)$$

$${}^e K_{\alpha\beta}^{(u)} = \int_{\Omega_e} D_{ijkl}^e \tilde{B}_{ij\alpha}^e B_{kl\beta}^e d\Omega, \quad (4.13)$$

$${}^e K_{\alpha\beta}^{(g)} = 2 \int_{\Omega_e} D_{ijkl}^e \tilde{B}_{ij\alpha}^e [B_{kl\beta}^e + B_{kl\beta}^e] d\Omega = \int_{\Omega_e} D_{ijkl}^e [B_{kl\beta}^e + B_{kl\beta}^e] W_{k\alpha,i}^e W_{l\beta,j}^e d\Omega = \int_{\Omega_e} S_{ij}^e W_{k\alpha,i}^e W_{l\beta,j}^e d\Omega, \quad (4.14)$$

$${}^e M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} \rho_0^e \dot{N}_{i\alpha}^e \dot{N}_{i\beta}^e d\Omega, \quad (4.15)$$

$${}^e R_{\alpha} = \int_{\partial\Omega_e} p_{0i}^e N_{i\alpha}^e d(\partial\Omega) + \int_{\Omega_e} \rho_0^e f_{0i}^e N_{i\alpha}^e d\Omega - \int_{\mathcal{V}_{0e}} \rho_0^e N_{i\alpha}^e \dot{u}_i^e \Big|_{t_p}^{t_k} dV_0. \quad (4.16)$$

Analogicznie do terminologii wprowadzonej w metodzie elementów skończonych [12] symbole ${}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)}$, ${}^e K_{\alpha\beta}^{(u)}$, ${}^e K_{\alpha\beta}^{(g)}$, ${}^e M_{\alpha\beta}$ i ${}^e R_{\alpha}$ oznaczają odpowiednio składowe: macierzy sztywności konstytutywnej, macierzy sztywności przemieszczeniowej (obrotowej), macierzy sztywności naprężeniowej (geometrycznej), macierzy bezwładności i macierzy impulsów węzłowych.

Ogólny wzór opisujący składowe macierzy sztywności układu ma postać:

$$K_{\alpha\beta}^e = \sum_{e=1}^m \{ {}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)} + {}^e K_{\alpha\beta}^{(u)} + {}^e K_{\alpha\beta}^{(g)} - {}^e M_{\alpha\beta} \}. \quad (4.17)$$

Obciążenie wyrażające impulsy węzłowe ${}^e R_{\alpha}$ (4.16) zależy m.in. od prędkości początkowej przemieszczeń $\dot{u}_i(t_0)$ (t_0 — czas rozpoczęcia obserwacji ciała). Impuls od prędkości przemieszczeń może wystąpić także w innej chwili, np. $\dot{u}_i(t_s)$, jeżeli takie obciążenie zostanie dodatkowo w chwili t_s przyłożone. W przeciwnym wypadku $\dot{u}_i(t_s) = 0$. Ostatecznie nieliniowe równania ruchu (4.11) możemy zapisać w następującej postaci:

$$\Psi_{\alpha} = \sum_{e=1}^m \{ K_{\alpha\beta}^e r_{\beta}^e - R_{\alpha}^e \} = 0, \quad (4.18)$$

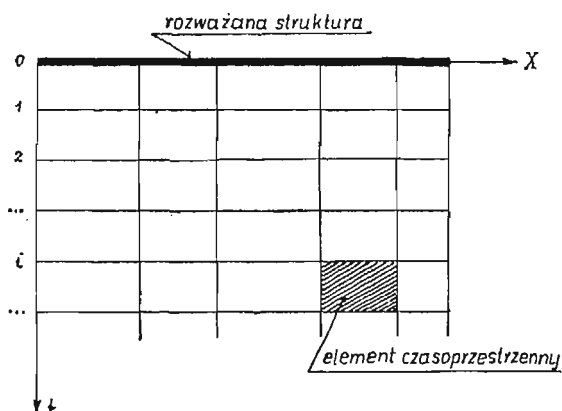
lub:

$$K r = R \quad (4.19)$$

gdzie K — jest globalną macierzą sztywności zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni.

5. Rozwiązywanie równań ruchu

Równania ruchu (4.18), przy znanych warunkach początkowych, można zawsze sprowadzić do formuły rekurencyjnej, niezależnie od kształtu elementu czasoprzestrzennego (od sposobu dyskretyzacji po czasie). Przykładowo, przy równomiernej dyskretyzacji



Rys. 2.

po współrzędnej czasowej (rys. 2), układ równań (4.18) możemy zapisać macierzowo w następującej formie:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{0,1} & \mathbf{B}^{0,1} & & & \\ \mathbf{C}^{1,0} & \mathbf{D}^{1,0} + \mathbf{A}^{1,2} & \mathbf{B}^{1,2} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \mathbf{C}^{l,l-1} & \mathbf{D}^{l,l-1} + \mathbf{A}^{l,l+1} & \mathbf{B}^{l,l+1} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^0 \\ r^1 \\ \vdots \\ r^l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0 \\ R^1 \\ \vdots \\ R^l \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

gdzie r^l zawiera przemieszczenia rozważanej struktury przestrzennej w chwili „ l ”, natomiast $\mathbf{A}^{l,l+1}$, $\mathbf{B}^{l,l+1}$, $\mathbf{C}^{l,l-1}$ i $\mathbf{D}^{l,l-1}$ są macierzami sztywności struktury zależnymi m.in. od przemieszczeń r^{l-1} , r^l lub r^{l+1} .

Znanymi warunkami początkowymi są przemieszczenia r^0 oraz prędkości przemieszczeń $\dot{u}(t_0)$ sprowadzone do impulsów ${}^e R$ wg wzoru (4.16). Formuła rekurencyjna wynikająca z (5.1) przedstawia się następująco:

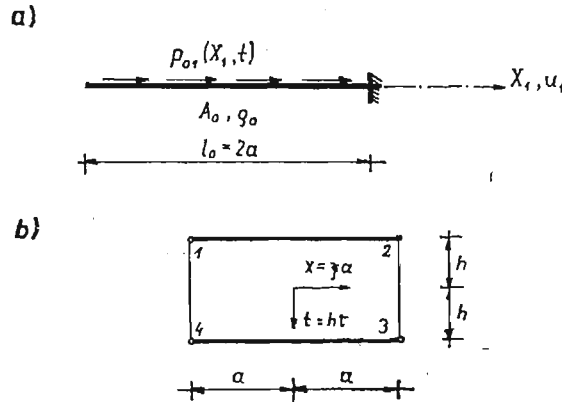
$$\Psi^l = \mathbf{C}^{l,l-1}r^{l-1} + [\mathbf{D}^{l,l-1} + \mathbf{A}^{l,l+1}]r^l + \mathbf{B}^{l,l+1}r^{l+1} - R^l = 0. \quad (5.2)$$

Z wzoru tego można obliczyć r^{l+1} , gdyż r^{l-1} oraz r^l zostały wyznaczone w poprzednich krokach rekurencyjnych. Macierze $\mathbf{C}^{l,l-1}$ i $\mathbf{D}^{l,l-1}$ są od razu w pełni określone, gdyż zależą od znanych już przemieszczeń r^{l-1} i r^l natomiast macierze $\mathbf{A}^{l,l+1}$ i $\mathbf{B}^{l,l+1}$ nie są całkowicie wyznaczalne, ponieważ zależą od nieznanego przemieszczenia r^{l+1} . Równanie (5.2) jest zatem równaniem nieliniowym, które można rozwiązywać różnymi sposobami (np.: metodą kolejnych przybliżeń, metodą początkowych obciążeń, metodą Newtona-Raphsona itp.).

6. Drgania podłużne pręta

Dalsze rozważania zmierzające do zilustrowania zaproponowanego algorytmu rozwiązywania zagadnień nieliniowych przeprowadzimy na elementarnym przykładzie pręta

prostego wspornika o długości $l_0 = 2.0$ [m], polu przekroju poprzecznego $A_0 = 0.005$ [m²] (rys. 3a). Działające obciążenie $p_{01}(X_1, t)$ wywołuje drgania podłużne $u_1(X_1, t)$. Materiał charakteryzuje: moduł Younga $E_0 = 2 \cdot 10^5$ [MPa], gęstość $\rho_0 = 7500$ [kg/m³], współczynnik Poissona $\nu = 0.29$.



Rys. 3.

W przypadku osiowego stanu naprężenia, wzór (2.4) przedstawiający składowe odkształcenia, można w ścisły sposób sprowadzić do postaci:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \quad \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \varepsilon_{33}. \quad (6.1)$$

Jeżeli dokonamy równomiernej dyskretyzacji czasoprzestrzeni (rys. 2), to element czasoprzestrzenny będzie miał kształt prostokąta o wymiarach $2a \times 2h$ (rys. 3b), gdzie $a = 1.0$ [m]. Funkcję kształtu $N_{1\alpha}(X_1, t) \equiv N_\alpha(X, t)$ można opisać związkami liniowymi:

$$N_\alpha(X, t) = \frac{1}{4} (1 + \xi_\alpha \xi) (1 + \tau_\alpha \tau), \quad (6.2)$$

$$\xi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 2, 3 \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 4 \end{cases}, \quad \tau_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 3, 4 \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 2 \end{cases}$$

$$\xi \in \langle -1; 1 \rangle, \quad \tau \in \langle -1; 1 \rangle, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Następnie opiszmy w obszarze elementu czasoprzestrzennego:

— przemieszczenia i wariacje przemieszczeń:

$$u_1^e = N_\alpha^e r_\alpha^e, \quad \delta u_1^e = N_\alpha^e \delta r_\alpha^e, \quad (6.3)$$

— prędkości przemieszczeń i ich wariacje:

$$\dot{u}_1^e = \dot{N}_\alpha^e r_\alpha^e, \quad \delta \dot{u}_1^e = \dot{N}_\alpha^e \delta r_\alpha^e, \quad (6.4)$$

— odkształcenia i ich wariacje:

$$E_{11}^e = [{}'B_\alpha^e + {}''B_\alpha^e] r_\alpha^e, \quad \delta E_{11}^e = [{}'B_\alpha^e + 2{}''B_\alpha^e] \delta r_\alpha^e, \quad (6.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}'B_{\alpha}^e &= \frac{1}{4a} \xi_{\alpha}(1 + \tau_{\alpha} \tau), \\ {}''B_{\alpha}^e &= \frac{1}{32a^2} \sum_{\beta=1}^4 \xi_{\alpha} \xi_{\beta}(1 + \tau_{\alpha} \tau)(1 + \tau_{\beta} \tau) r_{\alpha}^e. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Podobnie od przemieszczeń węzłowych elementu czasoprzestrzennego uzależniamy tensor naprężenia S_{ij} . Rozpatrywać będziemy trzy postacie związków konstytutywnych.

1. Drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} jest proporcjonalny do tensora odkształcenia Greena E_{ij} :

$$\begin{aligned} S_{11}^e &= E_0^e E_{11}^e = E_0^e \left(\frac{\partial u_1^e}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^e}{\partial X_1} \frac{\partial u_1^e}{\partial X_1} \right), \\ S_{11}^e &= E_0^e [{}'B_{\alpha}^e + {}''B_{\alpha}^e] r_{\alpha}^e. \end{aligned} \quad (6.7)$$

2. Drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} jest proporcjonalny do wydłużenia względnego ustalonego w konfiguracji nieodkształconej:

$$\begin{aligned} S_{11}^e &= E_0^e \varepsilon_{11}^e = E_0^e \frac{\partial u_1^e}{\partial X_1}, \\ S_{11}^e &= E_0^e {}'B_{\alpha}^e r_{\alpha}^e. \end{aligned} \quad (6.8)$$

3. Tensor Cauchy σ_{ij} jest proporcjonalny do wydłużenia względnego ustalonego w konfiguracji odkształconej:

$$\sigma_{11} = E_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (6.9)$$

gdzie:

$$x = u + X,$$

opisuje współrzędne punktów pręta odkształconego.

Sprowadzając σ_{ij} (6.9) do współrzędnych Lagrange'a mamy:

$$\sigma_{11} = E_0 \frac{\frac{\partial u_1}{\partial X_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}}. \quad (6.10)$$

W celu określenia drugiego tensora Pioli-Kirchhoffa S_{ij} korzystamy ze wzoru (2.10):

$$\sigma_{11} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 S_{11}. \quad (6.11)$$

Z prawa zachowania masy wynika, że:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right), \quad (6.12)$$

gdzie (por. (6.1)):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = -\nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = -\nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1},\end{aligned}\tag{6.13}$$

Wprowadzając związki (6.12) i (6.13) do (6.11) ostatecznie otrzymamy:

$$\sigma_{11} = \frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}}{\left(1 - \nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2} S_{11i}.\tag{6.14}$$

lub:

$$S_{11i} = \frac{\left(1 - \nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)} \sigma_{11i}.\tag{6.15}$$

Podstawiając (6.10) do (6.15) uzyskamy jawny opis tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} :

$$S_{11i} = E_0 \frac{\left(1 - \nu \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)} \frac{\partial u_1}{\partial X_1}.\tag{6.16}$$

Przyjęcie w tym przypadku różnych od zera składowych ε_{22} i ε_{33} jest równoznaczne z uwzględnieniem zmiany pola przekroju poprzecznego pręta. Związek (6.16) dla elementu czasoprzestrzennego będzie miał postać:

$$S_{11i}^e = E_0^e \frac{1 - 2\nu' B_{\alpha'}^e r_{\alpha'}^e + 2\nu^{2''} B_{\alpha'}^e r_{\alpha'}^e}{(1 + B_{\alpha'}^e r_{\alpha'}^e)(1 + B_{\eta'}^e r_{\eta'}^e)} B_{\beta'}^e r_{\beta'}^e.\tag{6.17}$$

Korzystając z wzorów (4.12)÷(4.16) ustalamy wyrazy macierzy sztywności elementu czasoprzestrzennego (kolejno we wszystkich analizowanych przypadkach; przyjęto $\mathbf{W} = \mathbf{N}$).

1. Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa S_{ij} proporcjonalny do tensora Greena E_{ij} :

$$\begin{aligned}K_{\alpha\beta}^e &= \frac{E_0 A_0 h}{12a} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \left\{ 3 + \tau_{\alpha} \tau_{\beta} - \lambda^2 \tau_{\alpha} \tau_{\beta} (1 + 3\xi_{\alpha} \xi_{\beta}) + \frac{3}{8a} \sum_{\gamma=1}^4 \{ 3 + \right. \\ &+ \tau_{\gamma} (\tau_{\alpha} + \tau_{\beta}) + \tau_{\alpha} \tau_{\beta} \xi_{\gamma} r_{\gamma}^e \} + \frac{1}{160a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \{ 15 + 5[(\tau_{\alpha} + \\ &+ \tau_{\beta})(\tau_{\gamma} + \tau_{\varphi}) + \tau_{\alpha} \tau_{\beta} + \tau_{\gamma} \tau_{\varphi}] + 3\tau_{\alpha} \tau_{\beta} \tau_{\gamma} \tau_{\varphi} \} \xi_{\gamma} \xi_{\varphi} r_{\gamma}^e r_{\varphi}^e \},\end{aligned}\tag{6.18}$$

2. Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa S_{ij} proporcjonalny do wydłużenia względnego:

$$K_{\alpha\beta}^e = \frac{E_0 A_0 h}{12a} \xi_\alpha \xi_\beta \left\{ 3 + \tau_\alpha \tau_\beta + \frac{1}{4a} \sum_{\gamma=1}^4 [3 + \tau_\alpha \tau_\beta + (\tau_\alpha + \tau_\beta) \tau_\gamma] r_\gamma^e + \right. \\ \left. - \lambda^2 \tau_\alpha \tau_\beta (1 + 3\xi_\alpha \xi_\beta) \right\}, \quad (6.19)$$

3. Tensor Cauchy σ_{ij} proporcjonalny do wydłużenia względnego:

$$K_{\alpha\beta}^e = \frac{E_0 A_0 h}{12a} \xi_\alpha \xi_\beta \left\{ 6a \left[\frac{a_{\alpha\beta}^*}{B^*} \ln \left| \frac{A^* + B^*}{A^* - B^*} \right| + b_{\alpha\beta}^* \left(\frac{2}{B^*} + \frac{A^*}{B^{*2}} \ln \left| \frac{A^* - B^*}{A^* + B^*} \right| \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_{\alpha\beta}^*}{B^{*3}} \left(A^{*2} \ln \left| \frac{A^* + B^*}{A^* - B^*} \right| - 2A^* B^* \right) - \frac{d_{\alpha\beta}^*}{B^{*4}} \left(\frac{2}{3} B^{*3} - 2A^{*2} B^* + \right. \right. \\ \left. \left. - A^{*3} \ln \left| \frac{A^* + B^*}{A^* - B^*} \right| \right) + \frac{e_{\alpha\beta}^* A^*}{B^{*4}} \left(\frac{A^{*3}}{B^*} \ln \left| \frac{A^* + B^*}{A^* - B^*} \right| - 2A^{*2} - \frac{2}{3} B^{*2} \right) \right] + \right. \\ \left. - \lambda^2 \tau_\alpha \tau_\beta (1 + 3\xi_\alpha \xi_\beta) \right\}, \quad (6.20)$$

gdzie:

$$a_{\alpha\beta}^* = 1 - \frac{\nu}{2a} \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma r_\gamma^e + \frac{\nu^2}{16a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e, \\ b_{\alpha\beta}^* = \tau_\alpha + \tau_\beta - \frac{\nu}{2a} \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma r_\gamma^e (\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma) + \frac{\nu^2}{16a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e (\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma + \tau_\varphi), \\ c_{\alpha\beta}^* = \tau_\alpha \tau_\beta - \frac{\nu}{2a} \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma r_\gamma^e [\tau_\alpha \tau_\beta + (\tau_\alpha + \tau_\beta) \tau_\gamma] + \frac{\nu^2}{16a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e [\tau_\alpha + \\ + \tau_\beta + (\tau_\alpha + \tau_\beta) (\tau_\gamma + \tau_\varphi) + \tau_\gamma \tau_\varphi], \\ d_{\alpha\beta}^* = -\frac{\nu}{2a} \tau_\alpha \tau_\beta \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma \tau_\gamma r_\gamma^e + \frac{\nu^2}{16a^2} \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e [\tau_\alpha \tau_\beta (\tau_\gamma + \tau_\varphi) + \\ + (\tau_\alpha + \tau_\beta) \tau_\gamma \tau_\varphi], \\ e_{\alpha\beta}^* = \frac{\nu^2}{16a^2} \tau_\alpha \tau_\beta \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\varphi=1}^4 \xi_\gamma \xi_\varphi \tau_\gamma \tau_\varphi r_\gamma^e r_\varphi^e, \\ A^* = 4a + \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma r_\gamma^e, \quad B^* = \sum_{\gamma=1}^4 \xi_\gamma \tau_\gamma r_\gamma^e, \quad (6.21)$$

$$\lambda^2 = \frac{\rho_0 a^2}{E_0 h^2}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \varphi = 1, 2, 3, 4. \quad (6.22)$$

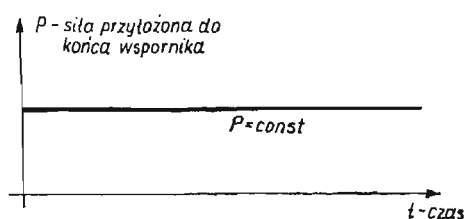
W zadaniach dotyczących zagadnień geometrycznie liniowych wystarczającym warunkiem stabilności rozwiązania numerycznego jest takie dobranie wymiarów elementów czasoprzestrzennych, aby była spełniona nierówność [8]:

$$\frac{a}{h} \geq \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.23)$$

Z warunku tego skorzystano także przy rozwiązywaniu zadań geometrycznie nieliniowych. Obciążenie (we wszystkich trzech przypadkach związków konstytutywnych) stanowi nagle przyłożona do końca wspornika siła podłużna (ściskająca lub rozciągająca) (rys. 4):

$$P(t) = PH(t), \quad (6.24)$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a.



Rys. 4.

Warunki początkowe przyjęto w postaci:

$$u(t=0) = 0, \quad \dot{u}(t=0) = 0, \quad \varepsilon^o = 0, \quad S^o = 0.$$

Przeliczono wiele zadań dla różnych wartości siły P . Na rys. 5 przedstawiono zmianę w czasie przemieszczeń końca wspornika od siły $P = 5 \cdot 10$ [N] przy różnych definicjach związków konstytutywnych (6.7)÷(6.9).

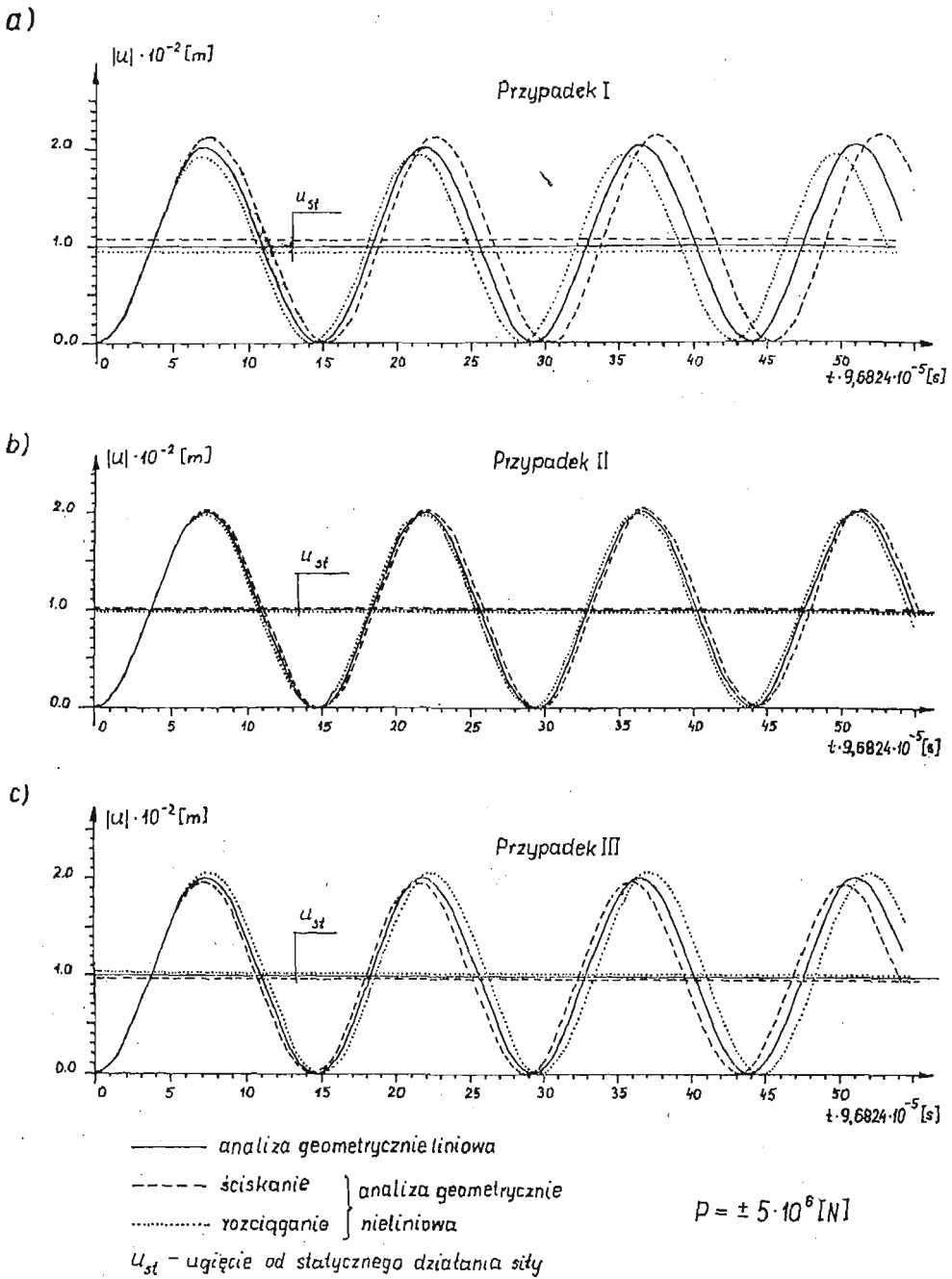
Porównując otrzymane wyniki z rozwiązaniem geometrycznie liniowym można sformułować kilka uwag.

1. W przypadku związków konstytutywnych (6.7) i (6.8) przemieszczenia przy rozciąganiu są mniejsze a przy ściskaniu większe. Podobnej zmianie ulega okres drgań (rys. 5a, b).

2. Jeżeli związek konstytutywny jest opisany wzorem (6.9) to przemieszczenia przy rozciąganiu są większe a przy ściskaniu mniejsze. Analogicznie również zmienia się okres drgań (rys. 5c).

3. Wartość obciążenia $P = 3.0$ [MN] stanowi w przybliżeniu maksymalną siłę spełniającą warunki wytrzymałościowe rozpatrywanego pręta. Przy tak dobranym obciążeniu wyniki analizy geometrycznie liniowej i nieliniowej różnią się o około 0.6%. Amplituda przemieszczeń jest dwa razy większa od ugięcia statycznego (od statycznego działania siły P). Ugięcie statyczne policzono metodą elementów skończonych przy takich samych założeniach jak w metodzie elementów czasoprzestrzennych.

W celu uzasadnienia poprawności uzyskanych rezultatów przeprowadzimy analizę sztywności pręta. Rzeczywisty stan naprężeń opisuje tensor Cauchy σ_{ij} (naprężenia w kon-



Rys. 5.

figuracji odkształconej i do niej odniesione). Opiszmy ten tensor w konfiguracji nieodkształconej (Lagrange'a):

(1) Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa proporcjonalny do tensora Greena (6.7):

$$\sigma_{11} = E(\varepsilon_{11}) \varepsilon_{11},$$

$$E(\varepsilon_{11}) = E_0 \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{11}\right) (1 + \varepsilon_{11})}{(1 - \nu \varepsilon_{11})^2}, \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \quad (6.25)$$

(2) Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa proporcjonalny do wydłużenia względnego w konfiguracji nieodkształconej (6.8):

$$\sigma_{11} = E(\varepsilon_{11}) \varepsilon_{11},$$

$$E(\varepsilon_{11}) = E_0 \frac{1 + \varepsilon_{11}}{(1 - \nu \varepsilon_{11})^2}, \quad (6.26)$$

(3) tensor Cauchy proporcjonalny do wydłużenia względnego w konfiguracji odkształconej (6.9):

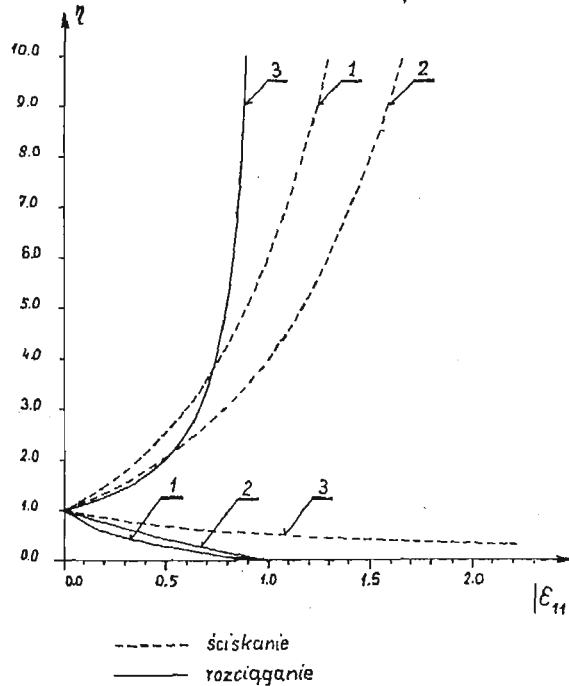
$$\sigma_{11} = E(\varepsilon_{11}) \varepsilon_{11}.$$

$$E(\varepsilon_{11}) = E_0 \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}}. \quad (6.27)$$

Wprowadzimy parametr η opisujący zmianę sztywności:

$$\eta(\varepsilon_{11}) = \frac{E(\varepsilon_{11})}{E_0}. \quad (6.28)$$

Analizując ten parametr sztywności w poszczególnych przypadkach prawa fizycznego (1, 2, 3) możemy podać kilka istotnych uwag (rys. 6).



Rys. 6.

1. Jeżeli tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} jest liniowo zależny od tensora odkształcenia Greena E_{ij} lub wydłużeń względnych (względem konfiguracji nieodkształconej), to sztywność przy rozciąganiu rośnie $|\eta| > 1$, a przy ściskaniu maleje $|\eta| < 1$. Z tego właśnie powodu wynikają mniejsze przemieszczenia przy rozciąganiu a większe przy ściskaniu (rys. 5a, b).

2. Liniowa zależność tensora Cauchy od odkształceń względnych (względem konfiguracji odkształconej) oznacza mniejszą sztywność przy rozciąganiu $|\eta| < 1$, a większą przy ściskaniu $|\eta| > 1$. Dlatego też przemieszczenia przy rozciąganiu są większe niż przy ściskaniu (rys. 5c).

3. Przy małych odkształceniach $|\partial u_1 / \partial X_1| \ll 1$, sposób definiowania prawa fizycznego nie ma praktycznego znaczenia, gdyż:

$$E(\varepsilon_{11}) \cong E_0 \quad \text{lub} \quad \eta(\varepsilon_{11}) \cong \eta = 1. \quad (6.29)$$

Przedstawiony przykład wyraźnie pokazuje jak dalece istotne jest właściwe sformułowanie równań konstytutywnych zwłaszcza przy dużych odkształceniach. Przypadek I i II zadania wykazał, że dowolne formułowanie zależności naprężeń od odkształceń (spotykane w literaturze, np. [10] str. 470) może spowodować uzyskanie wyników niezgodnych z doświadczeniem. Trudno sobie wyobrazić, aby sztywność rozciąganego pręta stalowego rosła wraz ze wzrostem siły, skoro wiadomo, że pole jego przekroju poprzecznego maleje. Ostatnia wersja prawa konstytutywnego jest prawidłowa, stąd uzyskane wyniki są zgodne z oczekiwaniami i nie budzą wątpliwości.

Literatura

1. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
2. O. C. ZIENKIEWICZ, PAREKH, *Transient field problems — to and three dimensional analysis by isoparametric finite elements*, Int. J. Num. Math. in Eng., 2, 1970.
3. I. FRIED, *Finite element analysis of time dependent phenomena*, Int. Report Stuttgart Univ., 1969.
4. J. H. ARGYRIS, D. W. SCHARPF, *Finite elements in time and space*, Aero. J. of the RAS, 73, 1969, p. 1041 - 1044.
5. J. H. ARGYRIS, A. S. L. CHAN, *Application of finite elements in space and time*, Ing. Arciv. 41, 1972, p. 235 - 257.
6. J. T. ODEN, *A general theory of finite elements*, Intern. J. of Num. Meth. in Engineering 1, 1969, 2, 205 - 221, 3, 247 - 259.
7. Z. KĄCZKOWSKI, *The method of finite space-time elements in dynamics of structures*, J. Techn. Phys., 16, 1, 1975, p. 69 - 84.
8. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., 22, 3, 1976, s. 365 - 378.
9. M. WITKOWSKI, *O czasoprzestrzeni w dynamice budowli*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 80, 1983.
10. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, 1969.
11. J. F. BESSELING, *Another Look at the Application of the Principle of Virtual Work with Particular Reference to Finite Plate and Shell Elements*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1981, p. 11 - 27.
12. M. K. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa—Poznań 1985.
13. H. ZORSKI (redakcja), *Mechanika techniczna, podstawy mechaniki*, PWN, Warszawa 1985.

Р е з ю м е

МЕТОД ВРЕМЕННО-ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

В работе представлено метод решения динамических и геометрических нелинейных задач с помощью метода временно-пространственных элементов. Закон напряжение — деформация определяется в различной форме. В случае больших деформаций конститутивные уравнения влияют значительно на остаточный результат. Этот эффект указан на нескольких примерах.

S u m m a r y

THE SPACE-TIME ELEMENT METHOD IN GEOMETRICALLY
NON-LINEAR PROBLEMS

The paper contains a method of solution of dynamically and geometrically non-linear problems by the use of the space — time element method (STEM). The stress — strain relation (the 2-nd Piola-Kirchhoff tensor — the Green tensor) has been defined in different form. It has been proved that the method of formulation of the constitutive relations plays a significant role in the case of large strains. This effect has been demonstrated on examples.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 maja 1986 roku.
