MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 25, 1987

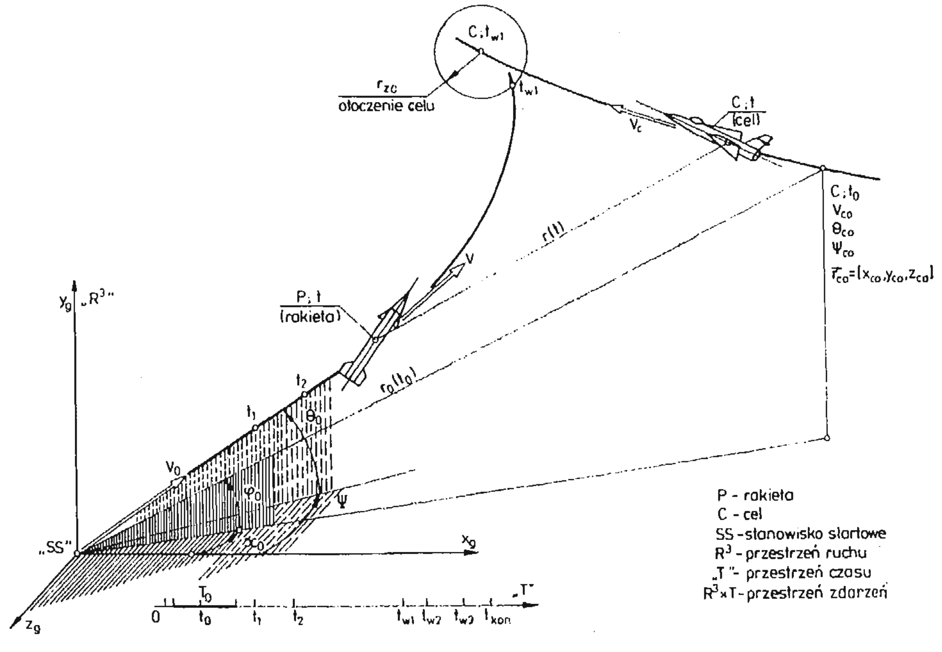
# MODELOWANIE DYNAMIKI STEROWANEGO OBIEKTU LATAJĄCEGO KLASY ZIEMIA-POWIETRZE

JAN NICZYPORUK
ALEKSANDER WIELGUS

*Wojskowa Akademia Techniczna*

## 1. Wstęp

W celu zbadania zmiany konfiguracji obszarów startu rakiety w zależności od warunków początkowych i rodzaju manewru celu, rozpatrzono dynamikę systemu samonaprowadzania (rys. 1). System samonaprowadzania potraktowano jako układ dynamiczny [1], w którym sygnały wejściowe generuje manewrujący cel, a sygnały wyjściowe opisują sterowany ruch rakiety. Założono, że cel jest punktem materialnym o zadanej hipotezie

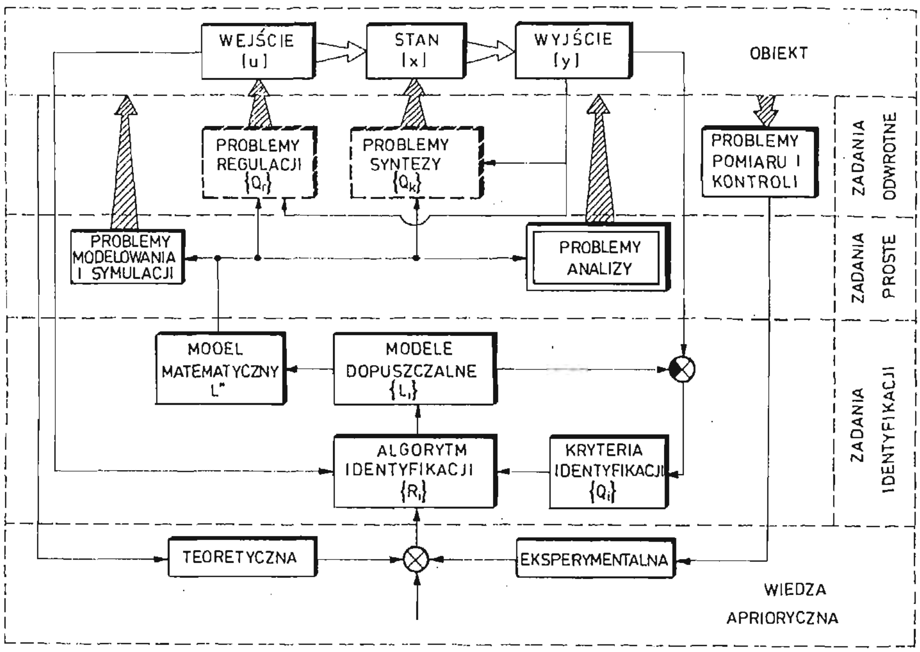



Rys. 1. Schemat procesu samonaprowadzania rakiety na cel.

przestrzennego ruchu, a rakieta samonaprowadzana jest układem o wielu stopniach swobody, wykonującym przestrzenny lot z więzami programowymi [2] w standardowej atmosferze. Modelowanie dynamiki systemu samonaprowadzania obejmuje klasę zagadnień prostych i odwrotnych, przedstawionych na schemacie rys. 2, który wyróżnia pięć warstw:

— warstwę obiektu czyli przedmiotu badań, jakim jest fizycznie istniejący system samonaprowadzania lub jego wzorzec;
— warstwę wiedzy apriorycznej teoretycznej i eksperymentalnej dotyczącej obiektu;
— warstwę identyfikacji tj. procedury uzyskania modelu matematycznego obiektu:

$$L^*[\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}] = 0 \tag{1.1}$$




Rys. 2. Schemat formułowania problemów dynamicznych.

gdzie: $L^*$ — operator modelu; $\bar{u}$ — wektor wejść; $\bar{x}$ — wektor stanu; $\bar{y}$ — wektor wyjść; $\bar{z}$ — wektor zakłóceń; $\bar{p}$ — wektor parametrów;

— warstwę zagadnień prostych, w której wyróżniono analizę będącą przedmiotem szczegółowych rozważań;
— warstwę zagadnień odwrotnych, spośród których problemy syntezy i regulacji nie są rozpatrywane w niniejszej pracy.

## 2. Formułowanie dynamicznych zagadnień samonoprowadzania

W celu sformułowania zagadnień dynamicznych samonaprowadzania wyszczególnionych na rys. 2, do równania (1.1) obejmującego równania ruchu i więzów należy dołączyć warunki graniczne (początkowe i końcowe) oraz ograniczenia na wektor sterowań $\bar{u}$, stanu $\bar{x}$ i wyjść $\bar{y}$.

W przestrzeni stanu $X_n \subset R^n$, równanie (1.1) można zapisać w postaci [2], [3], [4]:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots u_n, t) \quad (2.1)$$
$$i = 1, 2, \ldots n$$

gdzie $\bar{x} = \mathrm{col}\,[x_1, x_2, \ldots x_n]$, $\bar{u} = \mathrm{col}\,[u_1, u_2, \ldots u_r]$,

$$u_i = u_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \quad (2.2)$$

Specyfika pracy systemu samonaprowadzania wymaga formułowania warunków początkowych w zbiorze $\Omega_0 \subset X_n \times T \subset R^{n+1}$, co zapisujemy:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_0) &= \bar{x}_0 \in \Omega_0 = \{\bar{x}_0; x_{0i}(\mathrm{var}\, t_0)\} \\ \mathrm{var}\, t_0 &= \{t_0 : t_{01} \leqslant t_0 \leqslant t_{02}\} \subset T \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ograniczenia sterowań typu lokalnego i globalnego, wyznaczają zbiory sterowań dopuszczalnych:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\bar{u} : \max|u_i(t)| \leqslant M_1, \quad i = 1, 2, \ldots r\} \\ U_2 &= \left\{\bar{u} : \sum_{i=1}^{r} |u_i(t)|^2 \leqslant M_2^2\right\} \\ U_3 &= \left\{\bar{u} : \int_{t_0}^{t_w} \sum_{i=1}^{r} |u_i(\tau)|\, d\tau \leqslant M_3\right\} \\ U_4 &= \left\{\bar{u} : \int_{t_0}^{t_w} \sum_{i=1}^{r} |u_i(\tau)|^2 d\tau \leqslant M_4^2\right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

wynikające z ograniczenia odpowiednio: $U_1$ — składowych wektora sterowań; $U_2$ — mocy; $U_3$ — wydajności; $U_4$ — energii całkowitej źródła zasilania.
Ograniczenia określające zbiór stanów dopuszczalnych:

$$X_D = \{\bar{x} : \max|x_i(t)| \leqslant M_5, \max|\dot{x}_i(t)| \leqslant M_6\} \quad (2.5)$$

Ograniczenia określające zbiór dopuszczalnych wyjść:

$$Y_D = \left\{\bar{y} : \begin{cases} \max|y_i = n_i[\bar{x}(t)]| \leqslant M_7, & i = 1, 2, 3 \\ \max|y_j = h_j[x(t)]| \leqslant M_8, & j = 1, 2, 3 \end{cases}\right\} \quad (2.6)$$

gdzie: $n_i$, $h_i$ — składowe odpowiednio przeciążenia i przelotu chwilowego.

Relacje (2.1)÷(2.6) stanowią zamknięty układ „danych wyjściowych" do formułowania, w zależności od etapu badań i potrzeb, zagadnień prostych i odwrotnych samonaprowadzania.

Na mocy (2.2) i (2.3) formułuje się postulat [2], że badanie dynamiki samonaprowadzania wymaga wprowadzenia abstrakcyjnych pojęć teorii pól orientorowych i w klasie tych pojęć należy interpretować rozwiązania zagadnień dynamicznych samonaprowadzania.

## 3. Sformułowanie zagadnienia analizy samonaprowadzania

Niech analiza dynamiki systemu samonaprowadzania polega na ilościowym i jakościowym badaniu równań stanu (2.1) dla zadanej struktury systemu. Efektem końcowym analizy będą obszary startu, samonaprowadzania i realizacji zadania. Ponieważ strukturę systemu, ruch celu i zakłócenia przyjmujemy za znane, to równania stanu (2.1) można zapisać w następującej formie wektorowej:

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, t) \tag{3.1}$$

Poszukujemy więc takich rozwiązań równania (3.1), które spełniają warunki początkowe (2.3) i ograniczenia (2.4)÷(2.6), oraz dla $t \geqslant t_{w1}$ (rys. 1) mają punkty wspólne z otoczeniem celu $\Omega_c$.

Otoczenie celu definiujemy jako zbiór (3.2) określony w przestrzeni $X_n \times T$, w którym spełnione są warunki wynikające z technicznych wymagań realizacji zadania samonaprowadzania:

$$\Omega_c = \{(\bar{x}, t): |x_i| \leqslant a_i, b_i \leqslant |\dot{x}_i| \leqslant C_i; t \geqslant t_{w1}, i \leqslant n\} \tag{3.2}$$

Zbiór trajektorii stanu, które w czasie $t \geqslant t_{w1}$ osiągają punkty wspólne z otoczeniem celu $\Omega_c$ nazywamy obszarem samonaprowadzania $\Omega_{SN}$. Natomiast zbiór $\Omega_{ST}$ warunków początkowych $\bar{x}_0 \in \Omega_{ST} \subset \Omega_0$ dla trajektorii z obszaru $\Omega_{SN}$ nazywamy obszarem startu lub obszarem dopuszczalnych warunków początkowych. Zbiór

$$\Omega_{RZ} = \Omega_c \cap \Omega_{SN} \neq \emptyset \tag{3.3}$$

będący niepustym przekrojem otoczenia celu i obszaru samonaprowadzania jest obszarem realizacji zadania. Posługując się wprowadzonymi pojęciami obszarów, możemy zagadnienie analizy sformułować następująco:

Dla zadanej hipotezy o ruchu celu, danych równań stanu (3.1), warunków (2.3)÷(2.6) i otoczenia celu (3.2) należy wyznaczyć $\Omega_{ST}$, $\Omega_{SN}$ i $\Omega_{RZ}$.

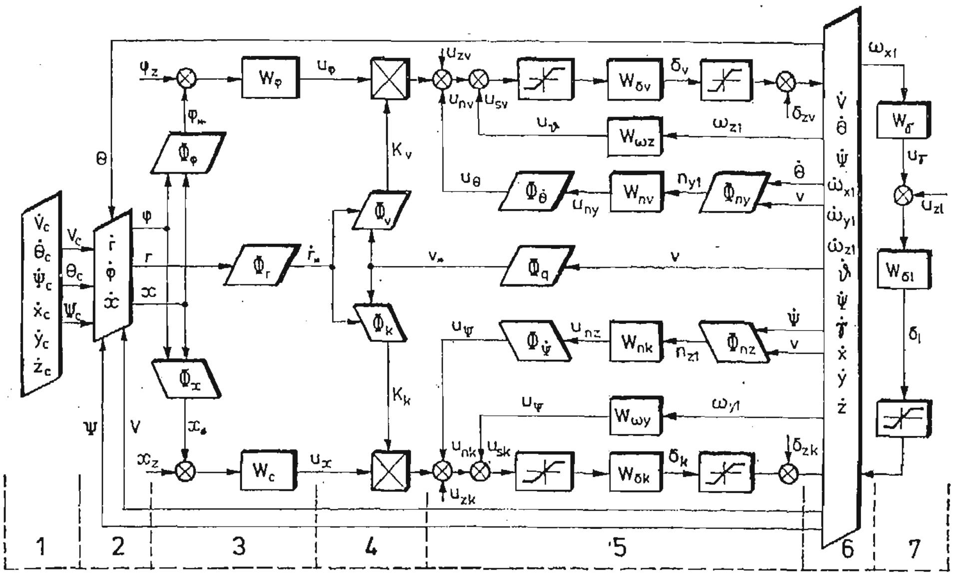
Zauważmy, że $\Omega_c, \Omega_{SN}, \Omega_{ST}$ i $\Omega_{RZ}$ zdefiniowane w przestrzeni $X_n \times T$ mają swoje obrazy w wybranej przestrzeni fizycznej. I tak w układzie startu $x_g, y_g, z_g$ (rys. 1), otoczeniem celu jest tuba wyznaczona torem celu i promieniem $r_{zc}$, a obszarem samonaprowadzania tuba torów rakiety, mających przynajmniej jeden wspólny punkt z tubą celu. Obszarem startu i realizacji zadania odpowiadają tzw. strefy ataku (startu) i rażenia.

Jak wynika z powyższego, wyznaczenie stref startu i rażenia wymaga wcześniejszego określenia:

- struktury systemu i odpowiadającego jej modelu matematycznego w postaci np. równań stanu;
- hipotezy o ruchu celu i odpowiadających jej równań ruchu celu;
- zbioru ograniczeń nakładanych na system;
- algorytmu rozwiązania równań stanu, przy czym będzie to naogół algorytm rozwiązania numerycznego.

## 4. Struktura i model matematyczny hipotetycznego systemu samonaprowadzania

Załóżmy, że dana jest struktura hipotetycznego systemu samonaprowadzania przedstawiona na rys. 3. Rakieta (6), naprowadzana według metody proporcjonalnej nawigacji,




Rys. 3. Schemat strukturalny.

wyposażona jest w koordynator (3) śledzący za celem (1), układ formowania sygnałów naprowadzania (4) oraz w układy stabilizacji (5) i (7).

Dla celu traktowanego jako punkt materialny i wykonującego przestrzenny manewr przyspieszeniem otrzymujemy równania ruchu:

$$\dot{V}_c = g\left\{n^0_{xc}\left[1-e^{-\frac{1}{T_x}(t-t_{0x})}\right]\eta(t-t_{0x})-\sin\Theta_c\right\}$$

$$\dot{\Theta}_c = \frac{g}{v_c}\left\{n^0_{yc}\left[1-e^{-\frac{1}{T_y}(t-t_{0y})}\right]\eta(t-t_{0y})-\cos\Theta_c\right\} \tag{4.1}$$

$$\dot{\Psi}_c = \frac{g}{v_c\cos\Theta_c}n^0_{zc}\left[1-e^{-\frac{1}{T_z}(t-t_{0z})}\right]\eta(t-t_{0z})$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= v_c\cos\Theta_c\cos\Psi_c\\ \dot{y}_c &= v_c\sin\Theta_c\\ \dot{z}_c &= -v_c\cos\Theta_c\sin\Psi_c\end{aligned} \tag{4.2}$$

gdzie: $v_c, \Theta_c, \psi_c$ — moduł, kąt pochylenia i odchylenia wektora prędkości celu; $n^0_{xc}$, $n^0_{yc}$, $n^0_{zc}$ — maksymalne przeciążenia styczne, normalne i boczne; $\eta(t)$ — pseudofunkcja Heaviside'a; $T_x$, $T_y$, $T_z$ — stałe czasowe; $t_{0x}, t_{0y}, t_{0z}$ — czasy początku manewru; $g$ — przyspieszenie ziemskie; $x_c, y_c, z_c$ — współrzędne celu w układzie startowym.

Dla rakiety mamy [5]:

Równania ruchu translacyjnego w układzie semiprędkości:

$$\dot{V} = \frac{1}{m}\left(P\cos\alpha\cos\beta-\frac{\varrho v^2}{2}SC_x-mg\sin\Theta\right) \tag{4.3}$$

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{mv}\left[P(\sin\alpha\cos\gamma_v+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_v)+\frac{\varrho v^2}{2}S(C_{yv}\cos\gamma_v-C_{zv}\sin\gamma_v)-mg\cos\Theta\right]$$

$$\dot{\Psi} = \frac{-1}{mv\cos\Theta}\left[[P(\sin\alpha\sin\gamma_v-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_v)+\right. \tag{4.3 [cd]}$$

$$\left.+\frac{\varrho v^2}{2}S(C_{yk}\sin\gamma_v+C_{zk}\cos\gamma_v)]\right]$$

gdzie: $V, \Theta, \Psi$ — moduł, kąt pochylenia i odchylenia wektora prędkości; $\alpha, \beta, \gamma_v$ — kąt natarcia, ślizgu i przechylenia toru; $P$ — ciąg; $\varrho$ — gęstość powietrza; $S$ — powierzchnia charakterystyczna; $C_x, C_{yv}, C_{yk}, C_{zv}, C_{zk}$ — współczynniki sił aerodynamicznych; $m$ — masa.

Równania ruchu obrotowego w układzie związanym z rakietą:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{x1} &= \frac{1}{I_{y1}}\frac{\varrho v^2}{2}SLm_x\\ \dot{\omega}_{y1} &= \frac{1}{I_{y1}}\left[\frac{\varrho v^2}{2}Sbm_y+(I_{z1}-I_{x1})\omega_{z1}\omega_{x1}\right]\\ \dot{\omega}_{z1} &= \frac{1}{I_{z1}}\left[\frac{\varrho v^2}{2}Sbm_z+(I_{x1}-I_{y1})\omega_{x1}\omega_{y1}\right]\end{aligned} \tag{4.4}$$

gdzie: $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$ — prędkości kątowe; $I_{x1}, I_{y1}, I_{z1}$ — główne centralne momenty bezwładności; $m_x, m_y, m_z$ — współczynniki momentów aerodynamicznych; $L$, $b$ — długość i średnia cięciwa aerodynamiczna.

Równania kinematyczne ruchu obrotowego i translacyjnego:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \omega_{y1}\sin\gamma+\omega_{z1}\cos\gamma\\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_{y1}\cos\gamma-\omega_{z1}\sin\gamma)\\ \dot{\gamma} &= \omega_{x1}-\mathrm{tg}\,\vartheta(\omega_{y1}\cos\gamma-\omega_{z1}\sin\gamma)\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_g &= v\cos\Theta\cos\Psi\\ \dot{y}_g &= v\sin\Theta\\ \dot{z}_g &= -v\cos\Theta\sin\Psi\end{aligned} \tag{4.6}$$

gdzie: $\vartheta, \psi, \gamma$ — kąt pochylenia, odchylenia i przechylenia rakiety; $x_g, y_g, z_g$ — współrzędne środka masy rakiety.

Równania kinematyczne ruchu względnego rakiety i celu (członu kinematycznego (2) na rys. 3):

$$\begin{aligned}\dot{r} &= v_c[\cos\Theta_c\cos(\Psi_c-\chi)\cos\varphi+\sin\Theta_c\sin\varphi]-v[\cos\Theta\cos(\Psi-\chi)\cos\varphi+\sin\Theta\sin\varphi]\\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{r}\{v_c[\sin\Theta_c\cos\varphi-\cos\Theta_c\cos(\Psi_c-\chi)\sin\varphi]+v[\cos\Theta\cos(\Psi-\chi)\sin\varphi-\sin\Theta\cos\varphi]\}\\ \dot{\chi} &= \frac{1}{r\cos\varphi}[v_c\cos\Theta_c\sin(\Psi_c-\chi)-v\cos\Theta\sin(\Psi-\chi)]\end{aligned} \tag{4.7}$$

gdzie: $r, \varphi, \chi$ — moduł, kąt pochylenia i odchylenia promienia wektora $\overrightarrow{PC}$ (rys. 1).

Kąty $\alpha, \beta, \gamma_v$ spełniają związki geometryczne [5], które zapiszemy ogólnie $\alpha = \alpha(\vartheta, \psi, \gamma, \Theta, \Psi)$, $\beta = \beta(\vartheta, \psi, \gamma, \Theta, \Psi)$, $\gamma_v = \gamma_v(\vartheta, \psi, \gamma, \Psi)$.

Równania koordynatora:

$$
\begin{aligned}
\dot{U}_\varphi &= a_{11}(\varphi_* - \varphi_k) - b_{11} U_\varphi; & \dot{\varphi}_k &= k_1 U_\varphi \\
\dot{U}_\chi &= a_{12}(\chi_* - \chi_k) - b_{12} U_\chi; & \dot{\chi}_k &= k_2 U_\chi \\
\dot{U}_r &= a_{13}(r_* - r_k) - b_{13} U_r; & \dot{r}_k &= k_3 U_r
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

gdzie: $U_\varphi$, $U_\chi$, $U_r$ — sygnały napięciowe na wyjściu z koordynatora, proporcjonalne w stanie ustalonym do $\dot{\varphi}_*$, $\dot{\chi}_*$ i $\dot{r}_*$; $a_{ij}$, $b_{ij}$, $k_i$ — parametry konstruycyjne.

Równania czujników przeciążeń (człony $W_{nv}$ i $W_{nk}$ na rys. 3) i czujników prędkości kątowych (człony $W_{\omega z}$, $W_{\omega y}$ i $W_\gamma$ na rys. 3):

$$
\begin{aligned}
\dot{U}_{nx} &= a_{21} U_{nx} + b_{21} n_{x1}; & \dot{U}_\vartheta &= a_{31} U_\vartheta + b_{31} \omega_{z1} \\
\dot{U}_{ny} &= a_{22} U_{ny} + b_{22} n_{y1}; & \dot{U}_\varphi &= a_{32} U_\psi + b_{32} \omega_{y1} \\
\dot{U}_{nz} &= a_{23} U_{nz} + b_{23} n_{z1}; & \dot{U}_\gamma &= a_{33} U_\gamma + b_{33} \omega_{x1}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

gdzie: $n_{x1}$, $n_{y1}$, $n_{z1}$ — składowe przeciążenia w związanym układzie współrzędnych; $U_{nx}$, $U_{ny}$, $U_{nz}$ — odpowiadające przeciążeniom napięcia; $U_\vartheta$, $U_\varphi$, $U_\gamma$ — napięcia odpowiadające prędkościom kątowym.

Równania napędów sterów (człony $W_{\delta v}$, $W_{\delta k}$, $W_{\delta l}$ na rys. 3):

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta}_v &= a_{41} \delta_v + b_{41} U_{sv} \\
\dot{\delta}_k &= a_{42} \delta_k + b_{42} U_{sk} \\
\dot{\delta}_l &= a_{43} \delta_l + b_{43} U_{sl}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

gdzie: $\delta_l$, $\delta_k$, $\delta_v$ — kąty wychylenia sterów; $U_{sv}$, $U_{sk}$, $U_{sl}$ — sygnały błędów naprowadzania dla metody proporcjonalnej nawigacji i danego (na rys. 3) układu stabilizacji:

$$
\begin{aligned}
U_{sv} &= K_v U_\varphi + U_{zv} - \Phi_{\dot{\Theta}} U_{ny} - U_\vartheta \\
U_{sk} &= K_k U_\chi + U_{zk} - \Phi_{\dot{\Psi}} U_{nz} - U_\psi \\
U_{sl} &= U_\gamma + U_{zl}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Równania (4.1)÷(4.11) przedstawiają zamknięty układ równań stanu układu samonaprowadzania o danej na rys. 3 strukturze. Funkcje $\Phi_i$ uwzględniają transformacje układów współrzędnych, sprzężenia skrośne, adaptacyjność metody naprowadzania i są znane. Np. dla rakiety stabilizowanej w kącie przechylenia ($\gamma = 0$) oraz dla idealnego pomiaru prędkości lotu ($v_* = v$) i prędkości zbliżania ($\dot{r} = \dot{r}_*$) otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
K_v &= \Phi_v(r, v, \Theta, \varphi) = \frac{N_v|\dot{r}|}{v\cos(\Theta - \varphi)} \\
K_k &= \Phi_k(r, v, \psi, \chi) = \frac{N_k|\dot{r}|}{v\cos(\Psi - \chi)} \\
\Phi_\varphi &= \Phi_\chi = \Phi_r = \Phi_q = 1 \\
n_{y1} &\approx \Phi_{ny}(\Theta, v, \alpha) = \frac{1}{g}(r\dot{\Theta} + g\cos\Theta - \dot{v}\sin\alpha)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$n_{z1} \approx \Phi_{nz}(\Psi, v, \beta, \Theta) = \frac{1}{g}(v\dot{\Psi}\cos\Theta - v\cos\beta) \tag{4.12 [cd]}$$

$$\Phi_{\dot{\Theta}} = \Phi_{\dot{\psi}} \approx \frac{1}{v}$$

W układzie samonaprowadzania występują ograniczenia typu nasycenie dla kątów śledzenia koordynatora, kątów wychylenia sterów, przeciążeń i inne (niektóre ograniczenia zaznaczono na rys. 3). Równania (4.1)÷(4.10), relacje (4.11) i (4.12) oraz ograniczenia przedstawiają model matematyczny systemu samonaprowadzania o strukturze pokazanej na rys. 3.

## 5. Obszary startu

Obszary startu wyznaczono całkując równania stanu systemu naprowadzania (4.1)÷(4.10) na EMC Odra-1305 metodą Mersona. W celu zbadania oraz ilustracji interesującego zjawiska ewolucji obszarów startowych kątów wyprzedzenia $\eta_0$ w funkcji współrzędnej $x_c$ dla $y_c$ = const (obszary te dalej nazywane są przekrojami $\eta_0(x_c)$ strefy startu) i wyjaśnienia topologii strefy startu, przedstawiono na rys. 4÷9 wybrane wyniki obliczeń numerycznych dla danych:

1. Cel wykonuje lot poziomy przy zerowym parametrze, ze stałą prędkością i jest atakowany z przedniej półsfery. Liczbowe wartości parametrów lotu celu podaje tabela:

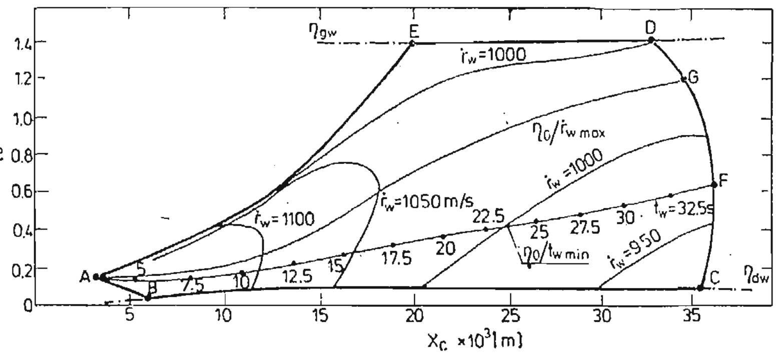
**Tabela 1**

| $y_c$ [m] | 300 | 2500 | 5000 | 15 000 | 25 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $v_c$ [m/s] | 350 | 435 | 470 | 500 | 500 |
| Nr rys. | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

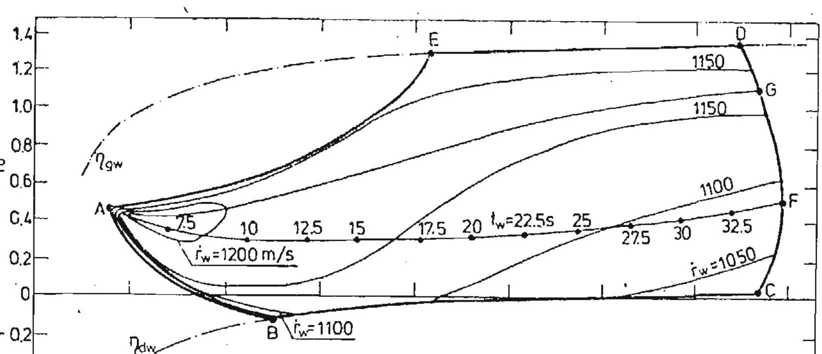
2. Geometrię rakiety w układzie „kaczka" charakteryzują: średnica kadłuba 0,33 m; długość kadłuba 5,6 m; powierzchnia skrzydła 0,92 m$^2$; średnia cięciwa aerodynamiczna skrzydła 0,78 m.
3. Rakieta wyposażona jest w dwustopniowy układ napędowy, każdy o stałym ciągu: $P_1$ = 850 kN, $P_2$ = 7,6 kN. Masa rakiety maleje z czasem liniowo, od wartości początkowej $m_0$ = 578 kg.
4. System sterowania rakiety zawiera idealne człony pomiarowe i napęd sterów, układ ograniczenia dopuszczalnych przeciążeń oraz adaptacyjny układ formowania sygnałów naprowadzania według metody proporcjonalnej nawigacji.
5. Start rakiety odbywa się z prędkością początkową $v_0$ = 41 m/s z wyrzutni ograniczającej startowe kąty wyprzedzenia od góry ($\eta_0 \leqslant \eta_{gw}$) i od dołu ($\eta_0 \geqslant \eta_{dw}$), przy czym maksymalny kąt podniesienia wyrzutni przyjęto 80°, a minimalny 5°.
6. Lot rakiety odbywa się bez zakłóceń z dopuszczalnym przeciążeniem normalnym 10.

7. Algorytm obliczeń uwzględnia zmianę gęstości powietrza i prędkości dźwięku z wysokością, zależność współczynników aerodynamicznych od liczby Macha i transformację pochodnych aerodynamicznych względem aktualnego położenia środka masy w danej chwili lotu.

Uzyskane dla powyższych danych wykresy przekrojów $\eta_0(x_c)$ (rys. 4÷8) wskazują, że występujące ograniczenia: maksymalnego czasu trwania lotu $t_{wmax} = 35s$ , kątów startowego wyprzedzenia $\eta_{dw} \leqslant \eta_0 \leqslant \eta_{gw}$ i wymaganie pozytywnej realizacji procesu wyrażone warunkami $\dot{r}_w \geqslant 0$ i $r_p \leqslant r_{zc}$ (gdzie $\dot{r}_w = \dot{r}(t_{w1})$, $r_p$ — przelot) ingerują bardzo silnie w konfigurację tych przekrojów i różnie, w zależności od wysokości $y_c$.



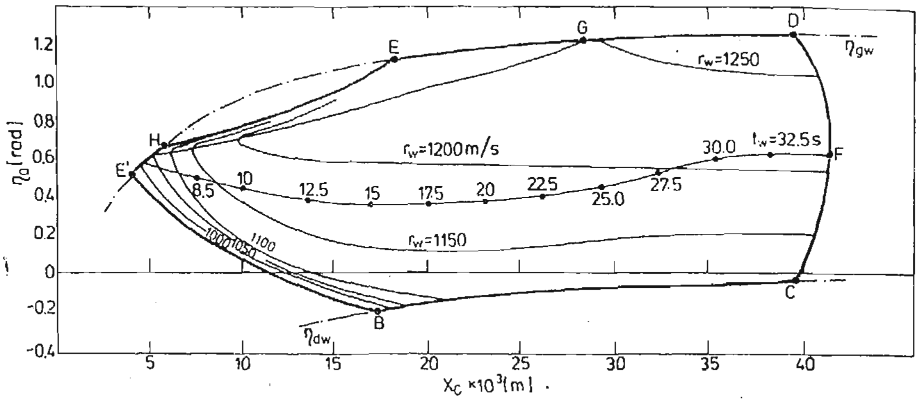

Rys. 4. Przekrój strefy startu $y_c = 300$ m.



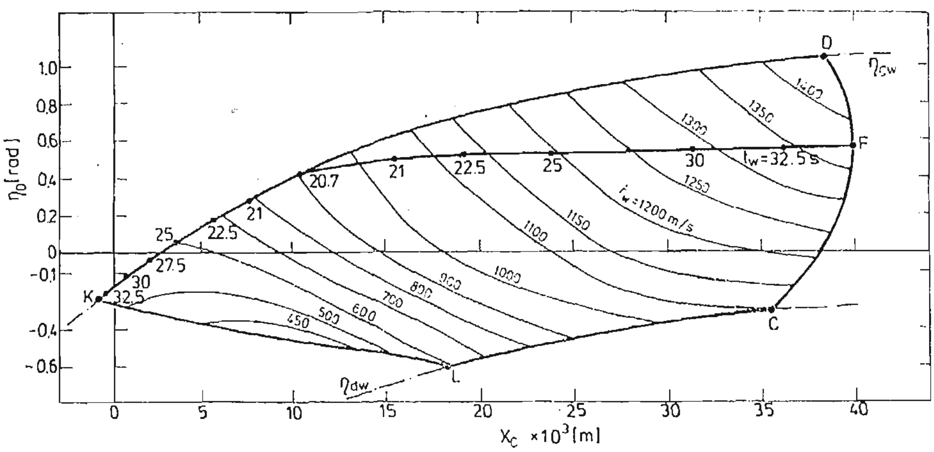

Rys. 5. Przekrój strefy startu $y_c = 2500$ m.

I tak dla małych wysokości $y_c \leqslant 3000$ m (rys. 4 i 5) przekrój $\eta_0(x_c)$ wyznaczają odcinki linii: AB i EA o własnościach $\dot{r}_w = 0$ i $r_p = r_{zc}$; BC o własności $\eta_0 = \eta_{dw}$; CD o własności $t_{w1} = t_{wmax}$ oraz DE o własności $\eta_0 = \eta_{gw}$. Punktom przecięcia linii ograniczających pole przekroju $\eta_0(x_c)$ można przypisać własność podwójnego ograniczania: A — $\dot{r}_w/\dot{r}_w$; B — $\dot{r}_w/\eta_{dw}$; C — $\eta_{dw}/t_{wmax}$; D — $t_{wmax}/\eta_{gw}$ i E — $\eta_{gw}/\dot{r}_w$. Linie AF i AG wyznaczają odpowiednio kąty $\eta_0$ o najkrótszym czasie wejścia $t_{wmin}$ i maksymalnej prędkości wejścia $\dot{r}_{wmax}$. Pola przekrojów zostały sparametryzowane liniami $\dot{r}_w$ = const.

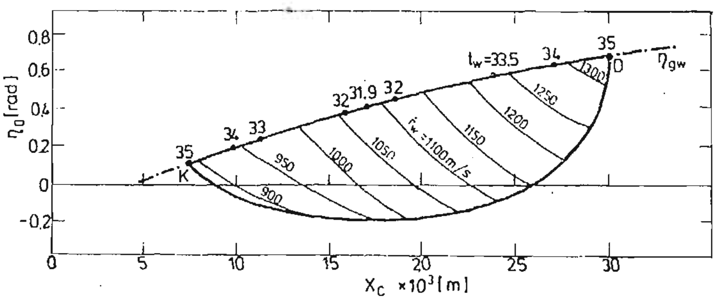
W przedziale wysokości $y_c = 4500 \div 7000$ m występują dwa odcinki linii ograniczenia $\eta_{gw}$ (E'H i ED rys. 6), a nowy punkt podwójnego ograniczenia H jest typu $\dot{r}_w/\eta_{gw}$. Ze wzrostem wysokości punkty H i E zbliżają się do siebie i powyżej wysokości dla której H = E ($y_c \approx 13\,500$ m) górny brzeg przekroju $\eta_0(x_c)$ stanowi linia $\eta_{gw}$ (rys. 7 i 8). Sytuacja taka ma miejsce aż do pułapu (punkt P na rys. 9).




Rys. 6. Przekrój strefy startu $y_c = 5000$ m.

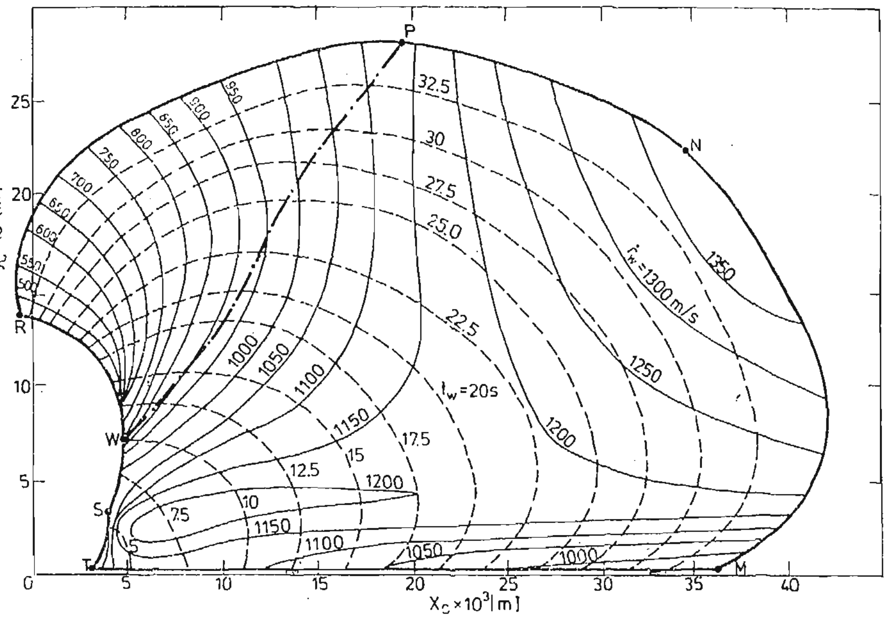



Rys. 7. Przekrój strefy startu $y_c = 15\,000$ m.




Rys. 8. Przekrój strefy startu $y_c = 25\,000$ m.

Przy $y_c > 12\,000$ m, w linii ograniczającej przekrój $\eta_0(x_c)$ od dołu pojawia się odcinek ograniczenia maksymalnego czasu lotu (dla małych, a nawet ujemnych $x_c$), zawarty między punktami K i L (rys. 7) typu $\eta_{gw}/t_{wmax}$ i $t_{wmax}/\eta_{dw}$ odpowiednio. Linia KL rozbudowuje się ze wzrostem wysokości i dla $y_c$ bliskich pułapowi stanowi wyłączne ograniczenie przekroju $\eta_0(x)$ od dołu (rys. 8).




Rys. 9. Strefa startu.

Strefę startu (rys. 9) wyznaczają punkty skrajne (A i F, E' i F, K i F, K i D) przekrojów $\eta_0(x_c)$. Dlatego poszczególne odcinki brzegu strefy startu MN, NP, PR, RS i ST mają własności odpowiednio punktów F, D, K, E' i A. Odcinek TM odpowiada $y_{cmin}$. Krzywa WP wyznacza warunki startu przy których $t_{w1} = t_{wmin}$ tj. czas realizacji zadania jest najkrótszy. Strefę sparametryzowano liniami $\dot{r}_w = \text{const}$ i $t_w = \text{const}$, co daje pełniejszy obraz jej topologii.

Ocena wpływu innych ograniczeń i czynników, ujętych w opracowanym modelu matematycznym systemu samonaprowadzania, na konfigurację strefy startu jest przedmiotem badań autorów.

## Literatura


1. Л. Г. Евлянов, *Контроль динамических систем*, Наука, Москва 1972.
2. S. Dubiel, *Więzy uogólnione i ich zastosowanie do badania sterowalności obiektów latających*. Dodatek do Biuletynu WAT, 256, Warszawa 1973.
3. J. Maryniak, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*, Prace naukowe — Mechanika Nr 32, Politechnika Warszawska, Warszawa 1975.
4. R. Gutowski, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
5. З. И. Кринецкий, *Системы самонаведения*. Машиностроение, Москва 1970.

Р е з ю м е

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМОГО ЛЕТАЮЩЕГО ОБЪЕКТА КЛАССА ЗЕМЛЯ-ВОЗДУХ

В работе рассмотрены некоторые вопросы динамики системы самонаведения зенитной ракеты на воздушную цель. Определено множество динамических задач самонаведения, а также подробно исследовано задачу анализа системы с известной структурой. Для этой системы построена математическая модель и численно определены зоны пуска.

S u m m a r y

MODELLING OF THE DYNAMICS OF A MANOEUVERING AIRCRAFT UNDER CONTROL

Selected problems of the dynamics of target-homing system on the manoeuvering aircraft are considered. The set of the dynamical target-homing problems have been defined. The analysis problem of the system with known structure has been studied in details.

Mathematical model has been formulated and the lift-off regions have been determined by means of the digital simulation.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 kwietnia 1986 roku.*