

METODA NUMERYCZNEJ ANALIZY DYNAMIKI NIESTACJONARNIE OBCIĄŻONEGO WIRNIKA NA ANIZOTROPOWYCH PODPORACH

JERZY MANEROWSKI

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa

1. Wstęp

Szereg prac poświęconych jest numerycznym metodom badania właściwości dynamicznych wirników. Badanie tych właściwości, oparte na metodzie elementów skończonych, sprowadzone zostało głównie do wyznaczania giętnych drgań własnych i krytycznych prędkości obrotowych ([1]÷[3]) oraz ustalonych drgań wymuszonych ([2], [3]).

W niniejszej pracy przedstawiono metodę numerycznego badania przemieszczeń, sił wewnętrznych, obciążeń podpór łożyskowych niejednorodnych wirników, obracających się ze zmiennymi prędkościami kątowymi oraz obciążonych zewnętrznymi zmiennymi w czasie skupionymi siłami i momentami sił (momenty gnące i skręcające).

Równania ruchu wirnika wyprowadzono z głównymi założeniami przyjętymi w ww. pracach. Dodatkowo uwzględniono przypadek zamocowania wirnika na anizotropowych podporach. Uwzględniono również bezwładnościowe sprzężenie zginania obracającego się wirnika ze skręcaniem.

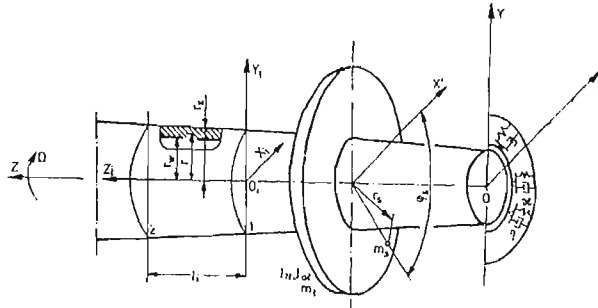
Wyznaczone równanie ruchu wirnika, które jest nieliniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu, rozwiązano metodą numerycznego całkowania Wilsona — Newmarka.

Niektóre przykładowe wyniki obliczeń zamieszczono w pracy.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy obracający się ze zmienną prędkością kątową $\Omega = \Omega(t)$ niejednorodny wirnik (rys. 1). Przyjmijmy, że zmiana prędkości kątowej wirnika realizowana jest zgodnie z określonym programem. Na wale wirnika zamocowane są nieodkształcalne tarcze. Przyjmijmy, że wirnik ułożyskowany jest na anizotropowych sprężysto-tłumiących podporach. Wał wirnika wykonany jest w postaci smukłej belki o przekroju kołowym z wydłużonym otworem. Materiał wału spełnia założenia modelu Kelvina-Voigta.

Do wyznaczenia równań dynamicznej równowagi wirnika wykorzystamy metodę elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej. Ruch wirnika określimy w nieruchomym układzie współrzędnych $OXYZ$. Wprowadzimy również lokalny układ współrzędnych $0_i X_i Y_i Z_i$. Układ ten związany jest z i -tym elementem skończonym (rys. 1).



Rys. 1

Przyjmijmy, że w wyniku działających obciążeń, oś wirnika przemieszcza się w kierunku osi X o wielkość $u(Z, t)$ oraz w kierunku osi Y o wielkość $v(Z, t)$ (rys. 2). Wał ulega również skręceniu o kąt $\varphi(Z, t)$. Zakładamy przy tym, że ww. przemieszczenia są wielkościami małymi.

Określmy naprężenia oraz odkształcenia wału wirnika. W wyniku wyżej podanych przemieszczeń, punkty przekroju poprzecznego wału ulegają przemieszczeniu w kierunku osi Z o wielkość w (rys. 2). Na podstawie zależności geometrycznych (rys. 2) oraz przy założeniu, że przekroje te po odkształceniu pozostają płaskie i prostopadłe do jego osi, przemieszczenie w punkcie A wirnika zapiszemy w postaci

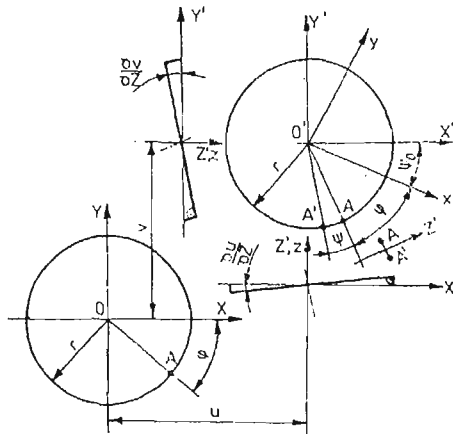
$$w(Z, r, \varphi, t) = r \frac{\partial u(Z, t)}{\partial Z} \cos(\varphi + \psi_0(t)) + r \frac{\partial v(Z, t)}{\partial Z} \sin(\varphi + \psi_0(t)), \quad (2.1)$$

gdzie: φ — kąt określający położenie punktu A przekroju poprzecznego,

ψ_0 — kąt wynikający z wirowania.

Odształcenie wynikające z ww. przemieszczenia wyznaczmy ze wzoru

$$\varepsilon(Z, r, \varphi, t) = \frac{\partial w(Z, r, \varphi, t)}{\partial Z}. \quad (2.2)$$



Rys. 2

Z kolei odkształcenie postaciowe wynikające ze skręcenia wału jest równe

$$\gamma(Z, r, \varphi, t) = r \frac{\partial \psi(Z, t)}{\partial Z}. \quad (2.3)$$

Naprężenia normalne (rozciągające) σ i styczne τ określimy zależnościami

$$\sigma(Z, r, \varphi, t) = E \varepsilon(Z, r, \varphi, t), \quad \tau(Z, r, \varphi, t) = G \gamma(Z, r, \varphi, t), \quad (2.4)$$

gdzie: E — moduł Younga, G — moduł Kirchhoffa.

Naprężenia wywołane siłami tłumiącymi, zgodnie z przyjętym modelem tłumienia materiałowego (wewnętrznego), zapiszemy w postaci

$$\sigma_{ir}(Z, r, \varphi, t) = \Theta_r \cdot \dot{\varepsilon}(Z, r, \varphi, t), \quad \tau_{is} = \Theta_s \cdot \dot{\gamma}(Z, r, \varphi, t), \quad (') = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (2.5)$$

gdzie: Θ_r, Θ_s — współczynniki tłumienia materiałowego w przypadku rozciągania (r) oraz skręcania (s).

Przejdziemy do określenia obciążeń masowych odcinka wirnika o jednostkowej długości.

Siły P_m (bezwładności i ciężkości) zapiszemy następująco:

$$P_{mx} = m \frac{\partial^2 u(Z, t)}{\partial t^2}, \quad P_{mY} = m \frac{\partial^2 v(Z, t)}{\partial t^2} + mg, \quad m = \rho \pi (r_z^2 - r_w^2) \quad (2.6)$$

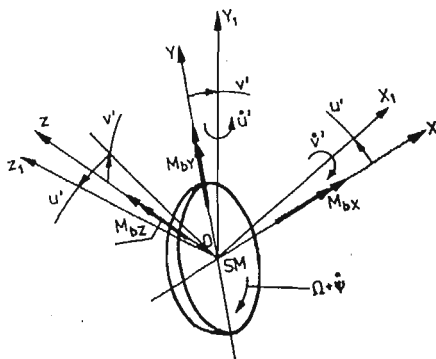
gdzie: ρ — gęstość materiału, m — masa na jednostkę długości, g — przyspieszenie ziemskie.

Momenty sił bezwładności M_b wyznaczmy różniczkując względem czasu wielkości kątów K wyznaczonych w układzie $0 X Y Z$ (analogicznie jak w pracy [4]). Kąty względem osi X_1, Y_1, Z_1 (rys. 3) są równe:

$$K_{X_1} = I_1 \dot{\psi}', \quad K_{Y_1} = I_1 \dot{u}', \quad K_{Z_1} = I_0 (\dot{\psi}_0 + \dot{\psi}), \quad \dot{\psi}_0 = \Omega, \quad (2.7)$$

gdzie: I_1, I_0 — masowe momenty bezwładności na jednostkę długości względem średnicy (1) i osi wirowania (0),

$$u' = \frac{\partial}{\partial Z} u, \quad v' = \frac{\partial}{\partial Z} v \text{ — kąty obrotu przekrojów.}$$



Eys. 3

Po wykonaniu obliczeń, zgodnie z wyżej podanym sposobem, momenty sił bezwładności zapiszemy w postaci

$$M_{bx} = M_{bx}^L + M_{bx}^N \quad \text{oraz analogicznie } M_{by}, M_{bz}, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} M_{bx}^L &= I_1 \ddot{v}' - I_0(\Omega \dot{u} + \dot{\Omega} u'), & M_{bx}^N &= -I_0(\dot{\psi} u' + \dot{\psi} u'), \\ M_{by}^L &= I_1 \ddot{u}' + I_0(\Omega \dot{v}' + \dot{\Omega} v'), & M_{by}^N &= I_0(\dot{\psi} v' + \dot{\psi} v'), \\ M_{bz}^L &= I_0 \dot{\Omega} + I_0 \dot{\psi}, & M_{bz}^N &= I_1(\ddot{v} u' - \dot{u}' v'). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Momenty te rozdzielono, z uwagi na zastosowany w par. 4 sposób rozwiązania równań równowagi wirnika, na część liniową L (zależną od jednej z wielkości v' , u' , ψ oraz ich pochodnych względem czasu) oraz nieliniową N (zależną od dwóch z ww. wielkości). Momenty sił bezwładności powodują sprzężenie zginania wału ze skręcaniem.

Jak już wcześniej zaznaczono, zakładamy że rozpatrywany wirnik zamocowany jest na anizotropowych sprężysto-tłumiących podporach (rys. 1). Jest to przypadek, w którym przykładowo sztywność podpory uzależniona jest od kierunku przemieszczenia. Rozważania ograniczymy do przypadku, w którym sztywność poprzeczna podpory κ w płaszczyźnie OXY określona jest wzorem

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa(U, V) = \sqrt{\kappa_1^2 c_1^2 + \kappa_2^2 s_1^2}, \\ c_1 &= U/\bar{U}, \quad s_1 = V/\bar{U}, \quad \bar{U} = \sqrt{U^2 + V^2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdzie: κ_1 — sztywność podpory w kierunku osi X gdy $V = 0$,

κ_2 — sztywność podpory w kierunku osi Y gdy $U = 0$,

U, V — przemieszczenia osi wirnika w miejscu jego podparcia w kierunku osi Y i X .

Współczynnik tłumienia poprzecznego podpory η , analogicznie jak sztywność poprzeczna, zakładamy w postaci:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(\dot{U}, \dot{V}) = \sqrt{\eta_1^2 c_2^2 + \eta_2^2 s_2^2}, \\ c_2 &= \dot{U}/\dot{\bar{U}}, \quad s_2 = \dot{V}/\dot{\bar{U}}, \quad \dot{\bar{U}} = \sqrt{\dot{U}^2 + \dot{V}^2}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie: η_1 — współczynnik tłumienia podpory w kierunku osi X gdy $\dot{V} = 0$,

η_2 — współczynnik tłumienia podpory w kierunku osi Y gdy $\dot{U} = 0$.

Przyjmujemy, że podpory wału nie mają swobody obrotu względem osi X i Y (sztywność κ_k i tłumienie η_k). Zakładamy przy tym analogiczne jak wyżej zależności na κ_k i η_k . Zależności te otrzymamy po podstawieniu w miejsce κ_1 i κ_2 wielkości κ_{k1} i κ_{k2} oraz w miejsce η_1 i η_2 wielkości η_{k1} i η_{k2} . Z kolei w miejsce przemieszczeń i prędkości przemieszczeń podstawić należy kąty obrotu przekrojów U' i V' i prędkości kątowne \dot{U}' , \dot{V}' . Zakładamy również, że moment skręcający M_s przekazywany jest na wał poprzez sprzęgło o liniowej charakterystyce. Przyjmiemy przy tym, że jego sztywność na skręcanie jest równa κ_s , a współczynnik tłumienia wynosi η_s .

3. Równania równowagi

Celem wyznaczenia równań dynamicznej równowagi wirnika (rys. 1) wykorzystamy metodę elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej ([3], [6]) oraz zasadę prac wirtualnych

$$\sum_i \delta W_{si} + \sum_i \delta W_{mi} + \sum_j \delta W_{mj} + \sum_i \delta W_{tri} = \sum_i \delta W_{zi} \quad (3.1)$$

gdzie: δW_{si} — praca sprężystych sił i -tego elementu,
 δW_{mi} , δW_{mj} — praca sił i momentów sił masowych i -tego elementu oraz j -tej tarczy,
 δW_{tri} — praca sił tłumienia materiałowego elementu,
 δW_{zi} — praca sił i momentów sił zewnętrznych elementu na odpowiednich przemieszczeniach wirtualnych.

Do wyznaczania równań równowagi wirnika przyjmujemy następujące funkcje przemieszczenia dla i -tego skończonego elementu o długości l_i :

$$\psi(Z, t) = \alpha_i \Psi_i, \quad u(Z, t) = \beta_i U_{X_i}, \quad v(Z, t) = \beta_i U_{Y_i} \quad (3.2)$$

gdzie: α_i , β_i — macierze wierszowe określające postać przemieszczenia wzdłuż długości elementu,

$$\alpha_i = [\alpha_i(Z)] = [\alpha_1, \alpha_2]_i, \quad \alpha_1 = 1 - \frac{Z}{l_i}, \quad \alpha_2 = \frac{Z}{l_i}, \quad (3.3)$$

$\beta_i = \beta_i(Z) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$, $\beta_1 \div \beta_4$ — sześcienne wielomiany Hermita ([1], [2]),
 Ψ_i , U_{X_i} , U_{Y_i} — wektory przemieszczeń krawędzi elementu,

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \Psi_i(t) = [\Psi_1, \Psi_2]^T, \\ U_{X_i} &= U_{X_i}(t) = [U_1, U_2', U_2, U_2']^T, \\ U_{Y_i} &= U_{Y_i}(t) = [V_1, V_1', V_2, V_2']^T, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$U_{1,2}$, $V_{1,2}$ — przemieszczenia krawędzi 1 i 2 elementu w kierunku osi X i Y ,

$\Psi_{1,2}$, $U_{2,1}'$, $V_{1,2}'$ — kąty skręcania i kąty obrotu krawędzi 1 i 2 elementu (rys. 1)

Wyznamy czony równania (3.1).

Pracę δW_{si} przedstawimy w postaci

$$\delta W_{si} = \int_0^{2\pi} \int_{r_w}^{r_x} \int_0^{l_i} [\delta \varepsilon, \delta \gamma] \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} r d\varphi, dr, dZ \quad (3.5)$$

Po podstawieniu do (3.5) zależności (2.1) ÷ (2.4) i (3.2) ÷ (3.4)

$$\delta W_{si} = \delta U_i^T U_i, \quad (3.6)$$

gdzie: K_i — macierz sztywności elementu,

U_i — wektor przemieszczeń krawędzi elementu,

$$U_i = [\Psi_1, U_1, U, V_1, V_1', \Psi_2, U_2, U_2', V_2, V_2']^T. \quad (3.7)$$

Macierz sztywności elementu wału jest taka sama jak dla zginanego i skręcanego pręta [8].

Pracę sił tłumienia wewnętrznego na przemieszczeniach wirtualnych określimy związkiem

$$\delta W_{tri} = \int_0^{2\pi} \int_{r_w}^{r_x} \int_0^{l_i} [\delta \varepsilon, \delta \gamma] \begin{bmatrix} \sigma_{tr} \\ \tau_{tk} \end{bmatrix} r d\varphi dr dZ. \quad (3.8)$$

Po podstawieniu (2.1) ÷ (2.3), (2.5), (3.2) ÷ (3.4) oraz wykorzystaniu (3.7) pracę (3.8) przedstawimy w formie zależności

$$\delta W_{iri} = \delta U_i^T (C_{1i} \dot{U}_i - \Omega C_{2i} U_i), \quad (3.9)$$

gdzie: C_1 — macierz tłumienia,

C_2 — antysymetryczna macierz zależna od prędkości wirowania.

Macierz C_2 uwzględnia wpływ zginania na tłumienie ruchu obracającego się wirnika. Pracę sił masowych (2.6) i momentów sił bezwładności (2.9) określimy ze związku

$$\delta W_{mi} = \int_0^l \left([\delta\psi, \delta u, \delta v] \begin{bmatrix} 0 \\ P_{mX} \\ P_{mY} \end{bmatrix} + [\delta\psi, \delta u', \delta v'] \begin{bmatrix} M_{bz} \\ M_{bY} \\ M_{bX} \end{bmatrix} \right) dZ. \quad (3.10)$$

Z kolei pracę δW_{mij} j -tej tarczy (i), zamocowanej przykładowo na prawej krawędzi i -tego elementu, wyznaczmy ze wzoru

$$\delta W_{mij} = [\delta\psi, \delta u, \delta v]_{|Z=0} \begin{bmatrix} 0 \\ P_{miX} \\ P_{miY} \end{bmatrix}_{|Z=0} + [\delta\psi, \delta u', \delta v']_{|Z=0} \begin{bmatrix} M_{bitz} \\ M_{bitY} \\ M_{bitX} \end{bmatrix}_{|Z=0}. \quad (3.11)$$

Siły P_{mi} i M_{bit} określone są wzorami (2.6) i (2.9) z podstawieniem w miejsce m , I_1 , I_0 wielkości: m_i — masa tarczy oraz I_{1i} , I_{0i} — masowe momenty bezwładności tarczy. Po wykonaniu obliczeń, pracę sił masowych i momentów sił bezwładności elementu z zamocowaną na jego krawędzi tarczą przedstawimy w formie zależności:

$$\delta W_{mi} + \delta W_{mij} = \delta U_i^T (M_i + M_j + I_i + I_j) \ddot{U}_i + \Omega (G_i + G_j) \dot{U}_i + \dot{\Omega} (G_i + G_j) U_i + \dot{\Omega} (F_{1i} + F_{1j}) + g(F_{2i} + F_{2j}) + F_i^N + F_j^N, \quad (3.12)$$

gdzie: $M_{i,j}$ — macierz mas, $I_{i,j}$ — macierz momentów bezwładności, $G_{i,j}$ — antysymetryczna macierz giroskopowa, $F_{1i,j}$ — wektor zależny od przyspieszenia kąowego $\dot{\Omega} = \dot{\psi}_0$,

$F_{2i,j}$ — wektor sił ciężkości,

$F_{i,j}^N(U_i, \dot{U}_i, \ddot{U}_i)$ — wektor nieliniowych członów zależności (2.9).

Określimy pracę sił zewnętrznych elementu δW_{zi} . Zakładamy, że obciążenie zewnętrzne wirnika stanowią skupione na krawędziach elementu zmienne w czasie siły i momenty sił. Przy założeniu, że prawa krawędź elementu obciążona jest siłami i momentami sił $M_S = M_z, M_y$ i M_x (dodatnie zwroty momentów sił jak na rys. 3) pracę sił zewnętrznych przedstawimy w postaci

$$\delta W_{zi} = \delta U_i^T F_{zi}, \quad (3.13)$$

$$F_{zi} = [M_S, P_x, M_y, P_y, M_x, 0, 0, 0, 0]^T.$$

Celem pełnego sformułowania problemu rozpatrzmy warunki brzegowe omawianego wirnika (rys. 1). Warunki te określimy w postaci sił i momentów sił wynikających z przemieszczeń oraz prędkości przemieszczeń podpór i sprzęgła, które omówiono w par. 2. Dla ich wyznaczenia, w pierwszej kolejności określimy energię potencjalną sprężystego odkształcenia podpory i sprzęgła V^* oraz w przypadku tłumienia podpory funkcję dysypacji D^* . Przy założeniu, że podpora i sprzęgło znajduje się na prawej krawędzi i -tego elementu (rys. 1) V_i^* i D_i^* przedstawimy w postaci (por. (2.10) i (2.11))

$$\begin{aligned} V_i^* &= \frac{1}{2} [\kappa_s \Psi_i^2 + \kappa(\bar{U}_i)^2 + \kappa_k(\bar{U}_i')^2], \\ D_i^* &= \frac{1}{2} [\eta_s \dot{\Psi}_i^2 + \eta(\dot{U}_i)^2 + \eta_k(\dot{U}_i')^2]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Warunki brzegowe w postaci sił uogólnionych odpowiadających współrzędnym Ψ_i , U_i , U_i' , V_i i V_i' wyznaczmy z zależności

$$P_{U_i} = -\frac{\partial V_i^*}{\partial U_i} - \frac{\partial D_i^*}{\partial \dot{U}_i} \quad (3.15)$$

oraz analogicznie dla pozostałych współrzędnych.

Po wykonaniu obliczeń omawiane siły przedstawimy w formie zależności

$$P_i = A_i U_i + T_i \dot{U}_i, \quad (3.16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \kappa_s, & A_{22} &= \frac{1}{2} \left(a_\kappa + \kappa_1^2 \frac{1}{a_\kappa} \right), & A_{33} &= \frac{1}{2} \left(a_{\kappa k} + \kappa_{1k}^2 \frac{1}{a_{\kappa k}} \right), \\ A_{44} &= \frac{1}{2} \left(a_\kappa + \kappa_2^2 \frac{1}{a_\kappa} \right), & A_{55} &= \frac{1}{2} \left(a_{\kappa k} + \kappa_{2k}^2 \frac{1}{a_{\kappa k}} \right), \\ a_\kappa &= \frac{\sqrt{\kappa_1^2 U_1^2 + \kappa_2^2 V_1^2}}{\sqrt{U_1^2 + V_1^2}}, & a_{\kappa k} &= \frac{\sqrt{\kappa_{k1}^2 (U_1')^2 + \kappa_{k2}^2 (V_1')^2}}{\sqrt{(U_1')^2 + (V_1')^2}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pozostałe wyrazy macierzy A_i przyjmują zerowe wartości. Wyrazy macierzy T_i mają analogiczną postać do wyrazów macierzy A .

Wyrazy T_i otrzymamy po podstawieniu do A_i w miejsce współczynników sztywności współczynniki tłumienia oraz w miejsce przemieszczeń prędkości przemieszczeń.

Zależność (3.16) wykorzystać można do modelowania ułożyskowania wirnika na izotropowych i anizotropowych podporach. Jeżeli założymy $\kappa_1 = \kappa_2$, $\eta_1 = \eta_2$, $\kappa_{k1} = \kappa_{k2}$ i $\eta_{k1} = \eta_{k2}$ wyrazy macierzy A_i i T_i przyjmują postać taką jak dla izotropowych sprężysto-tłumiących podpór, które rozpatrywano w [1] i [2]. Jeżeli wyznaczmy w następujący sposób wartości wyrazów ww. macierzy:

A_{22} przy $V_1 = 0$, A_{44} przy $U_1 = 0$, A_{33} przy $V_1' = 0$ i A_{55} przy $U_1' = 0$ oraz analogicznie wyrazy T_{ij} — przy zerowych wartościach prędkości przemieszczeń, zależność (3.16) przyjmuje wówczas postać taką jak dla ortotropowych podpór [3].

Po wykorzystaniu wyżej podanych zależności, równanie dynamicznej równowagi obracającego się wirnika przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(U)U + \mathbf{C}_1(\dot{U})\dot{U} - \Omega \mathbf{C}_2 U + \Omega \mathbf{G}\dot{U} + \dot{\Omega} \mathbf{G}U + (\mathbf{M} + \mathbf{I})\ddot{U} = \\ = \mathbf{F}_z - \dot{\Omega} \mathbf{F}_1 - g \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}^N(U, \dot{U}, \ddot{U}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdzie:

$\mathbf{K}(U)$ — macierz sztywności wirnika i sztywności podpór,

$\mathbf{C}_1(\dot{U})$ — macierz tłumienia materiałowego wirnika i tłumienia podpór,

U — wektor przemieszczeń krawędzi elementów wirnika.

Znaczenie pozostałych macierzy równania (3.18) jest takie same jak dla macierzy elementu.

4. Numeryczna analiza

Wyprowadzone w poprzednim paragrafie równanie (3.18) wykorzystano do wyznaczenia przemieszczeń, naprężeń w wale, obciążeń podpór łożyskowych wirnika na anizotropowych podporach.

Do rozwiązania powyższego równania zastosowano metodę numerycznego całkowania Wilsona — Newmarka ([5], [9]).

Metoda ta pozwala na obliczenie wektorów przemieszczeń $\{U\}$ oraz jego pierwszej i drugiej pochodnej względem czasu w chwili $t + \Delta t$, jeżeli znane są te wektory w chwili t . Δt jest krokiem całkowania. Ww. wektory dla chwili $t + \Delta t$ oblicza się po uprzednim wyznaczeniu wektora U w chwili $t + \tau$ ($\tau = 1.4 \cdot \Delta t$) z algebraicznego równania, które dla zależności (3.18) przyjmuje postać (por. [9])

$$K^*(t + \tau)U(t + \tau) = F^*(t + \tau) \quad (4.1)$$

Człony nieliniowe równania (4.1), wynikające z przyjętych założeń dotyczących anizotropii podpór i momentów sił bezwładności (por. (2.10), (2.2.8) i (3.18)), przyjęto dla chwili $t + \tau$ jako wielkości obliczone z wykorzystaniem U , \dot{U} i \ddot{U} określonych dla chwili t . Uprzedzając wyniki obliczeń — obliczenia testowe wykazały, że dla dostatecznie małych kroków całkowania Δt powyższe założenie pomijalnie wpływa na dokładność rozwiązań.

Do rozwiązania równania (4.1) wykorzystano, analogicznie jak w pracy [9], procedury IPASMO i XPASMO [7].

Bezpośrednio po wyznaczeniu wektorów U , \dot{U} i \ddot{U} określić można wartości naprężeń ((2.4), (2.5)), obciążeń podpór łożyskowych ((3.16)), wartości sił i momentów sił bezwładności ((2.6), (2.8)).

Niżej zamieszczono przykładowe wyniki obliczeń dla wirnika z przewieszoną tarczą, o stałym przekroju poprzecznym wału, podpartego na dwóch anizotropowych podporach. Dane wirnika: $E = 2.05 \cdot 10^{11}$ N/m², $G = 7,9 \cdot 10^{10}$ N/m², $r_w = 0.0185$ m $r_z = 0.021$ m $L = 2.4$ m, $L_p = 2$ m, $m_t = 1$ kg, $I_{1t} = 0,5 I_{0t} = 0.01$ kgm² sztywność poprzeczna obu podpór — jednakowa $\kappa_1 = 10^4$ N/m, $\kappa_2 = 10^6$ N/m. Przyjęto, że kąt skręcenia wału w miejscu zamocowania pierwszej podpory (podpora A-rys. 4) jest równy zeru.

Kolejne częstości giętych drgań własnych omawianego wirnika przy precesji współbieżnej, obliczone metodą przedstawioną w pracy [2], przy założeniu izotropii podpór — $\kappa_1 = \kappa_2 = 10^4$ N/m (2.10) są równe $\omega_{gw} = 79; 779$ rad/s.

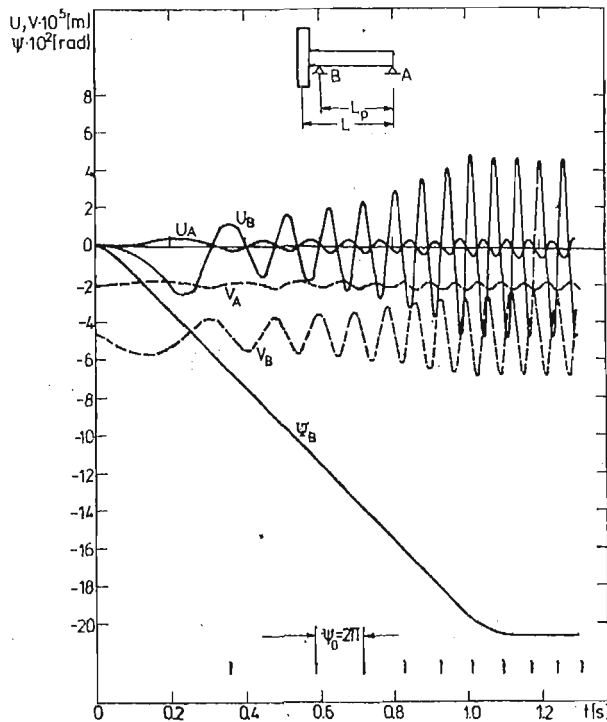
Z kolei pierwsza częstość skrętnych drgań własnych $\omega_s = 444$ rad/s. Jako obciążenie zewnętrzne przyjęto siły i momenty sił od zamocowanej na tarczy masy skupionej $m_s = 0,1$ kg na promieniu $r_s = 0.1$ m rys. 1.

Obciążenie to określono zależnościami (por. (2.6)):

$$\begin{aligned} P_{Xt} &= -m_s \ddot{U}_t + m_s r_s (\dot{\Omega} + \dot{\Psi}_t)^2 c + m_s r_s (\ddot{\Omega} + \ddot{\Psi}_t) s, \\ P_{Yt} &= -m_s \ddot{V}_t - m_s r_s (\dot{\Omega} + \dot{\Psi}_t)^2 s + m_s r_s (\ddot{\Omega} + \ddot{\Psi}_t) c - m_s g, \\ M_{Zt} &= -m_s r_s^2 (\ddot{\Omega} + \ddot{\Psi}_t) + m_s r_s \ddot{U}_s + m_s r_s \ddot{V}_c + m_s g r_s c, \\ s &= \sin \bar{\Psi}, \quad c = \cos \bar{\Psi}, \quad \Psi = \psi_0 + \Psi_t + \varphi_s. \end{aligned}$$

Dodatkowo założono obciążenie wirnika w postaci momentu skręcającego M_s , przyłożonego w miejscu zamocowania tarczy. Zamieszczone na rys. 4÷6 wyniki obliczeń dotyczą ww. wirnika podczas rozruchu. Prędkość kątową rośnie liniowo w czasie 1s — od zera do wartości $\Omega = 100$ rad/s. Moment skręcający również rośnie liniowo od zera do 1000 Nm w czasie 1s.

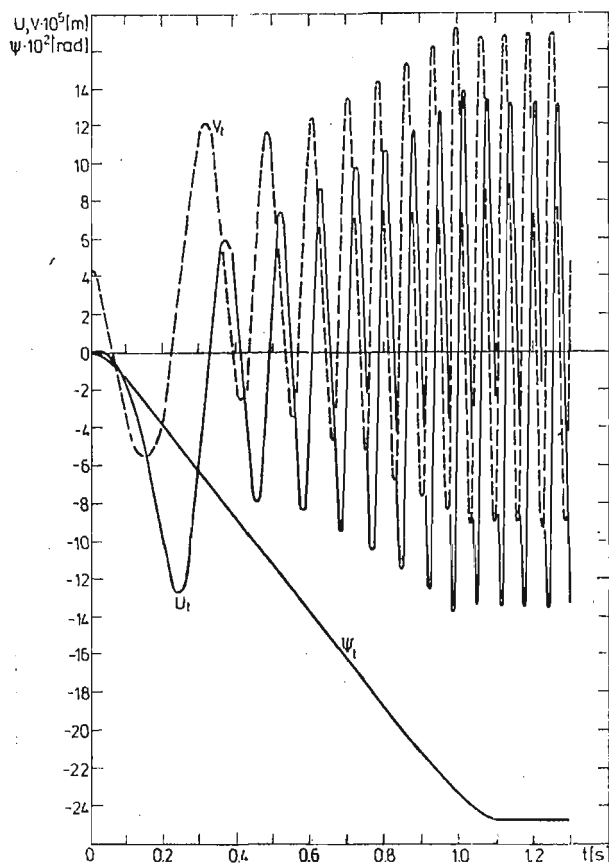
Na rys. 4 i 5 zamieszczone wyniki obliczeń przemieszczeń osi wirnika w miejscach jego podparcia (rys. 4) oraz zamocowania tarczy (rys. 5). Pokazano tu zmianę w funkcji czasu przemieszczeń w kierunku osi $X-U$, w kierunku osi $Y-V$ oraz kąty skręcenia Ψ . Oś wału wiruje wokół statycznej linii ugięcia, określonej przemieszczeniami w chwili $t = 0$ — wynikającymi z działania sił ciężkości.



Rys. 4

W początkowym okresie rozruchu następuje intensywny wzrost ww. przemieszczeń. Po czasie ok. 0.3 s występuje spadek wielkości przemieszczeń. Po zakończeniu rozruchu następuje bardzo szybkie ustalenie wartości przemieszczeń (amplitud przemieszczeń). W czasie rozruchu i po jego zakończeniu tory ruchu osi wirnika mają kształt eliptyczny. Kierunek wirowania osi wału jest zgodny z kierunkiem wektora prędkości kątowej Ω . Zamieszczone na ww. rysunkach kąty skręcenia Ψ rosną liniowo w czasie, z wyjątkiem początkowego i końcowego etapu rozruchu.

Na rys. 6 przedstawiono zmianę w czasie naprężeń normalnych w wale. Rys. 6a dotyczy zmian ww. naprężeń na promieniu zewnętrznym w części międzypodporowej wału — w odległości $0.25 L$ od podpory B.

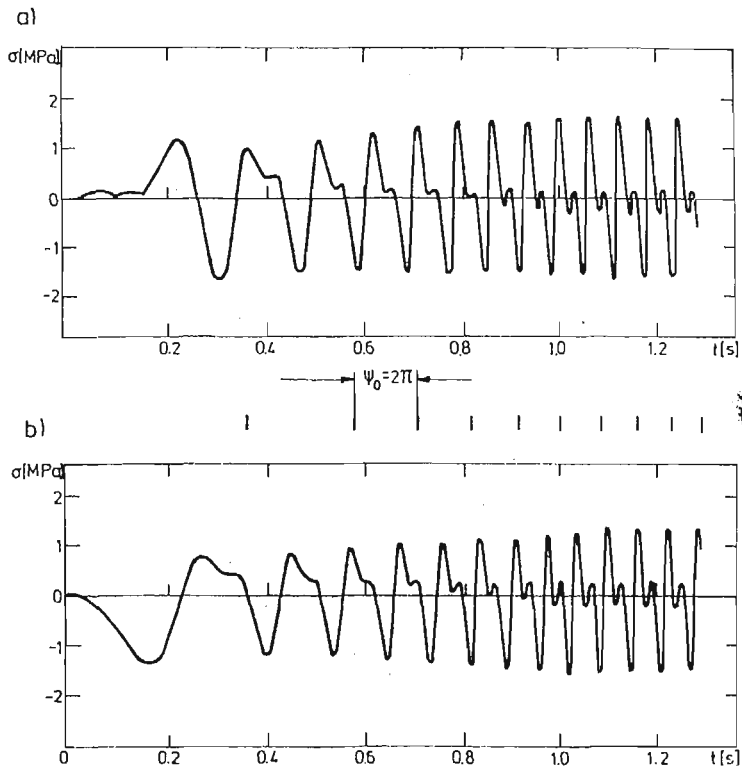


Rys. 5

Z kolei rys. 6b — analogicznie w połowie długości przewieszzonego odcinka wału. Omawiane naprężenia określone są dla kąta $\varphi = 0$ (por. rys. 1 i 2).

Przeprowadzono również obliczenia dla ww. wirnika z pominięciem nieliniowych członów momentów sił bezwładności (por. (2.8)). Dla założonego przebiegu rozruchu, uwzględnienie lub pominięcie ww. członów ma pomijalny wpływ na wartości otrzymanych wyników (dla rozpatrywanego wirnika).

Zamieszczone przykłady obliczeń stanowią jedynie ilustrację zastosowań przedstawionej metody.



Rys. 6

Literatura

1. Z. DŻYGADŁO, *Numerical analysis of flexural vibrations of rotors resting on elastic supports*, J. Tech. Phys., 22, 4, 1981.
2. Z. DŻYGADŁO, J. MANEROWSKI, *Zastosowanie złożonych elementów skończonych do analizy giętych drgań wirników turbinowych silników lotniczych*, Biul. WAT. 31.1.1982
3. Z. DŻYGADŁO, J. MANEROWSKI, *Vibration and stability analysis of rotors on orthotropic supports*, J. Techn. Phys. 23, 3—4, 1982
4. R. ŁĄCZKOWSKI, *Drgania elementów turbin ciepłych*, Warszawa 1974.
5. E. L. WILSON, *Numerical method for dynamics analysis*, International symposium on numerical methods Offshore engineering, Swensa 1977.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
7. J. SZMELTER, *Metody komputerowe w mechanice*, PWN, Warszawa 1980.
8. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1973.
9. J. MANEROWSKI, *A method for numerical analysis of the dynamics of a controlled rotor blade of a helicopter*, J. Tech. Phys. 26, 1985.

Резюме

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ДИНАМИКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО НАГРУЖЕННОГО РОТОРА НА АНИЗОТРОПНЫХ ПОДПОРАХ

Представлен метод численного исследования перемещений внутренних сил, нагрузок подшипниковых подпор неоднородных роторов, вращающихся с переменными угловыми скоростями с нагрузкой переменными с учётом времени силами и моментами сил. Использован метод конечных элементов в варианте перемещений.

Рассмотрен ротор, подкреплённый анизотропными подпорками, вал ротора имеет вид гибкой балки.

Выведенные уравнения равновесия вращающегося ротора учитывают инерционное сопряжение изгиба и скручивания.

Помещены примерные результаты расчётов.

Summary

A METHOD OF NUMERICAL ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF A NONSTATIONARY LOADED ROTOR ON ANISOTROPIC SUPPORTS

A method of numerical analysis has been presented for displacements, internal forces, loads on bearings for heterogeneous rotors, rotating with variable angular velocities and loaded by variable in time forces and moments of forces. The finite element method in version of the displacement method has been applied.

The rotor resting on anisotropic supports has been analysed; the rotor shaft has the form of a slender beam. The equations of equilibrium for rotating rotor include the inertial coupling of bending and torsion.

Results of example calculations have been given.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 marca 1986 roku.