

MINIMALNO-CZASOWY PROGRAM STEROWANIA LOTEM ZE ZMIENNĄ PRĘDKOŚCIĄ

STANISŁAW DUBIEL
WITOLD PŁECHA

Wojskowa Akademia Techniczna

Streszczenie

Przedstawiono podstawy wyznaczania ograniczeń przy minimalno-czasowym programie wprowadzania rakiety w pole sterowania przy zmiennej prędkości lotu. Skupiono się przede wszystkim na ograniczeniu wielkości sterowania (kąta wychylenia steru) i ograniczeniu przeciążeń dopuszczalnych.

Wprowadzenie

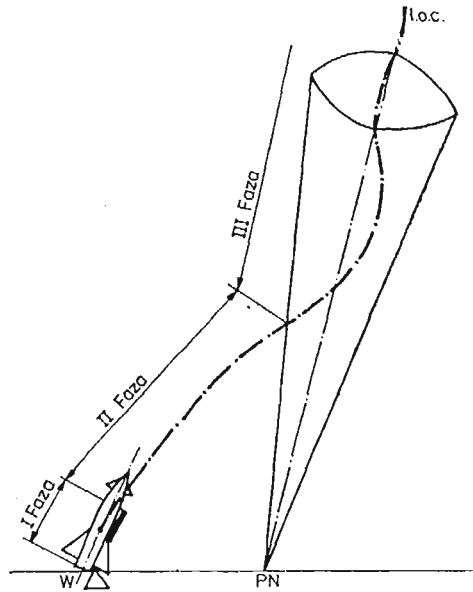
Ruch rakiet sterowanych składa się najczęściej z kilku charakterystycznych faz. Za-
wyczaj wymienia się i rozpatruje trzy fazy (rys. 1):

- ruch nieswobodny po prowadnicach wyrzutni (lub nosiciela),
- lot swobodny niesterowany lub sterowany programowo,
- lot sterowany automatycznie.

Zachodzi więc dwukrotna zmiana charakteru ruchu i to w stosunkowo krótkim czasie. O powodzeniu realizacji zadania (przechwycenie celu przez raketę) decyduje nie tylko właściwy dobór układu sterowania dla fazy trzeciej, ale w równej mierze faza druga, a więc przejście rakiety od wyrzutni do pola sterowania. Możliwe tu są co najmniej dwa sposoby wprowadzenia rakiety w pole sterowania. Pierwszy, to „wejście” rakiety w wiązkę metodą „wstrzeliwania”, drugi to „wprowadzenie” rakiety w pole sterowania lotem programowym.

Metoda „wstrzeliwania” wymaga sprzężenia wyrzutni z ruchem wiązki sterującej, a więc dość rozbudowanego układu automatycznego sterowania wyrzutnią, którego ciężar znacznie przewyższa ciężar samej wyrzutni. Ponadto sprzężenia ruchu wyrzutni ogranicza się najczęściej do ruchów obrotowych, ponieważ zmiana położenia wyrzutni względem bieżąca wiązki jest technicznie nie do zrealizowania.

Trudności rozwiązania technicznego dla metody „wstrzeliwania” odpadają, jeżeli drugą fazę zastąpić programowym „wprowadzeniem” rakiety w pole sterowania. Korzyści



Rys. 1. Fazy lotu rakiet sterowanych

takiego rozwiązania są dość oczywiste, wyrzutnia jest nieruchoma, ma bardzo prostą, a więc i bardzo lekką konstrukcję i może być umieszczona w dowolnym miejscu w stosunku do bieguna wiązki. Zalety bardzo cenne dla zestawów przenośnych, zwiększających znacznie bezpieczeństwo obsługi.

Metoda programowego wprowadzenia rakiety w pole sterowania pociąga za sobą wydłużenie czasu trwania drugiej fazy lotu, należy więc dążyć do skrócenia tego czasu do możliwie najmniejszych granic.

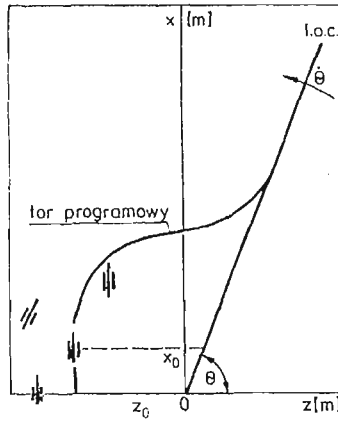
Możliwość taką daje minimalno-czasowy program sterowania, który może być wyznaczony zasadą „maksimum” Potriagina lub na podstawie analizy wektorowej.

1. Sformułowanie problemu i wyjściowe równania ruchu

Przy wyznaczaniu równań ruchu rakiety założono, że układ równań w przestrzeni daje się rozdzielić na dwie niezależne grupy opisujące ruch rakiety w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach oraz, że rakieta podczas lotu nie wykonuje ruchu obrotowego względem swojej osi. Tak więc, opracowanie programu ograniczono do ruchu płaskiego w płaszczyźnie poziomej dla sytuacji początkowej pokazanej na rys. 2.

Zapotrzebowanie na takie ujęcie wypływa z dynamiki rakiet ppanc i jest przeznaczone przede wszystkim dla zestawów tego typu rakiet. Nie należy tego traktować jako ograniczenia sztywnego, ponieważ wyniki można wykorzystać i dla innych zestawów.

Układ równań opisujący ruch rakiety, dla której będzie poszukiwany optymalny program wprowadzania jest następujący:



Rys. 2. Położenie wyrzutni niezależne od linii obserwacji celu (l.o.c.)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= n_T g - \frac{\lambda}{2} C_x \bar{\rho} V^2 \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \left(n_T g + \frac{\lambda}{2} C_z \bar{\rho} V^2 \right) \beta \end{aligned} \quad (1)$$

$$I_y \frac{d\omega}{dt} = N(\beta, \dot{\beta}, \omega, \delta); \quad \frac{dz}{dt} = V \cos \Psi; \quad \frac{dx}{dt} = V \sin \Psi; \quad \frac{dm}{dt} = -\mu$$

gdzie:

 V — prędkość lotu rakiety β — kąt ślizgu rakiety (kąt między osią rakiety a kierunkiem lotu) ψ — kąt odchylenia wektora prędkości rakiety od osi x δ — kąt wychylenia steru kierunku m — masa rakiety z, x — współrzędne położenia środka masy rakiety $\lambda = \frac{\rho_0 g \cdot s}{Q}$ — współczynnik obciążenia rakiet I_y — moment bezwładności rakiety C_x, C_z — współczynniki aerodynamiczne odpowiednich sił $n_T = \frac{T}{Q}$ — przeciążenie styczne od zespołu napędowego.

Przy czym na kąt wychylenia steru nakłada się ograniczenie

$$-\delta_{max} \leq \delta \leq \delta_{max} \quad (1.2)$$

Układ (1.1) można zapisać w postaci ogólnej jako:

$$\begin{aligned} f_1(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r) &= \dot{x}_1 = A - Bx_1^2 \\ f_2(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r) &= \dot{x}_2 = \left(\frac{A}{x_1} + Cx_1 \right) u_1 \\ f_3(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r) &= \dot{x}_3 = x_1 \cdot \cos x_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
 f_4(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_r) &= x_4 = x_1 \cdot \sin x_2 & (1.3) \\
 f_5(x_1 \dots x_4, u_1 \dots u_r) &= x_5 = -\mu & [\text{cd}] \\
 f_6(x_1 \dots x_4, u_1 \dots u_r) &= x_6 = 1
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$A = n_T \cdot g; \quad B = \frac{\lambda}{2} C_x \bar{\varrho}; \quad C = \frac{\lambda}{2} C_z^\beta \bar{\varrho}$$

$x_1 \dots x_n$ — przedstawia punkt przestrzeni stanów (stan rakiety)

$u_1 \dots u_r$ — przedstawia wielkości sterujące (sterowanie).

Tak opisaną raketę należy przeprowadzić od rozmaitości brzegowej:

$$\Pi_0 = \begin{cases} x_1(t_0) = V_0 \\ x_2(t_0) = \Psi_0 \\ x_3(t_0) = z_0 \\ x_4(t_0) = x_0 \\ x_5(t_0) = m_0 \\ x_6(t_0) = t_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

do rozmaitości brzegowej:

$$\Pi_k = \begin{cases} x_1(t_k) = V_k \\ x_2(t_k) = \Psi_k = \Theta \\ x_3(t_k) \text{ i } x_4(t_k) \in R(x) = x_4 - x_3 \cdot \text{tg}\Theta = 0 \\ x_5(t_k) = m_k \\ x_6(t_k) = t_k \end{cases} \quad (1.5)$$

Rozwiązania układu (1.1) można dokonać przechodząc na masę jako zmienną niezależną

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dm} &= -\frac{T}{\mu \cdot m} + \frac{C_x \cdot \bar{\varrho} \cdot S}{2\mu m} \cdot V^2 \\
 \frac{d\Psi}{dm} &= \left(-\frac{T}{\mu \cdot m \cdot V} - \frac{C_z^\beta \cdot \bar{\varrho} \cdot S \cdot V}{2 \cdot \mu \cdot m} \right) \beta \\
 \frac{dz}{dm} &= -\frac{V}{\mu} \cdot \cos \Psi \\
 \frac{dx}{dm} &= -\frac{V}{\mu} \cdot \sin \Psi \\
 \frac{dm}{dt} &= -\mu
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

gdzie:

T — ciąg silnika,

S — powierzchnia odniesienia sił aerodynamicznych,

$\bar{\varrho} = \frac{\varrho(h)}{\varrho_0}$ — względna gęstość powietrza.

Rozwiązania otrzymujemy w postaci

$$\begin{aligned}
 m &= m_0 - \mu \cdot t \\
 V &= V_0 + D \ln \frac{m}{m_0} \\
 \Psi &= \left[\left(\ln V + \frac{G}{2D} V^2 \right) - \left(\ln V_0 + \frac{C}{2D} V_0^2 \right) \right] \cdot \beta + \Psi_0 \\
 z &= R \cos \Psi + z_0 \\
 x &= R \sin \Psi + x_0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

gdzie:

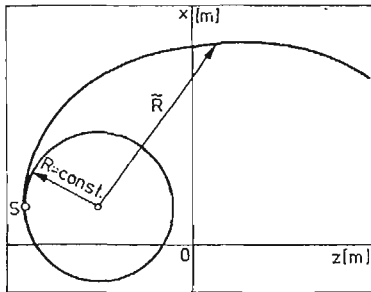
$$\begin{aligned}
 D &= -\frac{T}{\mu}; \quad G = \frac{C_z^\beta \cdot \bar{q} \cdot S}{2\mu}; \quad H = m_0 c^{-\frac{V_0}{D}} \\
 R &= -\frac{H}{\mu} \left[e^{\frac{V}{D}} (V - D) - e^{\frac{V_0}{D}} (V_0 - D) \right]
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Po podniesieniu do kwadratu i dodaniu stronami dwóch ostatnich równań układu (1.7) otrzymujemy równanie opisujące ruch rakiety

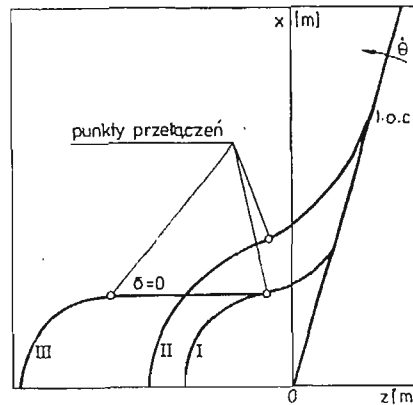
$$(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2 \tag{1.9}$$

Analizując wyrażenie na promień R widzimy, że dla rakiety o stałej prędkości torami będą okręgi, natomiast dla zmiennej prędkości torem będzie konchoida (rys. 3).

Właściwe rozwiązanie problemu programowego wprowadzenia daje kombinacja dwóch, a w przypadku gdy występuje również potrzeba ustawienia sterów w położenie zerowe ($\delta = 0$), trzech rozwiązań (rys. 4).



Rys. 3. Tory lotu z dopuszczalnym sterowaniem; okrąg dla stałej prędkości; konchoida dla rosnącej prędkości



Rys. 4. Tory wprowadzenia rakiety na linię obserwacji celu

2. Wyznaczenie ograniczeń

Manewrowość rakiety ograniczają zazwyczaj maksymalny kąt wychylenia sterów lub dopuszczalne przeciążenia (przyspieszenia jednostkowe), których wartość maksymalna odpowiada dopuszczalnym ze względów wytrzymałościowych obciążeniom.

Optymalny ze względu na minimum czasu program wprowadzenia rakiety w pole sterowania można wyznaczyć dla pełnego układu równań ruchu (1.1). Program sterowania dla tego układu będzie jakościowo podobny do programu, jaki można wyznaczyć dla uproszczonego układu równań z pominięciem wahań dookoła osi y , czyli jeśli przyjąć

$$\omega_y \cong \dot{\omega}_y \cong 0$$

Jest to równoznaczne z szybkim wygaszaniem procesu przejściowego, wywołanego zmianą położenia równowagi momentów.

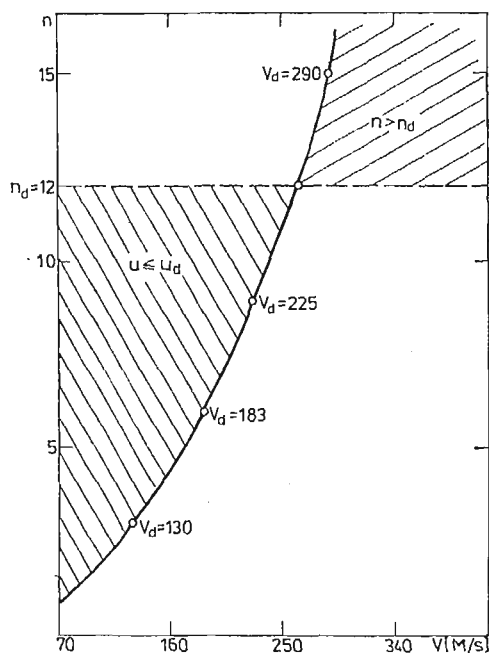
Dla tego rodzaju założeń uzyskamy relację między kątem ślizgu, a kątem wychylenia steru dla układu „kaczka” w postaci

$$\beta = -\frac{C_m^\delta}{C_m^\beta} \delta \quad (2.1)$$

Kąt ślizgu β , któremu odpowiada położenie równowagi momentów dla odpowiedniego wychylenia sterów traktujemy w dalszym ciągu jako sterowanie u , którego maksymalne wartości można wyznaczyć dla dopuszczalnych przeciążeń n_d .

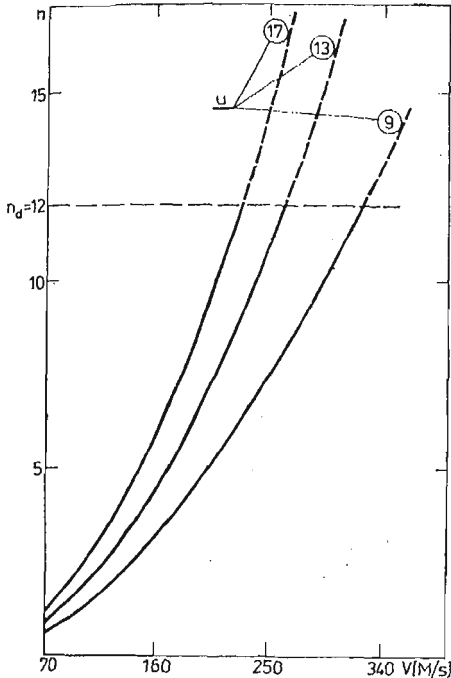
$$u_{max} = \frac{n_d}{n_T + \frac{\lambda}{2g} \cdot C_z^\beta \cdot \bar{\rho} \cdot V^2} \quad (2.2)$$

Przeprowadzone obliczenia przedstawiono na wykresach (rysunki 5, 6, 7). I tak, na rysunku 5 widzimy, jak dla założonego sterowania zmieniają się przeciążenia dopuszczalne w funkcji prędkości, przy czym punktami zaznaczono prędkości dopuszczalne dla przeciążeń 3, 6, 9, 15.

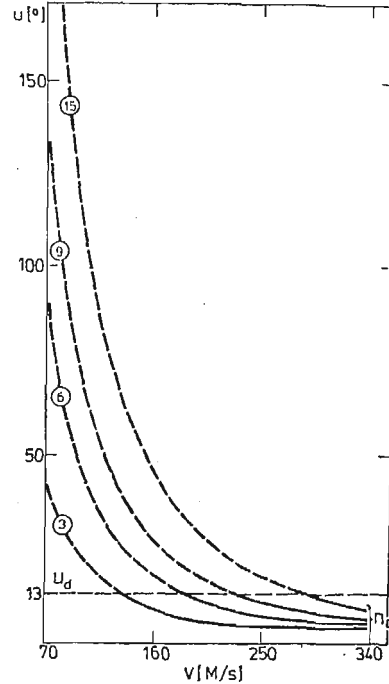


Rys. 5. Zmiana przeciążenia w funkcji prędkości lotu

Na rysunku 6 przedstawiono zmianę n w funkcji prędkości dla kilku wybranych kątów wychylenia sterów — 9° , 13° , 17° , na wykresie 7 natomiast pokazano jak zmienia się dopuszczalne sterowania w funkcji prędkości, dla założonych różnych przeciążeń.



Rys. 6. Zmiana przeciążeń normalnych w funkcji prędkości lotu dla różnych dopuszczalnych wychyleń sterów



Rys. 7. Zakresy prędkości sterowania: dopuszczalnym wychyleniem steru, u_d , dopuszczalnym przeciążeniem $n_d = 3, 6, 9, 15$

3. Wnioski

Przedstawiony minimalno-czasowy program sterowania lotem oraz konsekwencje wpływające z istniejących ograniczeń dotyczy rakiety o zmiennej prędkości. Niewątpliwie, większej rangi nabiera program wprowadzenia w pole sterowania (obserwacji) rakiety o większych wymiarach, jako że dla tego typu rakiety częściej występuje rozdzielenie wyrzutni i punktu naprowadzania, jak również większe prędkości rakiety i celu, a co się z tym wiąże, większe zakresy prędkości kątowej linii obserwacji.

Zwiększenie sterowania rakiety zwiększa jej manewrowość, która wspólnie z dużymi prędkościami kątowymi linii obserwacji powoduje występowanie dużych przeciążeń. Przy czym, wielkość sterowania nie wpływa zasadniczo na promień krzywizny toru lotu rakiety, a tylko na punkt przełączania programu, a tym samym na położenie toru lotu. Jest więc ściśle związana z optymalizacją minimalno-czasową programu.

Zmianę przeciążeń dopuszczalnych w wyniku narastającej prędkości przedstawiają rysunki. Im większe sterowanie, tym wcześniej wchodzi się w zakres prędkości, dla których gwałtownie rosną przeciążenia.

Należy również zaznaczyć, co widać na rys. 7, że mała wielkość sterowania nie zawsze gwarantuje zachowanie dopuszczalnych przeciążeń w całym zakresie prędkości. W związku z tym należałoby się zastanowić nad programową zmianą sterowania, która by w zakresie większych prędkości ograniczała występowanie przeciążeń większych od dopuszczalnych.

Problemy te, mimo istniejących rozwiązań praktycznych nie doczekały się dokładnych opracowań teoretycznych.

Literatura

1. S. DUBIEL, W. PŁECHA, *Analiza geometryczna toru lotu w programowym prowadzeniu rakiety w pole sterowania wiązką*, Biul. WAT 7/85.
2. S. DUBIEL, W. PŁECHA, K. SUKRDYK, *Optymalny program wprowadzenia rakiety w pole sterowania wiązką wyznaczony zasadą max Pontriagina*, Biul. WAT 11/82.

Резюме

МИНИМАЛЬНО-ВРЕМЕННАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ

Работа представляет метод определения оптимальной программы для минимума времени введения ракеты в область управления. Решение приведено для двух родов допустимых условий: 1 допустимый угол отклонения руля, 2 допустимая нормальная перегрузка.

Summary

MINIMUM-TIME PROGRAM FOR CONTROL FLIGHT WITH VARIABLE VELOCITY

In the paper a method is presented for the determination of the optimal minimal-time control program to introduce a rocket into the control field.

The solution is given in the case of two limiting conditions:

- 1) admissible angle of control vane;
- 2) admissible normal forces in the flight.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 marca 1986 roku.