MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 25, 1987

MODEL MATEMATYCZNY WYZNACZANIA FUNKCJI STEROWANIA SAMOLOTEM W PĘTLI

WOJCIECH BLAJER
JAN PARCZEWSKI

Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu

Modelowano programowy ruch samolotu w pętli. Postulowano by środek masy samolotu opisywał podczas ruchu okrąg o stałym promieniu. Przedstawiono model matematyczny wyznaczania funkcji sterowania sterem wysokości zapewniającej ścisłą realizację nałożonego warunku więzu programowego. Samolot potraktowano jako sztywny obiekt latający ze sztywnymi układami sterowania.

1. Wstęp

Typowym zagadnieniem symulacji nieustalonych ruchów samolotu jest badanie odpowiedzi zamodelowanego układu na narzucony model sterowania [1, 7, 8]. Warunkiem symulacji danego manewru czy figury akrobacji lotniczej jest jednakże przyjęcie odpowiedniego modelu sterowania. Najczęściej jednak znane są tylko ogólne zasady sterowania przy wykonywaniu poszczególnych manewrów, ścisłe wartości parametrów sterowania oraz ich przebiegi czasowe mogą być trudne do ustalenia. Geometria symulowanego ruchu zależeć może natomiast silnie od niedużych zmian w modelu sterowania.

W pracy podjęto aspekt zagadnienia odwrotnego. Nakładając na ruch samolotu odpowiednie warunki (więzy programowe [2, 3, 5]) poszukiwać można takiej funkcji sterowania, która zapewni realizację założonego ruchu programowego. Ograniczono się do modelowania programowego ruchu samolotu w pętli. Jako więz programowy przyjęto warunek pozostawania środka masy samolotu na okręgu o zadanym promieniu, zawartym w płaszczyźnie pionowej względem ziemi.

Samolot traktowano jako sztywny obiekt latający o trzech stopniach swobody (tylko ruchy symetryczne). Sterowanie samolotem realizowano poprzez zmianę ciągu silnika oraz zmiany wychyleń steru wysokości. Przyjęto przy tym, że wychylenia steru mają parametryczny wpływ jedynie na wartość aerodynamicznego momentu pochylającego.

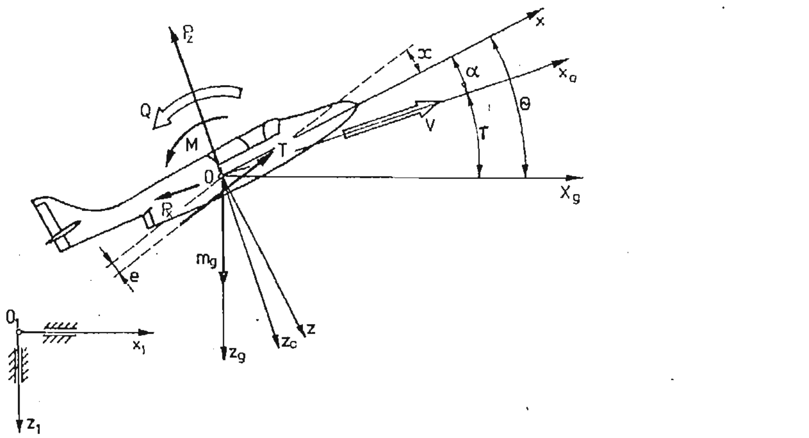
Ze względu na istotne uproszczenia w formułowaniu zapisu modelu matematycznego rozważanego ruchu programowego, dynamiczne równania ruchu samolotu zapisano w formie [4, 6]:

$$m \cdot \dot{V} = -P_x + T \cdot \cos(\alpha + \chi) - m \cdot g \cdot \sin\gamma, \tag{1}$$

$$m \cdot V \cdot \dot{\gamma} = P_z + T \cdot \sin(\alpha + \chi) - m \cdot g \cdot \cos\gamma, \tag{2}$$

$$J\dot{Q} = M + T \cdot e, \tag{3}$$

gdzie: m — masa samolotu, J — moment bezwładności, V — prędkość samolotu, γ — kąt nachylenia wektora prędkości do poziomu, T — ciąg silnika, χ — kąt pomiędzy wektorem ciągu i osią $0x$, e — odległość linii działania wektora ciągu od środka masy, g — przyspieszenie ziemskie, P_x, P_z, M — siła oporu aerodynamicznego, siła nośna i aerodynamiczny moment pochylający, α — kąt natarcia samolotu, Q — prędkość pochylania samolotu.



Rys. 1 Stosowane układy odniesienia: $0_1 x_1 z_1$ — układ inercjalny o osi $0_1 z_1$ pionowej, $0xz$ — układ własny samolotu, $0x_a z_a$ — układ aerodynamiczny o osi $0x$ skierowanej wzdłuż kierunku wektora prędkości całkowitej, $0x_g z_g$ — układ grawitacyjny, równoległy w każdej chwili do układu $0_1 x_1 z_1$

Równania (1)÷(3) uzupełniają związki kinematyczne

$$\dot{x}_1 = V \cdot \cos\gamma, \tag{4}$$

$$\dot{z}_1 = -V \cdot \sin\gamma, \tag{5}$$

$$\dot{\Theta} = Q \tag{6}$$

oraz zależność pomocnicza (rys. 1)

$$\alpha = \Theta - \gamma, \tag{7}$$

gdzie: x_1, z_1 — współrzędne środka masy samolotu w inercjalnym układzie odniesienia $0_1 x_1 z_1$, Θ — kąt pochylenia samolotu.

Występujące w równaniach ruchu siła oporu, nośna oraz aerodynamiczny moment pochylający są ogólnie znanymi zależnościami:

$$P_x = \frac{1}{2}\varrho S V^2 c_x, \quad P_z = \frac{1}{2}\varrho S V^2 c_z, \quad M = \frac{1}{2}\varrho S V^2 c_a c_m,$$

gdzie: ϱ — gęstość powietrza, S — powierzchnia nośna, c_x, c_z, c_m — współczynniki siły oporu, siły nośnej i momentu pochylającego, c_a — średnia cięciwa aerodynamiczna.

W pracy przyjęto prosty model oddziaływań aerodynamicznych. Założono, że współczynniki siły nośnej i oporu aerodynamicznego zależą tylko od wartości kąta natarcia, natomiast współczynnik momentu pochylającego przyjęto jako zależny od kąta natarcia, kątowej prędkości pochylania i kąta wychylenia steru wysokości. Dodatkowo zależność $c_z(\alpha)$ potraktowano jako liniową.

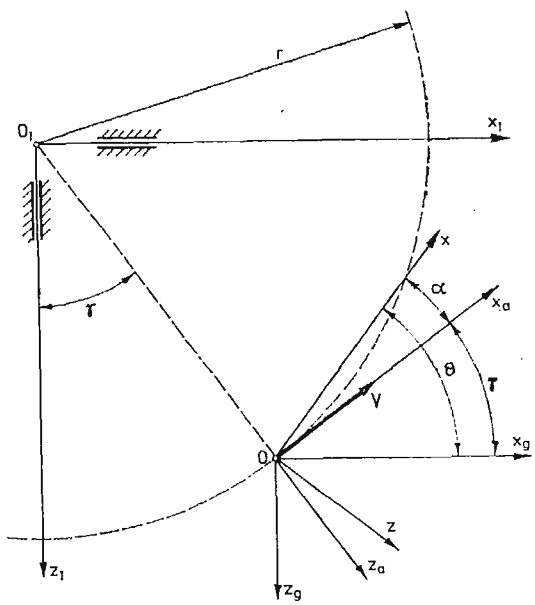
$$c_x = c_x(\alpha), \quad c_z = a\cdot\alpha, \quad c_m = c_m(\alpha, Q, \delta_H), \tag{8}$$

gdzie δ_H — wychylenie steru wysokości. Dla zmniejszenia skomplikowania zapisu dalszych wyprowadzeń przyjęto też, że wartość gęstości powietrza jest ustalona, ϱ = const.

2. Sformułowanie zagadnienia

Postulat ażeby w każdej chwili lotu środek masy samolotu 0 znajdował się na okręgu pętli o zadanym promieniu r równoważny jest z nałożeniem na ruch układu więzu programowego o postaci

$$f = \frac{1}{2}(x_1^2+z_1^2)-\frac{1}{2}r^2 = 0. \tag{9}$$



Rys. 2 Geometryczna ilustracja nałożonego więzu programowego

Jeżeli w chwili początkowej układ spełnia więz, tzn

$$f(x_{10}, z_{10}) = 0, \tag{10}$$

to warunek (9) równoważny jest jego formie różniczkowej [2, 3] $\dot{f} = x_1\dot{x}_1+z_1\dot{z}_1 = 0$, która po uwzględnieniu (4) i (5) może być zapisana jako

$$\dot{f}^* = V(x_1\cos\gamma - z_1\sin\gamma) = 0. \tag{11}$$

Podobnie jak poprzednio, żądając ażeby w chwili początkowej spełniony był warunek (11), czyli

$$f^*(x_{10}, z_{10}, V_0, \gamma_0) = 0, \tag{12}$$

w dowolnej chwili czasu spełniony będzie warunek (11), gdy w każdej chwili czasu spełniany będzie warunek $\ddot{f}^* = 0$. Stosując analogiczne podstawienia i wykorzystując zależności z rys. 2, równanie to można sprowadzić do postaci

$$\ddot{f}^* = V^2 - \dot{\gamma} \cdot r \cdot V = 0. \tag{13}$$

Przekształcony warunek więzu (13) interpretować należy następująco. Jeżeli w chwili początkowej stan układu spełnia warunki (10) i (12), to spełnianie przez ruch samolotu warunku (13) jest równoważne z realizacją więzu w postaci (9). Z drugiej strony, jeśli ruch samolotu ma być zgodny z nałożonym więzem (9), zmiana kąta γ związana jest równaniem (13). Odrzucając przypadek zerowej prędkości lotu, postulowanie realizacji rozważanego ruchu programowego jest równoważne warunkowi

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{r}. \tag{14}$$

Jeżeli w każdej chwili rozważanego ruchu programowego spełniona ma być zależność (14), z równania (2) wynika, że spełniony musi być warunek

$$\frac{m \cdot V^2}{r} - \frac{1}{2} \varrho S V^2 c_z - T \cdot \sin(\alpha + x) + m \cdot g \cdot \cos\gamma = 0. \tag{15}$$

Równanie powyższe wyraża sobą warunek równoważenia się wszystkich sił czynnych i bezwładności na kierunku promieniowym. Oczywistym jest, że realizacja tego warunku implikuje stałą wartość promienia pętli, a spełnienie dodatkowo warunków (10) i (12), wykonywanie przez samolot konkretnie narzuconej pętli.

Reasumując, z punktu widzenia realizacji ruchu programowego opisanego równaniem więzu (9), model sterowania samolotem winien być dobrany tak, ażeby odpowiedź układu opisanego równaniami różniczkowymi:

$$\dot{V} = \frac{1}{m}\left(-\frac{1}{2} \varrho S V^2 c_x + T \cdot \cos(\alpha + x) - m \cdot g \cdot \sin\gamma\right), \tag{16}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{r}, \tag{17}$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{J}\left(\frac{1}{2} \varrho S V^2 c_a c_m + T \cdot e\right), \tag{18}$$

uzupełnionymi związkami (4)÷(6) oraz dodatkowo (7), w każdej chwili ruchu spełniała warunek (15). Wartości początkowe składowych wektora stanu tak określonego układu równań różniczkowych muszą przy tym być dobrane tak, ażeby spełnione były równania (10) i (12).

3. Modele sterowania samolotem w pętli

W rozważanym przykładzie ruchu programowego sterowanie samolotem realizowano poprzez zmiany wychylenia steru wysokości δ_H oraz poprzez zmiany wartości ciągu silnika T. Model zmian tych parametrów dobrany musi być przy tym tak, ażeby w każdej chwili zachodził warunek (15). Przy uwzględnieniu poprzednich założeń o stałej wartości ϱ, zależności c_z tylko od kąta α oraz biorąc pod uwagę zależność (7), równanie (15) jest ogólną zależnością typu

$$w(V, \gamma, \Theta, T) = 0. \tag{19}$$

Równanie powyższe zależy więc jawnie tylko od jednego parametru sterowania — ciągu silnika T. Zadanie sterowania w zadanym ruchu programowym rozwiązane mogłoby być następująco. Przy dowolnie dobranej (z punktu widzenia realizacji więzu (9)) funkcji zmian wychyleń steru wysokości δ_H, zmiany wartości ciągu silnika można wyznaczać bezpośrednio z równania (15) w zależności od aktualnych wartości V, γ i Θ. Inaczej mówiąc, wyliczoną z równań (15) funkcję

$$T = T(V, \gamma, \Theta) \tag{20}$$

wystarczy podstawić do prawych stron równań (16) i (18). Niezależnie od modelu sterowania sterem wysokości, odpowiedź rozważanego układu równań różniczkowych (16)$\div$(18) i (4)$\div$(6) realizować będzie wówczas narzucony ruch programowy. W każdej chwili bowiem realizowany będzie warunek (15).

Chociaż przedstawiony powyżej model sterowania polegający na nałożeniu warunków od więzu programowego na funkcję sterowania ciągiem silnika jest poprawny od strony teoretycznej, w praktyce realizacja takiego modelu sterowania może okazać się niefizyczna. Sterowanie w pętli realizowane jest bowiem głównie poprzez zmiany wartości wychylenia steru wysokości [1]. Zmiany ciągu silnika dokonywane są zwykle dla zapewnienia odpowiedniej prędkości lotu, a pętla wykonana może również być przy stałej wartości ciągu. O wiele ciekawszym zagadnieniem wydaje się więc narzucenie (niezależnie od warunków więzu programowego) pewnego modelu zmian ciągu silnika i poszukiwanie modelu zmian δ_H zapewniającego realizację programu ruchu.

Formalnie warunek (15) nie zależy jawnie od δ_H. Aktualne wartości V, γ i Θ zależą jednak od przebiegu zmian tego parametru sterowania. Wartość kąta wychylenia steru wysokości wpływa bowiem poprzez współczynnik momentu pochylającego c_m (wzory (8)) na zmiany wartości kątowej prędkości pochylania Q. Co za tym idzie, funkcja zmian δ_H decyduje o aktualnych wartościach kąta natarcia α, a więc pośrednio wpływa na przebiegi czasowe wszystkich elementów wektora stanu odpowiedniego układu równań różniczkowych. Poniżej przedstawiono sposób wyznaczenia funkcji zmian δ_H zapewniającej ścisłą realizację rozważanego ruchu programowego. Dla skrócenia zapisu, w dalszej części pracy przyjmowano przy tym stałą wartość ciągu silnika $T = \text{const}$.

Różniczkując po czasie warunek (15) otrzymamy:

$$\frac{2mV\dot{V}}{r} - \varrho SV\dot{V}a\alpha - \frac{1}{2}\varrho SV^2 a\dot{\alpha} - T\dot{\alpha}\cos(\alpha+\chi) - mg\dot{\gamma}\sin\gamma = 0. \tag{21}$$

Jeśli w równaniu powyższym V i γ zastąpimy zależnościami (16) i (17), natomiast zgodnie z (7) oraz (6) i (17), $\dot{\alpha}$ przedstawimy jako

$$\dot{\alpha} = \dot{\Theta} - \dot{\gamma} = Q - \frac{V}{r}, \tag{22}$$

przekształci się ono do równania o następującej ogólnej formie

$$\dot{w}(V, Q, \gamma, \Theta) = 0. \tag{23}$$

Poddając kolejnemu różniczkowaniu po czasie równanie (21) otrzymamy

$$\begin{gathered}\frac{2 \cdot m}{r}(\dot{V}^2 + V\ddot{V}) - \varrho S(\dot{V}^2 + V\ddot{V})a\alpha - 2\varrho SV\dot{V}a\dot{\alpha} - \frac{1}{2}\varrho SV^2 a\ddot{\alpha} + \\ -T\ddot{\alpha}\cos(\alpha+\chi) + T\dot{\alpha}^2\sin(\alpha+\chi) - mg\ddot{\gamma}\sin\gamma - mg\dot{\gamma}^2\cos\gamma = 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Jeśli zapewnimy, że w chwili początkowej t_0 spełnione będą związki (15) i (21), czyli

$$w(V_0, \gamma_0, \Theta_0) = 0 \tag{25}$$

oraz

$$\dot{w}(V_0, Q_0, \gamma_0, \Theta_0) = 0,$$

to realizacja w każdej chwili ruchu warunku (24) zapewniać będzie, że warunek (15) będzie zachowany.

Równanie (24) interpretować można jako warunek nakładany m.in. na drugą pochodną kąta natarcia α. Jeżeli z równań (16) i (17) wyznaczymy $\ddot{V}$ i $\ddot{\gamma}$ jako:

$$\ddot{V} = \frac{1}{m}\left(-\varrho SV\dot{V}c_x - \frac{1}{2}\varrho SV^2\frac{dc_x}{d\alpha}\dot{\alpha} - T\dot{\alpha}\sin(\alpha+\chi) + mg\dot{\gamma}\cos\gamma\right), \tag{26}$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{\dot{V}}{r} \tag{27}$$

oraz uwzględnimy zależności na $\dot{V}$, $\dot{\gamma}$ i $\dot{\alpha}$ identyczne jak przy przejściu od wzoru (21) do jego postaci (23), druga pochodna kąta natarcia α otrzymana z równania (24) będzie funkcją

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(V, Q, \gamma, \Theta). \tag{28}$$

Z drugiej strony z zależności (22) wynika, że

$$\dot{Q} = \ddot{\alpha} + \frac{\dot{V}}{r}. \tag{29}$$

Równanie powyższe traktować można jako tożsame z równaniem (18) równań ruchu. Postulowanie realizacji więzu (9), którego równanie przekształcono przy odpowiednich założeniach do postaci (24), implikuje ścisłą zależność na $\ddot{\alpha}$ zgodnie z (28). Wynika stąd, że jeżeli w równaniach ruchu równanie (18) zastąpimy tak określonym równaniem (29), ruch opisany tymi równaniami realizować będzie założony program. Wartości początkowe $V_0, \gamma_0, Q_0, x_{10}, z_{10}$ i Θ_0 muszą być dobrane przy tym tak, by spełnione były warunki (10), (12) i (25).

Tożsamość równań (18) i (29) możliwa będzie wówczas, gdy model sterowania zmianami wychyleń steru wysokości dobrany będzie tak, że w każdej chwili lotu prawe strony równań będą sobie równe, czyli

$$\frac{1}{J}\left(\frac{1}{2}\varrho SV^2 c_a c_m(\alpha, Q, \delta_H) + Te\right) = \ddot{\alpha} + \frac{\dot{V}}{r}. \tag{30}$$

Z równania tego w każdej chwili wyznaczyć można aktualną wartość wychylenia steru wysokości. Tak wyznaczona funkcja $\delta_H(t)$ będzie poszukiwanym modelem sterowania sterem wysokości w narzuconym ruchu programowym.

4. Uwagi końcowe

Jak wynika z przedstawionej pracy, warunek realizacji więzu programowego narzuca odpowiednie ograniczenie na model sterowania zamodelowanym samolotem. W przypadku jednego więzu determinowane są przy tym przebiegi tylko jednego z niezależnych parametrów sterowania. W danym przypadku są to odpowiednio warunki (20) i (30), w zależności od tego, który z parametrów sterowania obrano jako przyjęty arbitralnie. Przyjęty a priori model sterowania jednym z parametrów sterowania ma oczywiście wpływ na model sterowania drugim parametrem wyznaczanym z warunków więzów. Ten ostatni „dopasowuje" jakby odpowiedź układu tak, by w każdej chwili realizowany był więz (9). Podobnie, wyznaczany model sterowania zależny jest od wartości początkowych stanu lotu. Spełniać one muszą przy tym odpowiednie warunki (10), (12) i (25).

Przy wyznaczaniu modelu sterowania δ_H założono $T = \text{const}$. Przyjęcie dowolnej innej funkcji zmian ciągu silnika podczas ruchu spowoduje, że w równaniach (21) i (24) pojawią się człony z pierwszymi i drugimi pochodnymi po czasie wartości ciągu T. Przyjęta arbitralnie funkcja zmian T musi być więc odpowiedniej klasy.

W rozważonym przypadku ruchu sterowanego poprzez zmiany dwu niezależnych parametrów sterowania, ilość nałożonych na ruch układu więzów programowych nie może być większa niż dwa. W ogólnym przypadku ilość więzów programowych nie może przekroczyć ilości niezależnych kanałów sterowania. Jest to oczywiście tylko warunek konieczny realizowalności sterowania w ruchu programowym.

Literatura

1. W. Blajer, J. Maryniak, *Modelowanie matematyczne sterowanego ruchu samolotu w pętli*, zb. ref. XXIV Symp. „Modelowanie w Mechanice", Gliwice — Szczyrk 1985.
2. Do Sanh, *On the Equations of Motion of a Controlled Mechanical System*, Zag. Drgań Niel., 21, 1983.
3. Do Sanh, *On the Motion of Controlled Mechanical Systems*, Успехи Механики, 2, 7, 1984.
4. Z. Dżygadło, K. Sibilski, *Wpływ zrzutu ładunku na dynamikę ruchu samolotu*, zb. ref. XXIV Symp. „Modelowanie w Mechanice", Gliwice — Szczyrk 1985.
5. R. Gutowski, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
6. W. Fiszdon, *Mechanika lotu*, cz. *I i II*, PWN, Warszawa 1961.
7. J. Maryniak, W. Blajer, *Numeryczna symulacja korkociągu samolotu*, Mech. Teoret. i Stos., 2/3, 21 1983.
8. Z. Paturski, M. Złocka, *Symulacja numeryczna sterowanego ruchu samolotu*, zb. ref. XXIV Symp. „Modelowanie w Mechanice", Gliwice — Szczyrk 1985.

Резюме

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЁТОМ В ПЕТЛЕ

Моделируется управляемое движение самолёта в петле. Поставлено требование, чтобы центр тяжести самолёта выполнял вертикальную петлю постоянного радиуса. Представлена математическая модель определения функции управления рулём высоты, обеспечивающей реализацию принятой программой связи. Самолёт смоделирован как жёсткий летающий объект с жёсткими рулями управления.

Summary

A MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINING THE FUNCTION OF AIRPLANE CONTROL IN LOOP

An airplane programed motion in loop has been studied. The airplane center of gravity has been postulated to perform a vertical loop as an ideal circle. A mathematical model for finding such a function of horizontal tail controlling that the motion be compliant with the program constraint is presented. The airplane was modelled as a rigid body with rigid flying controls.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 lutego 1986 roku.