MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 25, (1987)

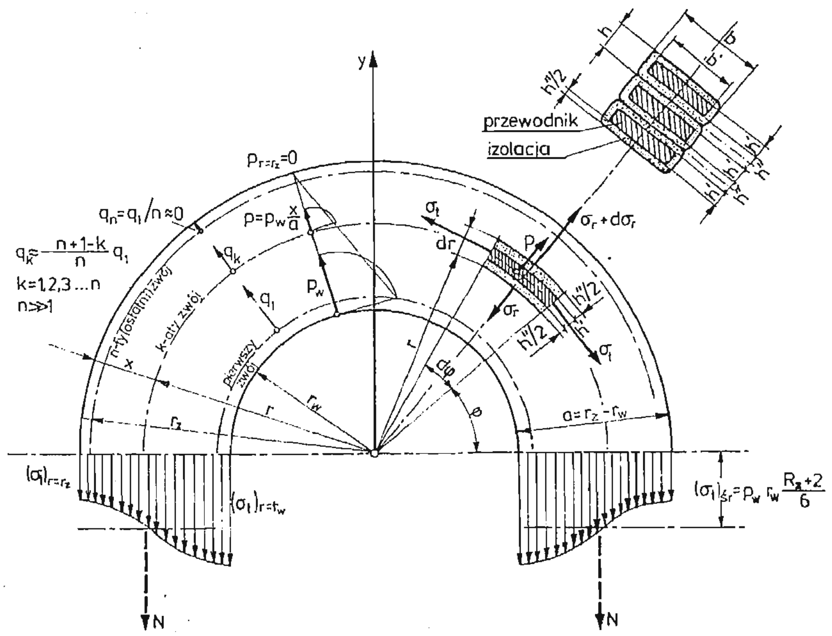
OKREŚLENIE NAPRĘŻEŃ W CEWCE TRANSFORMATORA ROZCIĄGANEJ NA SKUTEK DZIAŁANIA PROMIENIOWYCH SIŁ ELEKTRODYNAMICZNYCH

TADEUSZ GAŁKIEWICZ

Politechnika Łódzka

Wprowadzenie

W pracy wyprowadzone zostały wzory na naprężenia występujące w cewce transformatora narażonej na działanie elektrodynamicznych odśrodkowo skierowanych sił zwarciowych. Wzory podane zostały w wielkościach bezwymiarowych dzięki czemu poszczególne rozwiązania dotyczą nie jednej cewki lecz pewnej grupy cewek. Oryginalnością pracy jest potraktowanie cewki jako jednolitej ortotropowej tarczy pierścieniowej obciążonej siłami objętościowymi zmieniającymi się wg trójkąta (rys. 1).



Rys. 1.

1. Wstęp

Uzwojenie transformatora składa się z szeregu ułożonych na sobie współosiowo cewek. W celu zwiększenia intensywności chłodzenia transformatora kolejne cewki tworzące uzwojenie podzielone są międzycewkowymi wstawkami dystansowymi. Uzwojenia dużych transformatorów sprasowane są w kierunku osiowym specjalnymi śrubami osadzonymi w jarzmach rdzenia. W transformatorze są dwa rodzaje uzwojeń, uzwojenia wewnętrzne i zewnętrzne. Cewki tych uzwojeń powinny być tak zaprojektowane aby siły występujące w czasie ewentualnego elektrycznego zwarcia nie powodowały uszkodzeń zwojów. W czasie zwarcia transformatora cewki obciążone są siłami elektrodynamicznymi działającymi na uzwojenie w kierunkach promieniowych i osiowym. Uzwojenia wewnętrzne obciążone są promieniowymi siłami dośrodkowymi, natomiast uzwojenie zewnętrzne — siłami odśrodkowymi.

W niniejszej pracy analizie wytrzymałościowej poddane zostały cewki uzwojeń zewnętrznych tzn. cewki, w których siły dynamiczne działając odśrodkowo powodują rozciąganie zwojów. Analizowano cewki utworzone ze ściśle nawiniętych na siebie zwojów. Przyjęto, że przekrój poprzeczny przewodnika, z którego wykonane jest uzwojenie ma kształt prostokąta o wymiarach $b' \times h'$. Przewodnik owinięty jest izolacją o grubości $h''/2$, czyli grubość izolacji między kolejnymi przylegającymi do siebie zwojami drutów cewki wynosi h'', natomiast grubość zwoju $h = h' + h''$. W rozważaniach nie uwzględniono występowania naprężeń montażowych wynikających z wstępnego napięcia przewodu i z zakrzywienia przewodu przy nawijaniu cewki.

Wprowadzono oznaczenia:

		w wielkościach bezwymiarowych
r_w	— promień wewnętrzny cewki	$R_w = r_w/r_w = 1$
r_z	— promień zewnętrzny cewki	$R_z = r_z/r_w$
r, φ	— współrzędne określające położenie punktu cewki	$R = r/r_w$
u	— przemieszczenie promieniowe punktu cewki	$U = u/r_w$
a	— grubość cewki (rys. 1) $a = r_z - r_w$	$a/r_w = R_z - 1$
b'	— szerokość przekroju poprzecznego przewodnika (szerokość drutu)	
b	— wysokość cewki	
h'	— grubość przewodnika (grubość drutu)	
$h''/2$	— grubość izolacji przewodnika	
h''	— grubość izolacji między drutami kolejnych zwojów cewki	
h	— grubość przewodu (grubość zwoju) $h = h' + h''$	
H	— względna grubość zwoju odniesiona do grubości drutu h'	$H = h/h' = 1 + h''/h'$
n	— liczba zwojów cewce	ν' — liczba Poissona drutu
E'	— moduł Younga drutu	ν'' — liczba Poissona izolacji (papieru: przyjęto $\nu'' = 0$)
E''	— moduł Younga izolacji	

E_t — moduł sprężystości cewki jako całości — w kierunku obwodowym
E_r — moduł sprężystości cewki jako całości — w kierunku promieniowym
ν_t, ν_r — odpowiednie liczby Poissona cewki — jako tarczy ortotropowej.

Cewkę potraktowano jako ortotropową tarczę pierścieniową, dla której to tarczy określono (w punkcie 2 niniejszej pracy) zastępcze stałe sprężystości w kierunku obwodowym i promieniowym. Każdej jednostce objętości cewki przyporządkowano pewną elektrodynamiczną siłę promieniową p. Siłę tę działającą na jednostkę objętości znajdującą się tuż przy wewnętrznej powierzchni cewki oznaczono przez p_w — czyli $p_w = p_{r=r_w}$.

Siłę elektrodynamiczną przypadającą na jednostkę długości pierwszego od środka zwoju oznaczono przez q_1. Przy dużej liczbie zwojów w cewce można przyjąć, że związek między p_w, q_1, b' i h jest następujący:

$$p_w \approx q_1/(b'h) \tag{1}$$

gdzie: b' — jest to wysokość pracująca cewki (szerokość przewodnika)
h — grubość zwoju

Przy obliczaniu cewek transformatorowych zakłada się istnienie liniowego rozkładu sił promieniowych. W cewce zewnętrznej największa odśrodkowa siła elektrodynamiczna występuje w pierwszym (wewnętrznym) zwoju. Siła ta maleje na grubości cewki wg trójkąta osiągając w ostatnim (n-tym, zewnętrznym) zwoju wartość bliską zeru. Zgodnie z rys. 1 i wzorem (1) można przyjąć, że:

$$p = p_w \frac{x}{a} = p_w \frac{r_z - r}{r_z - r_w} = p_w \frac{R_z - R}{R_z - 1} \approx \frac{q_1}{b'h} \frac{R_z - R}{R_z - 1} = \frac{q_1 r_w}{ab'h} (R_z - R), \tag{2}$$

gdzie: $R = r/r_w$, $R_z = r_z/r_w$.
W rzeczywistej cewce transformatorowej liczba zwojów $n \gg 1$, więc obciążenie k-tego (licząc od środka cewki) zwoju

$$q_k \approx \frac{n+1-k}{n} q_1, \quad p_k = \frac{q_k}{b'h} \approx \frac{n+1-k}{b'hn} q_1, \tag{3}$$

gdzie: $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Siła dynamiczna odśrodkowa działająca na element o wymiarach $rd\varphi \times dr \times b'$ (rys. 1) wynosi $dP = prd\varphi drb'$, gdzie jednostkowa siła objętościowa p określona jest wzorem (2). Z sumy rzutów sił na oś y (rys. 1) wynika, że siła normalna w przekroju poprzecznym cewki

$$N = \frac{1}{2} \iint dP \sin\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \int_{r_w}^{r_z} pr\, d\varphi\, dr b' \sin\varphi =$$

$$= \frac{b'}{2} \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_a^0 p_w \frac{x}{a} (r_z - x)(-dx) = p_w r_w \frac{ab'}{6} (R_z + 2) =$$

$$= \frac{q_1 r_w^2}{6h} (R_z - 1)(R_z + 2) = q_1 r_w \frac{a}{6h} (R_z + 2) \tag{4}$$

Średnie naprężenia obwodowe w cewce wynosi:

$$(\sigma_t)_{śr} = \frac{N}{ab'} = \frac{p_w r_w}{6}(R_z+2) \tag{5a}$$

a w wielkościach bezwymiarowych:

$$(\sigma_t^*)_{śr} = \frac{(\sigma_t)_{śr}}{p_w r_w} = \frac{R_z+2}{6}. \tag{5b}$$

Jeżeli przyjąć, że siłę normalną N w przekroju cewki przenoszą wyłącznie druty bez pomocy izolacji — to średnie naprężenie rozciągające w drutach cewki

$$(\sigma_t')_{śr} = (\sigma_t)_{śr} H = p_w r_w \frac{H}{6}(R_z+2) = \frac{q_1 r_w}{b'h'}\,\frac{R_z+2}{6} = \frac{q_1 r_w}{b'h'}(\sigma_t^*)_{śr} \tag{6}$$

gdzie: $H = h/h'$.

2. Określenie zastępczych stałych sprężystości

W celu określenia zastępczych stałych sprężystości analizowanej tarczy (wykazującej cechy ortotropii konstrukcyjnej) uwzględniono, że jednostka długości zwoju pod wpływem jednokierunkowego rozciągania średnimi naprężeniami σ_t wydłuży się tyle co jednostka długości drutu poddanego naprężeniom σ_t' — występującym w drucie,

czyli $\varepsilon_t = \varepsilon_t'$, stąd $\sigma_t'/E' = \sigma_t/E_t$, a ponieważ

$$\sigma_t' = \sigma_t h/h' = \sigma_t H, \text{ więc} \tag{7}$$

$$E_t = E'/H. \tag{8}$$

Gdy zwój rozciągany jest jednokierunkowo wzdłuż jego osi wówczas grubość zwoju zmieni się o $\Delta h = -\nu_t \varepsilon_t h$, przy czym grubość drutu dozna zmiany o $\Delta h' = -\nu' \varepsilon_t' h'$. Ponieważ w cewkach $E''/E' \ll 1$, więc przyjęto, że w rozciąganym przewodzie całą siłę przenosi drut bez udziału izolacji — a zatem $\sigma_t'' = 0$ i $\Delta h'' = 0$. Z warunków: $\Delta h = \Delta h' + \Delta h''$, $\varepsilon_t = \varepsilon_t'$ wynika, że:

$$\nu_t = \nu'/H. \tag{9}$$

Jeżeli zwój poddany zostanie jednokierunkowemu poprzecznemu obciążeniu naprężeniami σ_r, to zmiana grubości zwoju wyniesie:

$$\Delta h = \frac{\sigma_r h'}{E'} + \frac{\sigma_r h''}{E''} = \frac{\sigma_r h}{E_r},$$

stąd:

$$E_r = E' \frac{H}{1+(E'/E'')(H-1)}. \tag{10}$$

Zwój obciążony jednokierunkowo w poprzek naprężeniami σ_r doznaje w kierunku obwodowym jednostkowego odkształcenia $\varepsilon_t = -\nu_r \varepsilon_r = -\nu_r \sigma_r / E_r$. Odkształcenie to równe jest odkształceniu drutu, które wynosi $\varepsilon_t \approx -\nu' \sigma_r / E'$ (pominięto tu oddziaływanie izolacji). Po porównaniu ze sobą wzorów na ε_t i po uwzględnieniu związku (10) otrzymano;

$$\nu_r = \nu' \frac{H}{1+(E'/E'')(H-1)}. \tag{11}$$

W modelu obliczeniowym występuje ortotropia konstrukcyjna, więc jak należało oczekiwać obowiązuje następująca zależność:

$$\nu_t/E_t = \nu_r/E_r. \tag{12}$$

3. Rozwiązanie zagadnienia

Cewkę transformatora potraktowano jako tarczę pierścieniową, wykonaną z materiału ortotropowego, obciążoną wyłącznie siłami objętościowymi — p (na obecnym etapie rozważań nie uwzględniono sił tarcia występujących na powierzchniach styku cewki z wstawkami dystansowymi).

Z sumy rzutów sił działających na element tarczy o wymiarach $rd\varphi \times dr \times b'$ wynika ogólnie znane równanie różniczkowe:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_t) = -p, \quad \text{albo} \quad \frac{d}{d_r}(r\sigma_r) - \sigma_t = -pr, \tag{13}$$

gdzie:

σ_r — są to naprężenia promieniowe w cewce,

σ_t — naprężenia obwodowe w modelu zastępczym cewki,

(należy pamiętać, że naprężenie w drucie w kierunku osi drutu wynosi $\sigma_t' = \sigma_t h/h' = \sigma_t H$).

Po wykorzystaniu wzoru (2) otrzymano

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_t) + p_w \frac{r_z - r}{r_z - r_w} = 0. \tag{14}$$

Jest to różniczkowe równanie równowagi wyrażone w naprężeniach chcąc wyrazić je przez przemieszczenia należy uwzględnić, że

$$\sigma_r = \frac{E_r}{1-\nu_r\nu_t}(\varepsilon_r + \nu_t\varepsilon_t), \quad \sigma_t = \frac{E_t}{1-\nu_r\nu_t}(\varepsilon_t + \nu_r\varepsilon_r), \tag{15}$$

gdzie:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dt}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}. \tag{16}$$

Po wprowadzeniu następujących wielkości bezwymiarowych:

$$U = \frac{u}{r_w}, \quad R = \frac{r}{r_w}, \quad R_w = R_{r=r_w} = 1, \quad R_z = R_{r=r_z} = \frac{r_z}{r_w}, \tag{17}$$

$$E_* = \frac{E_t}{E_r} = \frac{1}{H^2}\left[1 + \frac{E'}{E''}(H-1)\right], \quad \alpha = \sqrt{E_*} \tag{18}$$

$$p_* = \frac{p_w r_w}{R_z - 1}\,\frac{1-\nu_r\nu_t}{E_r} \tag{19}$$

Otrzymano równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2U}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{dU}{dR} - E_*\frac{U}{R^2} + p_*(R_z - R) = 0 \tag{20}$$

Okazuje się, że postać funkcji U spełniającej powyższe równanie zależy od wartości parametru E_* i tak:

A) gdy $E_* \neq 4$ i $E_* \neq 9$, wówczas

$$U = \frac{u}{r_w} = A_1 R^{\alpha} + A_2 R^{-\alpha} - \frac{p_*}{4 - E_*} R_z R^2 + \frac{p_*}{9 - E_*} R^3 \tag{21'}$$

B) gdy $E_* = 4$

$$U = B_1 R^2 + B_2 R^{-2} + \frac{p_*}{16} R_z R^2 (1 - 4 \ln R) + \frac{p_*}{5} R^3 \tag{21''}$$

C) gdy $E_* = 9$

$$U = C_1 R^3 + C_2 R^{-3} + \frac{p_*}{5} R_z R^2 + \frac{p_*}{36} R^3 (6 \ln R - 1) \tag{21'''}$$

W powyższych wzorach A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 są to stałe całkowania, które wyznacza się w warunkach brzegowych.

Wprowadzono oznaczenia:

$$\sigma_t^* = \sigma_t/(p_w r_w), \qquad \sigma_r^* = \sigma_r/(p_w r_w).$$

Korzystając z zależności (15), (16), (17) bezwymiarowe naprężenia obwodowe σ_t^* wyrazić można przez E_*, R_z i R w sposób następujący

$$\sigma_t^* = \frac{\sigma_t}{p_w r_w} = \frac{E_t}{p_w r_w (1 - \nu_r \nu_t)} \left(\frac{U}{R} + \nu_r \frac{dU}{dR} \right) = \frac{E_*}{R_z - 1} \xi(R). \tag{22}$$

Postać funkcji $\xi(R)$ zależy od parametru E_*

A) gdy $E_* \neq 4$ oraz $E_* \neq 9$ wówczas:

$$\xi(R) = \frac{A_1}{p_*} (1 + \alpha\nu_r) R^{\alpha - 1} + \frac{A_2}{p_*} (1 - \alpha\nu_r) R^{-\alpha - 1} - \frac{1}{4 - E_*} (1 + 2\nu_r) R_z R + \\ + \frac{1}{9 - E_*} (1 + 3\nu_r) R^2 \tag{23'}$$

B) gdy $E_* = 4$ wówczas:

$$\xi(R) = \frac{B_1}{p_*} (1 + 2\nu_r) R + \frac{B_2}{p_*} (1 - 2\nu_r) R^{-3} + \frac{1}{16} [(1 - 2\nu_r) - 4(1 + 2\nu_r) \ln R] R_z R + \\ + \frac{1}{5} (1 + 3\nu_r) R^2 \tag{23''}$$

C) gdy $E_* = 9$ wówczas:

$$\xi(R) = \frac{C_1}{p_*} (1 + 3\nu_r) R^2 + \frac{C_2}{p_*} (1 - 3\nu_r) R^{-4} + \frac{1}{5} (1 + 2\nu_r) R_z R + \\ + \frac{1}{36} [-(1 - 3\nu_r) + (1 + 3\nu_r) 6 \ln R] R^2 \tag{23'''}$$

Bezwymiarowe naprężenia promieniowe σ_r^* wynoszą

$$\sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{p_w r_w} = \frac{E_r}{p_w r_w (1 - \nu_r \nu_t)} \left(\frac{dU}{dR} + \nu_t \frac{U}{R} \right) = \frac{1}{R_z - 1} \psi(R) \tag{24}$$

Postać funkcji $\psi(R)$ zależy od wartości parametru E_*:

A) gdy $E_* \neq 4$ i $E_* \neq 9$ wówczas

$$\psi(R) = \frac{A_1}{p_*}(\alpha+\nu_t)R^{\alpha-1} + \frac{A_2}{p_*}(-\alpha+\nu_t)R^{-\alpha-1} - \frac{1}{4-E_*}(2+\nu_t)R_zR + \\ + \frac{1}{9-E_*}(3+\nu_t)R^2 \tag{25'}$$

B) gdy $E_* = 4$, wówczas

$$\psi(R) = \frac{B_1}{p_*}(2+\nu_t)R + \frac{B_2}{p_*}(-2+\nu_t)R^{-3} + \frac{1}{16}[(-2+\nu_t)-(2+\nu_t)4\ln R]R_zR + \\ + \frac{1}{5}(3+\nu_t)R^2 \tag{25''}$$

C) gdy $E_* = 9$, wówczas

$$\psi(R) = \frac{C_1}{p_*}(3+\nu_t)R^2 + \frac{C_2}{p_*}(-3+\nu_t)R^{-4} + \frac{1}{5}(2+\nu_t)R_zR + \\ + \frac{1}{36}[6(3+\nu_t)\ln R + (3-\nu_t)]R^2 \tag{25'''}$$

4. Określenie stałych całkowania

Dla rozważanych tu cewek transformatorowych przyjęto następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} &(\sigma_r)_{r=r_w} = 0 \text{ — lub w wielkościach bezwymiarowych } (\sigma_r^*)_{R=R_w=1} = 0 \\ &(\sigma_r)_{r=r_z} = 0 \text{ — lub w wielkościach bezwymiarowych } (\sigma_r^*)_{R=R_z} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Po wykorzystaniu tych warunków okazało się, że:

A) gdy $E_* \neq 4$ i $E_* \neq 9$ wówczas:

$$\frac{A_1}{p_*} = \frac{1}{(\alpha+\nu_t)(R_z^{2\alpha}-1)}\left[\frac{2+\nu_t}{4-E_*}(R_z^{\alpha+3}-R_z) - \frac{3+\nu_t}{9-E_*}(R_z^{\alpha+3}-1)\right] \tag{27'}$$

$$\frac{A_2}{p_*} = \frac{1}{(-\alpha+\nu_t)(R_z^{2\alpha}-1)}\left[\frac{2+\nu_t}{4-E_*}(R_z^{2\alpha+1}-R_z^{\alpha+3}) - \frac{3+\nu_t}{9-E_*}(R_z^{2\alpha}-R_z^{\alpha+3})\right]$$

B) gdy $E_* = 4$, wówczas:

$$\frac{B_1}{p_*} = \frac{1}{(2+\nu_t)(R_z^4-1)}\left[\frac{-2+\nu_t}{16}R_z(R_z^4-1) + \frac{2+\nu_t}{4}R_z^2\ln R_z - \frac{3+\nu_t}{5}(R_z^5-1)\right] \tag{27''}$$

$$\frac{B_2}{p_*} = \frac{R_z^4}{(-2+\nu_t)(R_z^4-1)}\left[-\frac{2+\nu_t}{4}R_z\ln R_z + \frac{3+\nu_t}{5}(R_z-1)\right]$$

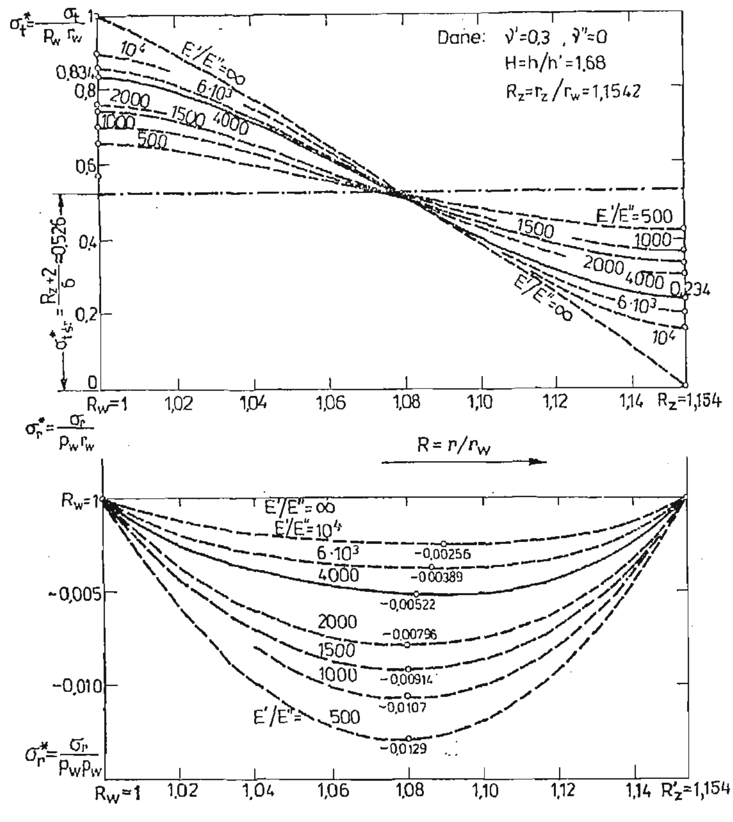
C) gdy $E_* = 9$, wówczas:

$$\frac{C_1}{p_*} = \frac{1}{(3+\nu_t)(R_z^6-1)}\left[-\frac{2+\nu_t}{5}R_z(R_z^5-1) - \frac{3+\nu_t}{6}R_z^6\ln R_z - \frac{3-\nu_t}{36}(R_z^6-1)\right] \tag{27'''}$$

$$\frac{C_2}{p_*} = \frac{R_z^6}{(-3+\nu_t)(R_z^6-1)}\left[-\frac{2+\nu_t}{5}(R_z-1) + \frac{3+\nu_t}{6}\ln R_z\right]$$

5. Określenie rzeczywistych naprężeń występujących w drutach zwojów cewki

Po określeniu stałych całkowania funkcje σ_t^*(22) i σ_r^*(24) przedstawić można w postaci wykresów. Przebieg funkcji zależy od parametrów R_z, H, E_*, ν_r, ν_t, a więc od r_z, r_w, h', h'', E', E'', ν', ν''. Wykresy takie zostały wykonane przykładowo dla cewek, dla których $\nu' = 0{,}3$, $\nu'' = 0$, $H = h/h' = 1{,}68$, $R_z = 1{,}154$, $E'/E'' = 500$, 1000, 1500, 2000, 4000, 6000, 10000, ∞ i przedstawione na rys. 2.



Rys. 2.

Naprężenia wzdłużne w drucie k-tego (licząc od środka cewki) zwoju wynoszą:

$$\sigma'_{tk} = p_w r_w H(\sigma_t^*)_{R=R_k} \approx \frac{q_1 r_w}{b'h'}(\sigma_t^*)_{R=R_k}, \qquad k = 1, 2, 3 \ldots n. \tag{28}$$

w omawianej tu cewce naprężenia obwodowe mają wartość dodatnią co oznacza, że druty są rozciągane.

Naprężenia poprzeczne w drucie k-tego zwoju (w cewce są to naprężenia promieniowe)

$$\sigma_{rk} = p_w r_w (\sigma_r^*)_{R=R_k} \approx \frac{q_1 r_w}{b'h}(\sigma_r^*)_{R=R_k}. \tag{29}$$

Ponieważ sąsiadujące ze sobą zwoje cewki muszą do siebie przylegać, więc powinien być spełniony stale warunek $\sigma_{rk} \leqslant 0$; należy przypomnieć (26), że szczegółowej analizie poddane zostały tu cewki, dla których

$$(\sigma_r^*)_{R=R_w=1} = (\sigma_r^*)_{R=R_z} = 0$$

6. Ustalenie zakresu E* w jakim mogą zmieniać się naprężenia w cewkach

Aby ocenić zakres w jakim mieszczą się naprężenia σ_t i σ_r należy rozpatrzyć dwa skrajne przypadki jakie teoretycznie mogłyby wystąpić: $E_* = 1$ i $E_* = \infty$.

Jeżeli $E_* = 1$ to analizowana tarcza jest tarczą izotropową. Przypadek ten dotyczy „cewek", w których zwoje nie mają izolacji i ściśle do siebie przylegają. Wówczas $h'' = 0$, $H = 1 + h''/h' = 1$, $E_t = E_r = E'$, $\nu_t = \nu_r = \nu'$, $\alpha = \sqrt{E_*} = 1$.

Przypadek $E_* = \infty$ odnosi się do cewek, w których izolacja jest, lecz sztywność na ściskanie izolacji $E'' = 0$.

Powyższe dwa graniczne przypadki w rzeczywistych cewkach transformatorowych nie zdarzają się. Ograniczają one na wykresach $\sigma_t^*(R)$. obszar, w którym mieszczą się rozwiązania dotyczące rzeczywistych cewek.

Osobnego omówienia wymaga przypadek $E_* = \infty$. Zagadnienie to odpowiada przypadkowi cewek, w których przewody cewek mają nieskończenie podatną izolację czyli $E'' = 0$, $\sigma_r = 0$ — więc zwoje nie naciskają na siebie. Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia założono, że kolejne zwoje mają kształt zamkniętych kołowych pierścieni o średnim promieniu k-tego zwoju równym r_k, szerokości b' i grubości h'. (Faktyczne zwoje są spiralne co może być przyczyną ślizgania się kolejnych zwojów po sobie. W rzeczywistych cewkach występują pewne wstępne naciski na izolację, które — z racji istnienia tarcia — utrudniają przesuwanie się przewodów po sobie. Naprężenia w zwoju spiralnym są w przybliżeniu takie jak w zwoju o kształcie pierścienia).

Przy tak uproszczonym modelu cewki (tzn. gdy $E_* = \infty$) problem staje się zagadnieniem statycznie wyznaczalnym i wówczas dla każdego zwoju obowiązują łatwe do wyprowadzenia wzory:

$$q_1 \approx p_w b' h, \quad q_k = q_1 \frac{R_z - R}{R_z - 1}$$

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_t' = \frac{q_k r_k}{b'h'} = \frac{q_1 r_w}{b'h'} \frac{R(R_z - R)}{R_z - 1} \approx p_w r_w H \frac{R(R_z - R)}{R_z - 1} \tag{30}$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_e'}{H} = p_w r_w \frac{R(R_z - R)}{R_z - 1}; \quad \sigma_t^* = \frac{\sigma_t}{p_w r_w} = \frac{R(R_z - R)}{R_z - 1} \tag{31}$$

Ze wzoru powyższego wynika, że dla cewek, dla których $R_z \leqslant 2$ naprężenia rozciągające drut są największe w pierwszym zwoju, naprężenia te wynoszą

$$(\sigma_t)_{max} = (\sigma_t)_{R=1} = p_w r_w, \quad (\sigma_t')_{max} = (\sigma_t)_{max} H = p_w r_w H = \frac{q_1 r_w}{b'h'} \tag{32}$$

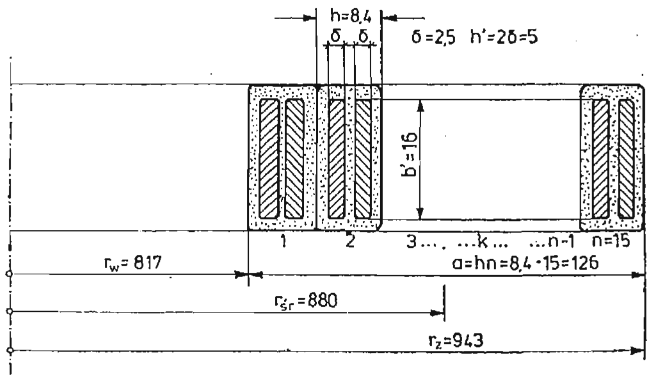
natomiast gdy $R_z > 2$ (czyli $r_z > 2r_w$), wówczas z analizy przebiegu funkcji σ_t (31) okazuje się, że maksymalne naprężenia rozciągające występują nie w pierwszym zwoju cewki lecz w zwoju oddalonym od środka cewki o $R = 0{,}5\, R_z$. W konkretnych przykładach przypadek cewek, dla których $R_z > 2$ — jako cewek w praktyce transformatorowej niespotykanych — nie wymaga analizowania.

7. Przykład liczbowy

Sposób korzystania z otrzymanych wzorów przedstawiony zostanie na konkretnym przykładzie. Określony zostanie stan naprężenia w cewce, dla której:

	w rzeczywistości	w wielkościach bezwymiarowych
promień wewnętrzny	$r_w = 817$ mm	$R_w = r_w/r_w = 1$
promień zewnętrzny	$r_z = 943$ mm	$R_z = r_z/r_w = 943/817 = 1{,}1542$
promień średni	$r_{śr} = (817+943)/2 = 880$ mm	$R_{śr} = r_{śr}/r_w = 1{,}077$

Cewka wykonana jest z przewodu bliźniaczego o przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 3. Przewód składa się z dwóch jednakowych drutów, każdy o grubości $\delta = 2{,}5$ mm

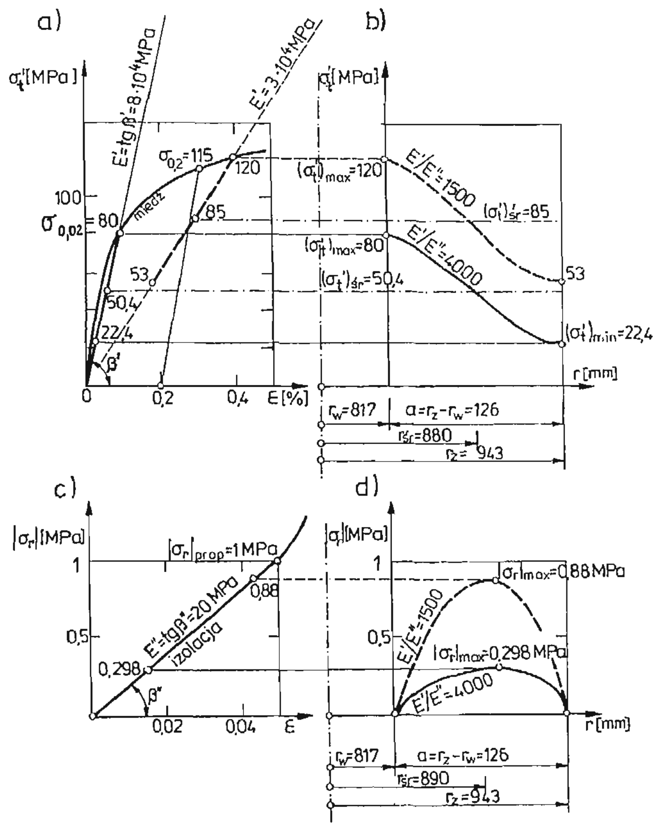


Rys. 3.

i szerokości $b' = 16$ mm owiniętych izolacją. Łączna grubość przewodu wynosi $h = 8{,}4$ mm. Chcąc wykorzystać wyprowadzone tutaj wzory na naprężenia: $\sigma_t^*(22)$, $\sigma_r^*(24)$ należy dokonać podstawienia: $h' = 2\delta$

$$h' = 2\delta = 2 \cdot 2{,}5 \text{ mm} = 5 \text{ mm} - \text{a więc } H = h/h' = 8{,}4/5 = 1{,}68$$

h' — jest to w przypadku przewodu bliźniaczego suma grubości dwóch drutów znajdujących się w tym przewodzie.



Rys. 4.

Na rys. 4a pokazany jest wykres rozciągania $\sigma_t'(\varepsilon)$ miedzi, z której wykonane są druty analizowanej cewki, natomiast na rys. 4c, wykres ściskania $|\sigma_r|(\varepsilon)$ papieru użytego na izolację. Interesujące nas własności materiałów użytych na cewkę są następujące:

dla miedzi — umowna granica proporcjonalności $\sigma_{0,02} = 80$ MPa $= 80$ N/mm^2
— umowna granica plastyczności $\sigma_{0,2} = 115$ MPa,

$$E' = 8\cdot 10^4 \text{ MPa}, \quad \nu' = 0,3 \text{ (gdy } 0 < \sigma_t' \leqslant \sigma_{0,02}),$$

dla izolacji:

$$E'' = 20 \text{ MPa}, \quad \nu'' = 0 \text{ (gdy } 0 < \sigma_r \leqslant 1 \text{ MPa)}.$$

W rozpatrywanym przypadku $E'/E'' = 4000$, więc zgodnie ze związkami (9), (11), (18), (19):

$$\nu_t = \frac{\nu'}{H} = \frac{0,3}{1,68} = 0,1786, \quad \nu_r = \nu'\frac{H}{1+(E'/E'')(H-1)} =$$

$$= 0,3\frac{1,68}{1+4000(1,68-1)} = \frac{1,852}{10^4}$$

$$E_* = \frac{1}{H^2}\left[1+\frac{E'}{E''}(H-1)\right] = \frac{1}{1{,}68^2}[1+4000(1{,}68-1)] = 964{,}1$$

$$\alpha = \sqrt{E_*} = 31{,}05$$

Powyższe wielkości wstawiono do zależności (27'), określono A_1/p_*, A_2/p_* a bezwymiarowe naprężenia obwodowe $\sigma_t^*(R)$ oraz promieniowe $\sigma_r^*(R)$ obliczono ze wzorów (23'), (22), (25'), (24). W taki sposób postąpiono nie tylko dla $E'/E'' = 4000$ lecz również dodatkowo dla $E'/E'' = 500, 1000, 1500, 2000, 6000, 10000$.
Z rys. 2 widać, że gdy $E'/E'' = 4000$ wówczas:

$$(\sigma_t^*)_{max} = (\sigma_t^*)_{R=1} \approx (\sigma_t^*)_{k=1} = 0{,}834, \quad (\sigma_t^*)_{śr} = 0{,}526,$$
$$(\sigma_t^*)_{min} = (\sigma_t^*)_{R=R_z} \approx (\sigma_t^*)_{k=n=15} = 0{,}234$$
$$(\sigma_r^*)_{max} = (\sigma_r^*)_{R=1{,}085} = -0{,}00522$$

Zgodnie ze wzorem (28) naprężenia rozciągające w drucie pierwszego (wewnętrznego) zwoju wynoszą

$$\sigma'_{t1} \approx (\sigma'_t)_{max} \approx \frac{q_1 r_w}{b'h'}(\sigma_t^*)_{R=R_w=1}$$

Określone zostanie teraz do jakiej maksymalnej wartości obciążenia $q_1 = (q_1)_{prop}$ analizowana cewka nie dozna (praktycznie) trwałych odkształceń. Wynika to ze związku

$$(\sigma'_t)_{max} = \frac{(q_1)_{prop} r_w}{b'h'}(\sigma_t^*)_{R=1} = \sigma_{0,02}$$

stąd

$$(q_1)_{prop} = \frac{\sigma_{0,02}}{(\sigma_t^*)_{R=1}}\frac{b'h'}{r_w} = \frac{80}{0{,}834}\frac{16\cdot 5}{817} \approx 9{,}39 \text{ N/mm}$$

przy tym obciążeniu:

$$(\sigma'_t)_{śr} = \frac{(q_1)_{prop} r_w}{b'h'}(\sigma_t^*)_{śr} = \frac{9{,}39\cdot 817}{16\cdot 5}0{,}526 \approx 50{,}4 \text{ N/mm}^2 = 50{,}4 \text{ MPa}$$

$$(\sigma'_t)_{min} = \frac{(q_1)_{prop} r_w}{b'h'}(\sigma_t^*)_{min} = \frac{9{,}39\cdot 817}{16\cdot 5}0{,}234 \approx 22{,}4 \text{ N/mm}^2 = 22{,}4 \text{ MPa}$$

Ze wzoru (29) znajduje się naciski na izolację. Wynoszą one

$$(\sigma_r)_{max} = \frac{(q_1)_{prop} r_w}{b'h}|\sigma_r|_{max} = \frac{9{,}39\cdot 817}{16\cdot 8{,}4}\cdot 0{,}00522 \approx 0{,}298 \text{ N/mm}^2 = 0{,}298 \text{ MPa}$$

W omawianym przypadku (np. 4c) obowiązuje prawo Hooke'a, gdyż

$$(\sigma_r)_{max} = 0{,}298 \text{ MPa} < |\sigma_r|_{prop} = 1 \text{ MPa}$$

Stan naprężenia w cewce, w której $(\sigma'_t)_{max} = \sigma_{prop} = \sigma_{0,02} = 80$ MPa pokazany jest na rysunkach 4b i 4d liniami ciągłymi.

Należy zauważyć, że w rzeczywistych cewkach w czasie zwarć transformatorów w zwojach występują na ogół stosunkowo duże trwałe odkształcenia, co oczywiście powoduje również trwałe powiększanie się średnic cewek. W takich przypadkach $q_1 > (q_1)_{spr}$, $E' \neq$ const, $E'' \neq$ const i wtedy wyprowadzone tu wzory przestają obowiązywać. Można (postępując w sposób omówiony wyżej) oszacować bardzo z grubsza takie zwarciowe stany naprężeń zastępując rzeczywistą cewkę modelami fikcyjnymi o odpowiednio dobranych modułach E' i E'' uzależnionych od naprężenia $(\sigma_t')_{max}$. Przykład jednego ze sposobów takiego oszacowania naprężeń pokazany jest na rys. 4 liniami przerywanymi.

Omawiane zagadnienie w praktyce inżynierskiej bywa rozwiązywane inaczej. Traktuje się mianowicie poszczególne zwoje jako zamknięcte kołowe pierścienie przedzielone izolacją. Na każdy zwój działają siły elektrodynamiczne i naciski izolacji. Z warunków równowagi i ze związków między odkształceniami kolejnych zwojów uzyskuje się do rozwiązania układ równań. Przy rozwiązywaniu uwzględnia się na ogół nieliniowość materiałową elementów cewki. Okazuje się, że w zakresie liniowej proporcjonalności naprężeń od odkształceń obydwie metody (metoda tu zaproponowana i metoda dotychczas stosowana) prowadzą do podobnych rezultatów.

Literatura

1. Л. И. Мильман, *Расчет механических напряжений растяжения и сжатия с учетом изменения радиуса витков обмотки*. Электротехническая промышленность. 1967.
2. Л. И. Мильман, С. И. Лурье, *Расчет прочности внутренних обмоток трансформаторов при действии радиальных усилий короткого замыкания*. Электричество. 1968. № 3.
3. Л. И. Мильман, С. И. Лурье, *Расчет внутренних обмоток трансформаторов на прочность с учетом конечной ширины реек*. Электричество. 1971, № 9.
4. *Uzwojenia transformatorów energetycznych — budowa i obliczanie*, praca zbiorowa pod kierunkiem prof. E. Jezierskiego WNT Warszawa 1982 r.
5. T. Gałkiewicz — praca wykonana w 1973 r. w Instytucie Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkie na zlecenie Instytutu Elektrotechniki Oddział w Łodzi.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КАТУШКЕ ТРАНСФОРМАТОРА РАСТЯГИВАНОЙ В СЛЕДСТВИЕ ДЕЙСТВИЯ РАДИЯЛЬНЫХ СПЛОЧЕНИЕВЫХ СИЛ

В работе определяются напряжения возникающие в проводе катушки трансформатора а также радияльные напряжения в катушке. Эти формулы представлены в безразмерных величинах, благодаря чему получаемые решения касаются не только одной катушки, а могут быть использованы для некоторой группы катушек.

Своеобразностью работы является рассматривание катушки как ортотропного диска. Упругие войства диска. показаны в р. 2 работы.

Summary

DETERMINATION OF STRESSES IN THE TRANSFORMER COIL SUBJECTED TO EXTENSION WITH RADIAL ELECTRODYNAMIC

In this paper the stresses in the coil wire and the radial stresses of the coil are determined. The resulting formulas are given in a nondimensional form and so received solutions may be used for some systems of coils.

The original feature of the approach is that the coil is treated as an uniform orthotropic disk. Elastic properties of the disk are determined in sec. 2 of the paper.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 maja 1986 roku.