

ZASTOSOWANIE PROCESÓW MARKOWA DO MODELOWANIA I BADANIA UKŁADU MECHANICZNEGO TOR-POJAZD SZYNOWY

WŁODZIMIERZ CHOROMAŃSKI
JERZY KISIŁOWSKI
BOGDAN RACIBORSKI

Politechnika Warszawska

Streszczenie

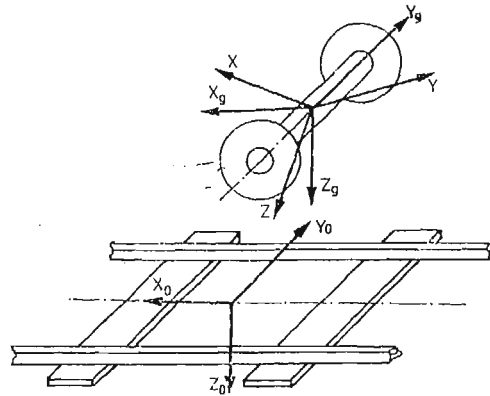
Badania dynamiki poprzecznej modelu matematycznego układu mechanicznego tor-pojazd szynowy mają niezwykle istotne znaczenie biorąc pod uwagę specyfikę badanego obiektu. Chodzi mianowicie o zapewnienie jednopunktowego styku podczas ruchu pomiędzy kołem pojazdu szynowego a główką szyny. Autorzy proponują do rozwiązania problemu wykorzystać teorię procesów Markowa. Jakkolwiek przedstawione w pracy wyniki odnoszą się do konkretnego obiektu mechanicznego to proponowaną metodę postępowania wydaje się można uogólnić do dowolnego układu mechanicznego opisanego układem równań różniczkowych zwyczajnych, na które narzucone są ograniczenia i który jest poddany wymuszaniu losowemu.

1. Wstęp

Badanie dynamiki poprzecznej zestawu kołowego w ruchu po torze prostym jest zadaniem posiadającym wiele aspektów teoretycznych i użytkarnych. Ma ono niezwykle istotne znaczenie z punktu widzenia specyfiki badanego obiektu, chodzi mianowicie o zapewnienie podczas ruchu „jednopunktowego” styku w układzie koło-główka szyny (brak styku obrzeża kół z szyną). Model nominalny analizowanego obiektu przedstawiono na rys. 1.

Tradycyjne podejście do rozważanego zagadnienia w literaturze dotyczącej pojazdów szynowych sprowadza się zazwyczaj do analizy stateczności w sensie Lapunowa zlinearyzowanego modelu autonomicznego. Nie uwzględnione zostają zatem z jednej strony losowe czynniki występujące w modelowanym obiekcie jak również ograniczenia narzucone na poszczególne przemieszczenia (będące np. wynikiem warunku jednopunktowego styku).

Tymczasem wymuszenia działające na zestaw kołowy pochodzą głównie od czynników losowych jak np. nierówności toru. Naturalnym więc wydaje się zastosowanie w rozważanym przypadku analizy probabilistycznej.



Rys. 1.

2. Sformułowanie problemu

Przyjęty model matematyczny zestawu kołowego w ruchu po torze prostym ma w ogólnym przypadku postać:

$$\dot{Y}_t = F(Y_t, t) + G(Y_t, t)X_t, \quad (1)$$

gdzie:

$Y_t = [Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^n]^T$ — wektor n -współrzędnych uogólnionych użytych do opisu modelu,

$X_t = [X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n]^T$ — wektorowy n -wymiarowy proces stochastyczny opisujący losowe wymuszenia,

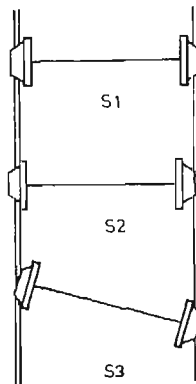
T — oznacza transpozycję,

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T,$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix},$$

● — pochodna czasowa.

Przyjęto, że X_t jest stacjonarnym w szerokim sensie procesem Markowa.



Rys. 2.

Z punktu widzenia specyfiki badanego obiektu wyróżniono trzy charakterystyczne stany, w jakich może znajdować się zestaw kołowy (rys. 2).

S1 — stan, gdy zestaw kołowy ma „dwa punkty styku” z tokami szynowymi,

S2 — stan, gdy zestaw kołowy ma „trzy punkty styku” z tokami szynowymi,

S3 — stan, gdy zestaw kołowy ma „cztery punkty styku” z tokami szynowymi.

Dla tak opisanego modelu układu przeprowadzono wyznaczenie szeregu własności probabilistycznych, a w tym przede wszystkim wyznaczenie prawdopodobieństwa wystąpienia stanu S1 (najbardziej korzystnego z punktu widzenia eksploatacji).

3. Metody analizy

Znalezienie rozwiązania układu stochastycznych równań różniczkowych (1) z wymuszeniem w postaci dowolnego porocesu stochastycznego jest na ogół niemożliwe. Jednak w przypadku stochastycznych równań różniczkowych ITÔ [2] z wymuszeniem w postaci białego szumu, istnieje aparat matematyczny pozwalający na dokładne obliczenie charakterystyk probabilistycznych procesu opisującego rozwiązanie układu. Stąd wynika, że pierwszym istotnym zagadnieniem jest sprowadzenie układu równań różniczkowych (1) do układu stochastycznych równań różniczkowych ITÔ postaci:

$$\dot{Y}_{tc} = f(Y_{tc}, t) + g(Y_{tc}, t) \cdot \eta_t, \quad (2)$$

● — pochodna czasowa,

$\bar{\eta}_t = [\eta_{t1}, \eta_{t2} \dots]^T$ — wektor niezależnych białych szumów.

Można wykazać [2], że rzeczywisty proces normalny x_t można z dowolną dokładnością aproksymować procesem stochastycznym będącym rozwiązaniem pewnego stochastycznego równania różniczkowego.

Niech $S_x(\omega)$ oznacza gęstość spektralną procesu X_t . Aproksymujemy funkcję $S_x(\omega)$ funkcją

postaci $S_\xi(\omega) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ gdzie:

$$P(z) = \beta_0 z^m + \beta_1 z^{m-1} + \dots + \beta_m,$$

$$Q(z) = z^{n_s} + \alpha_1 z^{n_s-1} + \dots + \alpha_n,$$

$$n_s > m.$$

α_i, β_i — stałe współczynniki.

Proces o gęstości spektralnej $S_\xi(\omega)$ można otrzymać jako rozwiązanie następującego równania [2]:

$$\frac{d^k \xi^{n_s}}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^k \xi^{n_s-1}}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{n_s} \xi = \beta_0 \frac{d^m \eta}{dt^m} + \dots + \beta_m \eta, \quad (3)$$

gdzie: η — biały szum,

$\frac{d^{n_s}}{dt^{n_s}}$ — n_s -ta pochodna.

Dokonując elementarnych podstawień można powyższe równanie sprowadzić do układu równań różniczkowych I-rzędu, w których nie wystąpią już pochodne białego

szumu (traktowane w zapisie równania (d) czysto formalnie, ze względu na nieróżniczkowalność białego szumu).

$$\frac{d\xi}{dt} = H(\xi, \eta, t); \quad \xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T. \quad (4)$$

Uwzględniając powyższe fakty oraz równania (1) i (4) otrzymamy układ (4) przy czym:

$$Y_{tc} = [Y_t^1, Y_t^2 \dots Y_t^n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{ns}]^T. \quad (5)$$

Rozwiązanie równania (2) jest wektorowym procesem stochastycznym Y_{tc} . Aby otrzymać pełny jego opis probabilistyczny należy znaleźć wszystkie skończone wymiarowe rozkłady. W praktyce ograniczymy się do 1-wymiarowego rozkładu $f_t(Y_{tc})$ (gdzie: f_t — funkcja jednowymiarowej gęstości prawdopodobieństwa).

W dalszej części wszelkie rozważania odnosić się będą do równania (2).

Proces Y_{tc} stanowiący rozwiązanie układu równań stochastycznych jest procesem Markowa pod warunkiem, iż funkcje g i f (równanie (2)) spełniają pewne warunki regularności (zostały one sformułowane m.in. w [2] i [3]).

Jednowymiarową gęstość prawdopodobieństwa $f_t(Y_{tc})$ procesu Y_{tc} można wyznaczyć dokładnie rozwiązując równanie Fokkera-Plancka-Kołmogorowa (FPK).

$$\frac{\partial f_t(Y_{tc})}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+n_s} \frac{\partial^2}{\partial Y_{tc}^i \partial Y_{tc}^j} (b_{ij}(Y_{tc}, t)) - \sum_{i=1}^{n+n_s} \partial [a_i(Y_{tc}) f_t(Y_{tc})], \quad (6)$$

$$f_{t0}(Y_{tc}) = f_0(Y_{tc}).$$

Rozwiązanie równań FPK jest w ogólnym przypadku praktycznie niemożliwe, dlatego też do analiz można zastosować pewną metodę przybliżoną zwaną metodą linearyzacji bezpośredniej [2]. Układ (2) można przedstawić w następującej postaci:

$$\dot{Y}_t = F_s(Y_{tc}, \eta_t, t), \quad Y(0) = Y_0, \quad (7)$$

gdzie: F_s jest funkcją nieliniową.

Ten nieliniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych można przybliżyć układem liniowym rozwijając prawą stronę w szereg Taylora względem fluktuacji ($Y_{tc}^0 = Y_{tc} - M_t$, $\eta_t^0 = \eta_t - M_t^n = \eta_t$) i odrzucając czony z potęgami większymi od jeden (z analizy układu wynika, że przemieszczenia zestawu kołowego są dostatecznie małe aby można było dokonać takiego przybliżenia).

Otrzymujemy w wyniku takich operacji dwa układy równań:

$$M_t = F(M_t, t), \quad M(0) = Y_{c0}, \quad (8)$$

jest to deterministyczny układ równań różniczkowych zwyczajnych, który można rozwiązać numerycznie na EMC

$$Y_{tcj}^0 = \sum_{i=1}^p \frac{\partial F_j}{\partial m Y_{ci}} Y_j^0 + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_j}{\partial m Y_{ci}} \eta_i.$$

Niech:

$$A(t) = A(M_t) = \left[\frac{\partial F_j}{\partial m Y_t} \right],$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(M_t^0) = \left[\frac{\partial F_j}{\partial m_{\eta_t}} \right],$$

wtedy:

$$\dot{Y}_t^0 = \mathbf{A}_t Y_t^0 + \mathbf{B}_t \eta_t, \quad (9)$$

jest to układ liniowych, stochastycznych równań różniczkowych. Ponieważ przekształcenie liniowe zachowuje normalność a η jest normalny więc proces $Y_{t_0}^0$ jest również procesem normalnym. Do znalezienia jego charakterystyk wystarczy obliczenie wektora wartości średnich M_t , z układu oraz macierzy dyspersji D_t , spełniającej następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{D}_t = \mathbf{A}_t D_t + D_t \mathbf{A}_t^T + \mathbf{B}_t \mathbf{Q} \mathbf{B}_t, \quad (10)$$

\mathbf{A}_t , \mathbf{B}_t te same co w (9), a $\mathbf{Q} = \delta(t-t_0) \mathbf{E}(\eta_t + \eta_{t_0})$.

Gęstość prawdopodobieństwa $f_t(Y_u)$ procesu Y_{t_0} wyraża się wzorem:

$$f_t(Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det D_t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y_t - M_t) D_t^{-1} (Y_t - M_t)^T \right\}. \quad (11)$$

Interesujący nas rozkład współrzędnych ($Y_{t_0}^i$) otrzymujemy obliczając rozkład brzegowy:

$$f_t(Y^i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_t(Y_t) dY_3 \dots dY_n. \quad (12)$$

Jest to gęstość prawdopodobieństwa określona na całej przestrzeni R^2 .

Przyjęto, że granice obszaru Ω zmienności współrzędnych mają charakter ekranów odbijających (oznacza to, że trajektorie procesu ($Y_{t_0}^i$) po dotarciu do granicy są lustrzanym odbiciem trajektorii procesu, które przekroczyły granicę).

4. Algorytm obliczeń. Przykład zastosowania metody

W oparciu o zaprezentowaną metodę opracowano algorytm postępowania umożliwiający obliczenie prawdopodobieństwa znalezienia się zestawu kołowego w stanie S1. Schemat blokowy algorytmu przedstawiono na rys. 3.

Model matematyczny badanego obiektu (zestawu kołowego w ruchu po torze prostym) zaczerpnięty został z pracy [1].

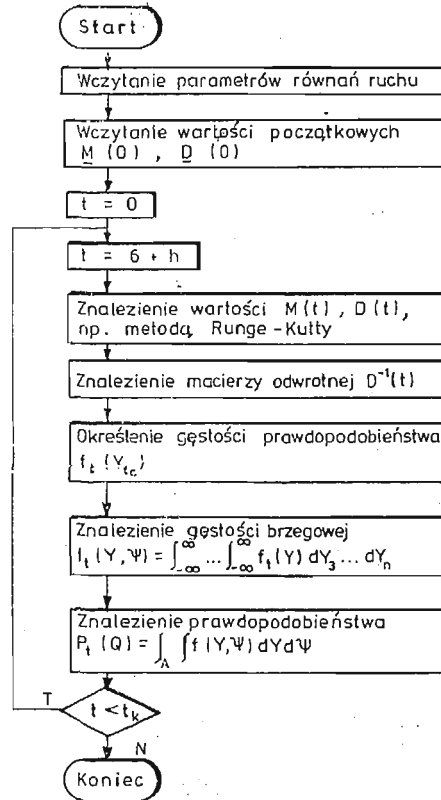
Ma on postać dwóch nieliniowych równań różniczkowych (uwzględniona tzw. nieliniowość typu kinematycznego [1] drugiego rzędu):

$$\begin{aligned} \left[m + \frac{\delta^2}{b^2} (J_x + J_x \Psi^2 + J_y \Psi^2) \right] \ddot{Y} + \frac{J_y \delta^2}{b^2} Y \Psi \ddot{\Psi} + \frac{\delta^2}{b^2} (2J_x + J_y) \dot{Y} \dot{\Psi} - \frac{J_y \delta^2}{b^2} Y \dot{\Psi}^2 = Q_y \\ - \frac{J_y \delta}{b^2} \ddot{Y} \Psi_y + J_y \ddot{\Psi} - \frac{J_y \delta^2}{b^2} \Psi \dot{Y}^2 - \frac{J_y \delta^2}{b^2} \dot{Y} Y \dot{\Psi} = Q_x \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie:

- $q_1 | \Psi |^*$ obrót zestawu kołowego wokół osi pionowej OZ (rys. 1),
- $q_2 | Y |$ przemieszczenie poprzeczne (wzdłuż osi OY) środka masy zestawu kołowego,

*) w nawiasach podano równoważne oznaczenia współrzędnych używanych w pracy.



Rys. 3.

Q_Y, Q_X siły styczne występujące w punktach styku układu tor-zestaw kołowy, (w nawiasie podano równorzędnie używane oznaczenia).

Siłę styczną Q_Y i moment Q_Ψ określono zgodnie z liniową teorią Kalkera:

$$\begin{aligned}
 Q_Y &= 2k_{pY}N \left[\Psi - \frac{\dot{Y}}{v} \left(1 + \frac{r\delta}{b} \right) \right] - \frac{2k_{ps}Nr}{v} \dot{\Psi} + 2N \left(\frac{\varepsilon}{b} - k_{ps} \frac{\varepsilon - \delta}{b} \right) (Y_w - Y) + \frac{2k_{pY}N\delta r}{bv} \dot{Y}_w \\
 Q_\Psi &= -2bNk_{px} \left(\lambda(Y - Y_w) + \frac{b}{v} \dot{\Psi} \right) + 2bN\delta\Psi(1 - k_{ps})
 \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie:

Y_w — rzeczywiste losowo wymuszenie kinematyczne działające na układ.

Wykaz parametrów wraz z ich wartościami zebrano w tabeli I. Gęstość spektralną rzeczywistego procesu Y_w utożsamiamy z losowym wymuszeniem X , równania (1) przedstawiono na rys. 4. Ograniczenia narzucone zaś na układ, warunkujące przebywanie jego w stanie S1 pokazano na rys. 5.

Po wprowadzeniu współrzędnych stanu $q_1 = y, q_2 = \Psi, q_3 = \dot{Y}, q_4 = \dot{\Psi}$ sprowadzono układ (13) do układu 4 równań I rzędu:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}) + \mathbf{B}Y_w, \quad (15)$$

Tabela 1

Oznaczenie	Określenie	Wartość	Jednostka
m	masa zestawu kołowego	1400	kg
J_x	moment bezwładności zestawu kołowego względem osi OX	1747	kg · m ²
J_y	moment bezwładności zestawu kołowego względem osi OY	131	kg · m ²
b	połowa odległości między punktami styku układu tor-zestaw kołowy w położeniu środkowym	0.75	m
δ	połowa kąta stożkowatości profilu zestawu kołowego	0.038	rad
ε	parametr sztywności grawitacyjnej	0.038	rad
r	średni promień toczy zestawu kołowego	0.46	m
k_{ps}	współczynnik Kalkera dla poślizgu wiertnego	0.81	
k_{px}	współczynnik Kalkera dla poślizgu wzdłużnego	200.0	
k_{py}	współczynnik Kalkera dla poślizgu poprzecznego	175.0	
N	siła normalna w punkcie kontaktu koła z szyną	26375	N
λ	parametr ekwiwalentnej stożkowatości	0.038	rad
v	prędkość protolinowego ruchu zestawu kołowego	22.2222	m/s

gdzie:

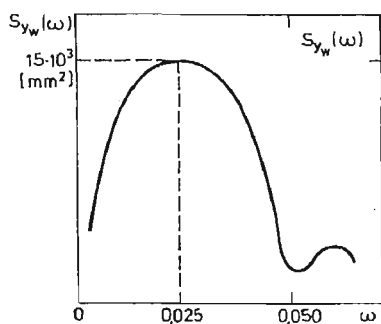
$$Y = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T,$$

$$Y_w = (0, 0, Y_w, \dot{Y}_w),$$

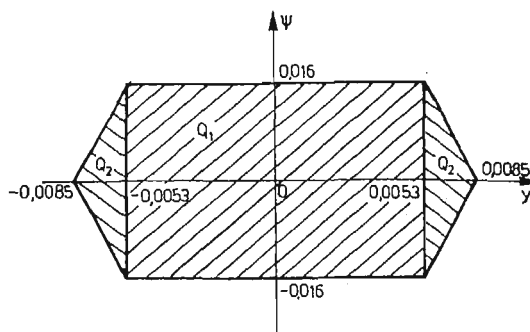
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m + \frac{\delta^2}{b^2} (J_x + J_x q_1^2 + J_y q_2^2) & -\frac{J_y \delta^2}{b^2} q_1 q_2 \\ 0 & 0 & -\frac{J_y \delta q_1 q_2}{b^2} & \end{bmatrix},$$

$$F(Y) = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ -\frac{\delta^2}{b^2} (2J_x + J_y) q_3 q_4 + \frac{J_y \delta^2}{b^2} q_1 q_4^2 + 2k_{py} N \left[q_2 - \frac{q_3}{v} + \frac{r \delta q_3}{vb} \right] - \frac{2k_{ps} N r q_4}{v} + \\ -2N \left[\frac{\varepsilon}{b} - k_{ps} \frac{\varepsilon - \delta}{b} \right] q_1 \\ \frac{J_y \delta^2}{b^2} q_2 q_3^2 + \frac{J_y \delta^2}{b^2} q_1 q_2 q_3 - 2bNk_{px} \left[\frac{\lambda}{r} q_1 + \frac{b}{v} q_4 \right] + 2bN\delta_1 (1 - k_{ps}) q_2 \end{bmatrix},$$

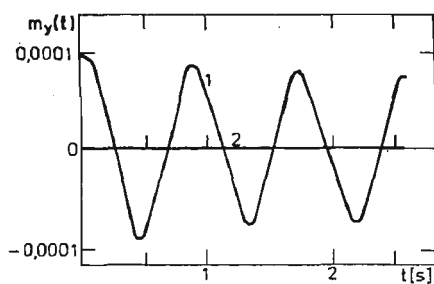
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2N \left[\frac{\varepsilon}{b} - k_{ps} \frac{\varepsilon - \delta}{b} \right] & \frac{2k_{py} N \delta r}{bv} \\ 0 & 0 & 2bNk_{px} \frac{\lambda}{r} & 0 \end{bmatrix},$$



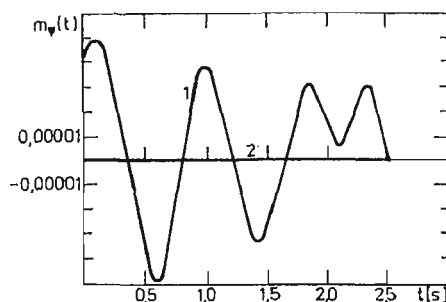
Rys. 4.



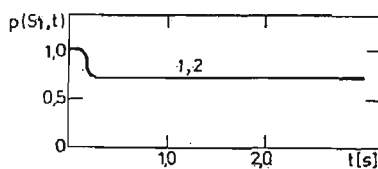
Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.



Rys. 8.

Rzeczywistą gęstość spektralną aproksymowano funkcją postaci:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{(\omega^2 - \alpha_2)^2 + \alpha_1^2 \omega^2} \quad (16)$$

Równanie (4) przyjęło postać:

$$\begin{aligned} Y_w &= \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 + \alpha_2 \xi_1 + \alpha_1 \xi_2 &= x. \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie:

x jest białym szumem o wartości średniej 0 i intensywności 1.

Parametry α_1 i α_2 zostały przy tym tak dobrane aby punkty ekstremalne obu funkcji ($S_x(\omega)$, $S_{\xi}(\omega)$) pokrywały się, tzn.:

$$\left. \frac{dS_{\xi}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0,025} = 0 \quad S_{\xi}(\omega)|_{\omega=0,025} = 15 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{]}$$

Mnożąc obustronnie układ (15) przez \mathbf{A}^{-1} oraz uwzględniając związki (17) otrzymano ostatecznie układ w postaci (2) tzn.

$$\dot{Y}_{1c} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(q_1, q_2, q_3, q_4) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}[0, 0, q_5, q_6] \\ q_6 \\ -\alpha_1 q_6 - \alpha_2 q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 00 \\ 0 & \dots & 00 \\ 0 & \dots & 01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\bar{Y}_{1c} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]; \quad \begin{aligned} q_5 &= \xi_1; \\ q_6 &= \xi_2. \end{aligned}$$

Stosując metodę i algorytm podany uprzednio uzyskano następujące wyniki dotyczące wartości średnich współrzędnych y (rys. 6 i 7) oraz prawdopodobieństwa znalezienia się układu w stanie $S1$ (rys. 8).

Można zauważyć, że krzywa określająca prawdopodobieństwa znalezienia się układu w stanie $S1$ po bardzo krótkim czasie stabilizuje się wokół wartości 0,69 (niezależnie od warunków początkowych).

5. Wnioski końcowe

Prezentowana w niniejszej pracy metoda analizy układu mechanicznego z ograniczeniami i losowym wymuszeniem, wydaje się efektywnym narzędziem badawczym prowadzącym do otrzymania szeregu interesujących charakterystyk probabilistycznych.

Przedstawione rozważania mogą zostać uogólnione na dowolne układy mechaniczne, pod warunkiem spełnienia sformułowanych w pracy założeń. Wykorzystana teoria procesów Markowa dostarcza bardzo silnego aparatu badawczego. Stosując ją można otrzymać szereg dodatkowych charakterystyk probabilistycznych nie omawianych w pracy (jak np. rozkład prawdopodobieństwa maksymalnych wartości procesu Y_{10}). Skomplikowana forma zależności jak i duża wymiarowość stosowanych modeli wymaga jednak użycia zarówno efektywnych procedur numerycznych jak również szybkich EMC.

Literatura

1. J. KISIŁOWSKI, *Dynamika układu tor-pojazd*. Prace Instytutu Transportu PW, z. 15, Wyd. PW, W-wa 1978.
2. K. SOBZYK, *Metody dynamiki statystycznej*. PWN, W-wa 1973.
3. В. И. ТИХОНОВ, А. М. МИРНОВ, *Марковские процессы*, Москва „Советское радио” 1977.

Резюме

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ РЕЛЬС-РЕЛЬСОВОЙ СОСТАВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА

Анализ поперечной динамики системы рельс-рельсовой состав из-за специфических свойств этой системы является очень важной задачей. Существенной проблемой является задача обеспечения точенного контакта между колесом и головкой рельса. Для анализа авторы предполагают использовать теорию процессов Маркова и формализм стохастических уравнений ИТО. Рассуждения относятся к конкретной механической системе, но могут быть обобщены на любую механическую систему описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями со стохастическими возмущениями и ограничениями.

S u m m a r y

APPLICATION OF MARKOV PROCESSES FOR MODELLING AND INVESTIGATING
MECHANICAL TRACK-RAIL VEHICLE SYSTEM

The investigation of the lateral dynamics of the track-railway vehicle system is extremely important due to the specific features of such a system.

The problem is how obtain a one point contact between the rolling wheel and rail. The authors propose to use the theory of Markow processes and the stochastic ITO equations to solve the problem. Although the results are obtained there a concrete mechanical system the presented method seems to be applicable to arbitrary mechanical systems described by a set of ordinary differential equations, subject to constraints and random loading.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 kwietnia 1984 roku.
