

ROZWIĄZYWANIE PROBLEMÓW QUASI-STATYCZNEJ SPRĘŻYSTO-LĘPKOPLASTYCZNOŚCI ZE WZMOCNIENIEM KINEMATYCZNYM

MACIEJ BANYS

Politechnika Wroclawska

1. Wstęp

Dotychczasowe rozwiązywanie metodą elementów skończonych quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności w zakresie małych odkształceń oparte było na procedurach z ograniczoną stabilnością ze względu na krok czasu. W kolejnych artykułach [2], [8] przedstawiona została procedura Eulera oraz warunki dla kroku czasowego w celu zachowania stabilności. Podobne ograniczenia występują dla procedury początkowych obciążeń [1] z bezwarunkową stabilnością dla parametru aproksymacji $\theta = 1$. W pracy [3] przedstawiono procedurę Newtona-Raphsona bezwarunkowo stabilną dla $\theta \geq \frac{1}{2}$. Z wyjątkiem procedury Eulera dla $\theta = 0$ rozważania dotyczyły sprężysto-lepkoplastyczności bez wzmocnienia. Wiele materiałów wykazuje jednak równocześnie wrażliwość na prędkość odkształceń niesprężystych $\dot{\epsilon}^a$ jak i samo odkształcenie niesprężyste ϵ^a . Stąd potrzeba stosowania bardziej nieliniowych praw płynięcia. Ogólnie możemy zapisać tę zależność w postaci macierzowej:

$$\dot{\epsilon}^a = f(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}^a) \quad (1.1)$$

gdzie $\underline{\sigma}$ jest wektorem naprężeń.

Podejście sprężysto-lepkoplastyczne pozwala na uzyskiwanie rozwiązań sprężysto-plastyczności jako stanów ustalonych dla dużych czasów [8]. Taki sposób rozwiązywania ma charakter metody relaksacji dynamicznej. Czas gra rolę fikcyjnego parametru. Prowadzi to do uzyskania rozwiązania związanego ze spełnieniem warunku plastyczności.

2. Wzmocnienie kinematyczne

Ograniczymy się do przypadku wzmocnienia kinematycznego [5], dla którego wprowadza się naprężenie względne $\underline{\sigma}_k$ postaci

$$\underline{\sigma}_k = \underline{\sigma} - c \cdot \underline{\underline{III}} \cdot \underline{\epsilon}^a, \quad (2.1)$$

gdzie c jest stałą wzmocnienia.

Ponieważ stosujemy odkształcenie tzw. inżynierskie

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

stąd musimy wprowadzić diagonalną macierz III dla trójwymiarowego stanu naprężenia:

$$\underline{\text{III}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sym.} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Warunek plastyczności ma postać dla granicy plastyczności σ_0 przy rozciąganiu

$$\sigma_{kint} = \sigma_0, \quad (2.2)$$

gdzie:

$$\sigma_{kint} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}_k^T \underline{S}_D \underline{\text{II}} \underline{S}_D \underline{\sigma}_k}. \quad (2.3)$$

Iloczyn $\underline{S}_D \underline{\sigma}_k = \underline{S}_k$ stanowi dewiator naprężenia względnego, a macierz \underline{S}_D jest postaci:

$$\underline{S}_D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sym.} & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Wprowadzenie macierzy diagonalnej II o postaci podobnej do macierzy III, gdzie w miejsce

$\frac{1}{2}$ należy podstawić 2, wynika z ograniczenia się do wektorów sześcioelementowych.

Zgodnie z koncepcją materiałów statecznych lepkoplastycznych [5] możemy zapisać prawo konstytutywne w postaci

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^a = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad (2.4)$$

gdzie γ jest lepkością,

$F = \frac{f}{\sigma_0} - 1$ określa statyczny warunek plastyczności, a

$$f = \sigma_{kint} \quad (2.5)$$

dla wzmocnienia kinematycznego.

Symbol $\langle \Phi \rangle$ oznacza próg, powyżej którego wystąpią odkształcenia niesprężyste tzn:

$$\langle \Phi \rangle = \begin{cases} \Phi & \text{dla } \Phi \geq 0 \\ 0 & \text{dla } \Phi < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Funkcję $\Phi(F)$ można przyjmować w różnej postaci [5] najczęściej jednak stosuje się funkcję potęgową $\Phi(F) = F^n$. Zgodnie z (2.4) i (2.5) możemy obliczyć pochodne cząstkowe i zapisać

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^a = \frac{3}{2} \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{II S_D \sigma_k}{\sigma_{klnt}}. \quad (2.7)$$

Taka postać równania konstytutywnego gwarantuje nieściśliwość w zakresie niesprężystym, co jest potwierdzone doświadczalnie dla metali.

3. Metoda Newtona-Raphsona

Oznaczmy dla wygody przyrosty zmiennej $\underline{\sigma}$ w przyroście

$$\delta \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{\sigma}_{n+1}^{i+1} - \underline{\sigma}_n, \quad (3.1)$$

oraz przyrosty zmiennej $\underline{\sigma}$ w iteracji:

$$\Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{\sigma}_{n+1}^{i+1} - \underline{\sigma}_{n+1}^i. \quad (3.2)$$

Ponieważ (1.1) jest określone postacią różniczkową możemy przyjąć, że

$$\delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai} = \dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{a(i+1)} \cdot \delta t_{n+1}, \quad (3.3)$$

gdzie $0 \leq \Theta \leq 1$ jest parametrem aproksymacji liniowej postaci

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{n+\Theta}^{i+1} &= (1-\Theta) \cdot \underline{\sigma}_n + \Theta \cdot \underline{\sigma}_{n+1}^{i+1}, \\ \underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{a(i+1)} &= (1-\Theta) \cdot \underline{\varepsilon}_n^a + \Theta \cdot \underline{\varepsilon}_{n+1}^{a(i+1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Natomiast:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{a(i+1)} = \dot{\underline{\varepsilon}}^a(\underline{\sigma}_{n+\Theta}^{i+1}; \underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{a(i+1)}). \quad (3.5)$$

Aby obliczyć nieznanne z góry wartości $\underline{\sigma}_{n+\Theta}^{i+1}$, $\underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{a(i+1)}$, rozwińmy $\dot{\underline{\varepsilon}}^a$ w szereg Taylora względem pierwszych pochodnych

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{a(i+1)} = \dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{ai} + \Theta \cdot \left. \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{aT}}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{n+\Theta}^i \cdot \Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i + \Theta \cdot \left. \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{aT}}{\partial \underline{\varepsilon}^a} \right|_{n+\Theta}^i \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai}, \quad (3.6)$$

wykorzystując zależność:

$$\Delta \underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{ai} = \Theta \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai} \quad \text{oraz} \quad \Delta \underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^{a(i+1)} = \Theta \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{a(i+1)}.$$

Łącząc (3.6) z (3.3) otrzymujemy

$$\delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai} = \underline{G}^{-1} \cdot (\dot{\underline{\varepsilon}}_{n+\Theta}^{ai} + \Theta \cdot \underline{P}_\sigma \cdot \Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i - \Theta \cdot \underline{P}_\varepsilon \cdot \delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{a(i-1)}) \cdot \delta t_{n+1}, \quad (3.7)$$

gdzie:

$$\underline{G} = \underline{I} - \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \underline{P}_\varepsilon.$$

Dla wygody wprowadziliśmy oznaczenia:

$$\underline{P}_\sigma = \left. \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{aT}}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{n+\Theta}^i \quad \text{oraz} \quad \underline{P}_\varepsilon = \left. \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{aT}}{\partial \underline{\varepsilon}^a} \right|_{n+}$$

Ogólne równanie konstytutywne dla sprężystości przy założeniu addytywności odkształceń sprężystych i niesprężystych ma postać w wersji przyrostowej

$$\delta \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{D} \cdot (\delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^i - \delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{ai}), \quad (3.8)$$

gdzie \underline{D} jest macierzą sprężystości.

Podstawiając (3.7) do (3.8) i przekształcając względem $\delta \underline{\sigma}_{n+1}^i$ otrzymujemy:

$$\Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i = \underline{D} \underline{B} \delta \underline{u}_{n+1}^i - \underline{D}^* \cdot (\underline{\varepsilon}_{n+\theta}^{ai} \cdot \delta t_{n+1} + \underline{D}^{-1} \cdot \delta \underline{\sigma}_{n+1}^{i-1} - \delta t_{n+1} \cdot \Theta \cdot \underline{P}_\varepsilon \cdot \delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{i-1}) \quad (3.9)$$

gdzie $\hat{\underline{D}}$ jest macierzą sprężysto-lepkoplastyczną z uwzględnieniem wzmocnienia kinematycznego

$$\hat{\underline{D}} = \underline{G}^T \cdot (\underline{G} \cdot \underline{D}^{-1} \cdot \underline{G}^T + \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \underline{P}_\sigma \cdot \underline{G}^T)^{-1} \cdot \underline{G} = \underline{D}^* \cdot \underline{G}, \quad (3.10)$$

a macierz

$$\underline{D}^* = (\underline{G} \cdot \underline{D}^{-1} + \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \underline{P}_\sigma)^{-1}. \quad (3.11)$$

W równaniu (3.9) pojawia się macierz odkształceń \underline{B} związana z dyskretyzacją kontinuum, łącząca odkształcenia z przemieszczeniami węzłów.

Zwróćmy uwagę na fakt, że w równaniu (3.9) znamy wszystkie wielkości z wyjątkiem $\Delta \underline{\sigma}_{n+1}^i$ oraz $\delta \underline{u}_{n+1}^i$.

Dołączmy do tego równania równanie równowagi postaci

$$\int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}_{n+1}^i \cdot dV = \underline{R}_{n+1}, \quad (3.12)$$

gdzie \underline{R}_{n+1} jest wartością obciążeń węzłowych oraz sprowadzonych do węzłów sił masowych i sił od odkształceń początkowych w $(n+1)$ -szym przyroście czasu.

Podstawiając (3.9) do równania równowagi otrzymujemy

$$\underline{K}_{n+\theta}^i \cdot \delta \underline{u}_{n+1}^i = \underline{R}_{n+1} + \underline{J}_{n+\theta}^i, \quad (3.13)$$

gdzie:

$$\underline{K}_{n+\theta}^i = \int_V \underline{B}^T \cdot \hat{\underline{D}} \cdot \underline{B} \cdot dV \quad (3.14)$$

jest macierzą sztywności sprężysto-lepkoplastyczną,

$$\underline{J}_{n+\theta}^i = \int_V \underline{B}^T \cdot [\underline{D}^* \cdot (\underline{\varepsilon}_{n+\theta}^{ai} \cdot \delta t_{n+1} + \underline{D}^{-1} \cdot \delta \underline{\sigma}_{n+1}^{i-1} - \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \underline{P}_\varepsilon \cdot \delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^{i-1}) - \underline{\sigma}_{n+1}^i] dV \quad (3.15)$$

i gra rolę sił początkowych korygujących rozwiązanie. Połączenie równań (3.9) i (3.13) oraz (3.8) daje procedurę Newtona-Raphsona względem zmiennych \underline{u} , $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}^a$ i umożliwia efektywne rozwiązanie zadanego problemu sprężysto-lepkoplastyczności oraz sprężysto-plastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym.

Poniżej przedstawiony zostanie algorytm analizowanej procedury typu Newtona-Raphsona. W algorytmie występują następujące oznaczenia:

$$\|\underline{x}\| = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

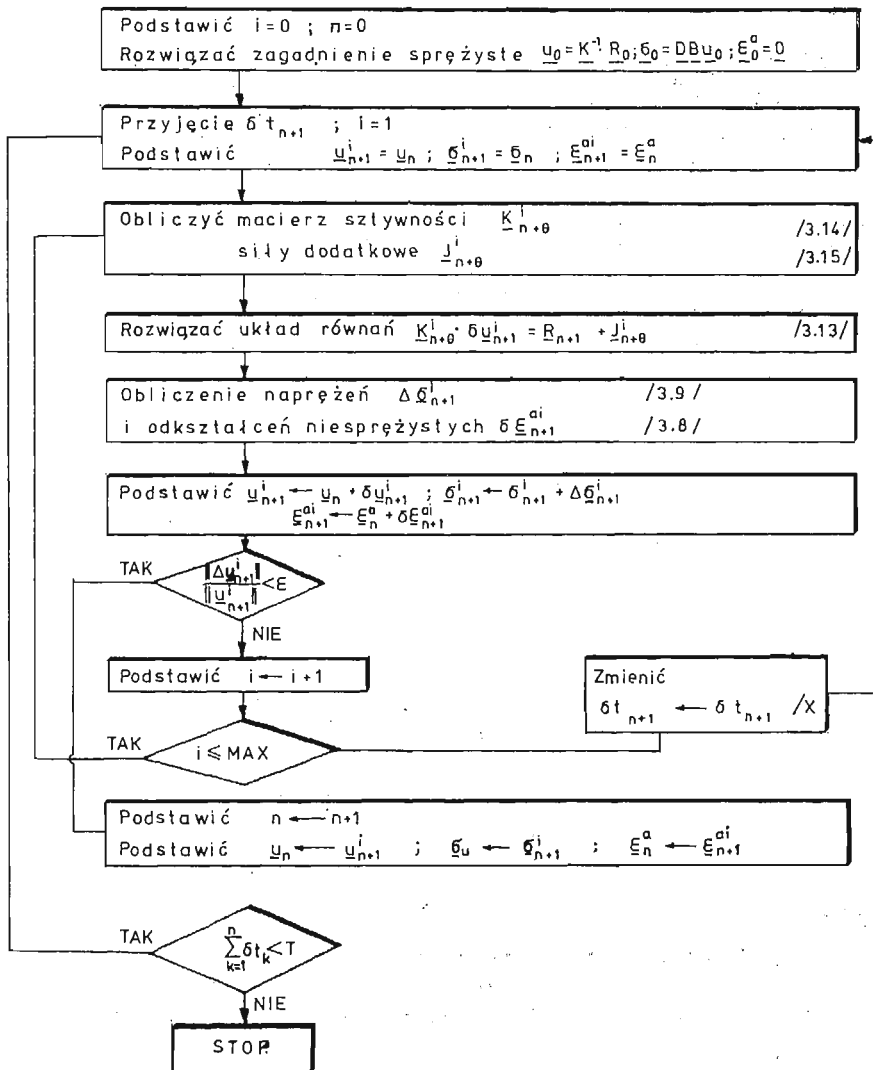
e — dokładność obliczeń w przyroście,

MAX — maksymalna liczba iteracji w przyroście,

T — całkowity czas obciążenia kontinuum.

X — liczba zmniejszająca przyrost czasu.

Algorytm procedury iteracyjno przyrostowej



Rys. 1.

W programie dodatkowo jest wbudowany segment, który umożliwia zwiększenie długości kroku czasowego δt o ile liczba iteracji w przyroście jest wystarczająco mała.

Rozpatrzmy pewne szczególne przypadki powyższego algorytmu.

a) Weźmy pod uwagę zależność (1.1) bez wzmocnienia tzn. $\dot{\underline{\epsilon}}^a = f(\sigma)$. Wówczas $\frac{\partial \dot{\underline{\epsilon}}^a}{\partial \underline{\epsilon}^a} = 0$ i stąd macierz $\underline{G} = \underline{I}$ oraz $\hat{\underline{D}} = \underline{D}^* = (\underline{D}^{-1} + \theta \cdot \delta t \cdot \underline{P}_\sigma)^{-1}$. Taki algorytm przedstawiono w pracy [3]. Zasadnicza różnica, związana z uwzględnieniem umocnienia tkwi w postaci macierzy \underline{G} . Ponieważ materiał określony jest stowarzyszonym prawem płynięcia, stąd

$\left\| \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\sigma}} \right\| > 0$ i dla wzmocnienia, gdy $c > 0$ $\left\| \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\varepsilon}^a} \right\| \leq 0$. Stąd wniosek, że zarówno macierz

\underline{G} jak i $\underline{\hat{D}}$ nie będą osobliwe.

b) Zanalizujmy wpływ parametru aproksymacji. Jeśli $\Theta = 0$, to $\underline{\sigma}_{n+\Theta} = \underline{\sigma}_n$; $\underline{\varepsilon}_{n+\Theta}^a = \underline{\varepsilon}_n^a$. Stąd $\underline{G} = \underline{I}$ oraz $\underline{D} = \underline{\hat{D}} = \underline{D}^*$. Macierz sztywności $\underline{K}_{n+\Theta}^i = \underline{K}$ jest stała i sprężysta. Jest to algorytm Eulera [2] warunkowo stabilny ze względu na przyrost czasu. Procedura iteracyjno-przyrostowa upraszcza się do przyrostowej. Dla $\Theta \neq 0$ mamy metodę typu implicit.

c) Istnieją różne modyfikacje procedury Newtona-Raphsona [4], które są możliwe do zastosowania również w powyższym algorytmie. Często jest stosowana modyfikacja polegająca na pozostawieniu niezmienionej macierzy sztywności \underline{K}_n w trakcie iteracji ze zmianą w przyroście. Taka modyfikacja ma charakter połączenia metody Newtona-Raphsona z metodą początkowych obciążeń.

4. Określenie macierzy występujących przy wzmocnieniu kinematycznym

Do obliczenia macierzy sztywności (3.14) oraz macierzy „wzmocnienia” \underline{G} są potrzebne odpowiednie pochodne cząstkowe. Mają one następującą postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\sigma}} &= \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\sigma_{kInt}} \cdot \underline{H} = \beta_1 \cdot \underline{H}, \\ \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\varepsilon}^a} &= -\frac{3}{2} \frac{c\gamma}{\sigma_{kInt}} \cdot \underline{III} \cdot \underline{H} = \beta_2 \cdot \underline{III} \cdot \underline{H}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \underline{S}_D \cdot \underline{II} \cdot (\langle \Phi(F) \rangle \cdot \underline{I} + \alpha \cdot \underline{\sigma}_k \cdot \underline{\sigma}_k^T \cdot \underline{II} \cdot \underline{S}_D), \\ \alpha &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{kInt}} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial F} \cdot \frac{1}{\sigma_0} - \langle \Phi(F) \rangle \cdot \frac{1}{\sigma_{kInt}} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Zanalizujemy własności symetrii macierzy $\underline{\hat{D}}$. Macierz \underline{H} jest macierzą symetryczną, ponieważ iloczyny $\underline{S}_D \cdot \underline{II}$ i $\underline{S}_D \cdot \underline{II} \cdot \underline{\sigma}_k \cdot \underline{\sigma}_k^T \cdot \underline{II} \cdot \underline{S}_D$ mają tę własność. Z kolei we wzorze

(3.10) występuje iloczyn macierzy $\frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \left(\underline{I} - \Theta \cdot \delta t_{n+1} \cdot \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\varepsilon}^a} \right)^T$. Własność symetrii

ma iloczyn $\frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \frac{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}^a}{\partial \underline{\varepsilon}^a} = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \underline{H}^T \cdot \underline{III} \cdot \underline{H}$. Z powyższych własności wynika, że macierz sprężysto-lepkoplastyczna dla wzmocnienia kinematycznego jest symetryczna.

5. Stabilność procedury numerycznej

Ponieważ metoda Newtona-Raphsona jest zbieżna [1], [4] z wyjątkiem „patologicznych” przypadków, dlatego też należy określić jedynie jej stabilność.

Zapiszemy w wersji różniczkowej równania konstytutywne i równowagi wykorzystując model lepkoplastyczny ze wzmocnieniem kinematycznym

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\sigma}} &= \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \dot{\underline{u}} - \underline{D} \dot{\underline{\varepsilon}}^a, \\ \int_V \underline{B}^T \cdot \dot{\underline{\sigma}} \cdot dV &= \dot{\underline{R}}.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Łącząc oba równania otrzymujemy:

$$\int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dV \cdot \dot{\underline{u}} = \dot{\underline{R}} + \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a \cdot dV,$$

stąd:

$$\dot{\underline{u}} = \underline{K}^{-1} \cdot \left(\dot{\underline{R}} + \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a \cdot dV \right), \quad (5.2)$$

gdzie:

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dV.$$

Przy zastosowaniu N punktów Gaussa w całkowaniu numerycznym

$$\int_V f \cdot dV = \sum_{i=1}^N w_i \cdot f_i \quad \text{oraz} \quad w_j > 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Łącząc zależności (5.1) i (5.2) dla wszystkich punktów Gaussa otrzymujemy

$$\dot{\underline{\Sigma}} = \underline{\bar{D}} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \left(\dot{\underline{R}} + \underline{\bar{B}}^T \cdot \underline{\bar{D}} \cdot \underline{W} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a \right) - \underline{\bar{D}} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a, \quad (5.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma} &= (\underline{\sigma}_1^T, \dots, \underline{\sigma}_N^T)^T; \quad \underline{\varepsilon}^a = (\underline{\varepsilon}_1^a, \dots, \underline{\varepsilon}_N^a)^T, \\ \underline{B} &= [\underline{B}_1^T, \dots, \underline{B}_N^T]^T, \\ \underline{\bar{D}} &= \begin{bmatrix} \underline{D}_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{D}_N \end{bmatrix}, \quad \underline{W} = \begin{bmatrix} w_1 \cdot \underline{I} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & w_N \cdot \underline{I} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Wprowadzając wzmocnienie kinematyczne poprzez naprężenie względne (2.1) możemy zapisać

$$\dot{\underline{\Sigma}}_k = \dot{\underline{\Sigma}} - c \cdot \underline{\bar{\Pi}} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}^a. \quad (5.4)$$

Zapiszemy równanie (2.7) w postaci

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^a = \underline{\Gamma} \cdot \underline{\sigma}_k \quad \text{lub} \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^a = \underline{\bar{\Gamma}} \cdot \underline{\Sigma}_k, \quad (5.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\underline{\Gamma} &= \frac{3}{2} \gamma \langle \Phi(F) \rangle \cdot \frac{\underline{\Pi} \cdot \underline{S}_D}{\sigma_{kint}}, \\ \underline{\bar{\Gamma}} &= \begin{bmatrix} \underline{\Gamma}_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{\Gamma}_N \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Wprowadzając powyższe równania do (5.3) otrzymamy

$$\dot{\underline{\Sigma}}_k = \underline{\bar{S}}_k \cdot \underline{W} \cdot \underline{\bar{\Gamma}} \cdot \underline{\Sigma}_k + \dot{\underline{T}}, \quad (5.6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\underline{\bar{S}}_k &= \underline{\bar{D}} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \underline{\bar{B}}^T \cdot \underline{\bar{D}} - (\underline{\bar{D}} + c \cdot \underline{\bar{I}}) \cdot \underline{W}^{-1}, \\ \dot{\underline{T}} &= \underline{\bar{D}} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \dot{\underline{R}}.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Sprowadziliśmy więc układ równań (5.1) do nieliniowego układu równań różniczkowych zwyczajnych względem $\underline{\sigma}_k$, tzn. $\dot{\underline{\Sigma}}_k = f(\underline{\Sigma}_k)$. Przy braku wzmocnienia dla $c = 0$ powyższy układ sprowadza się do wyprowadzonego w pracy [2]. Na wstępie musimy określić pewne własności macierzy w (5.6). Analizując macierz $\underline{\bar{S}}_k$ (5.7) oraz macierz $\underline{\bar{S}}_k = \underline{\bar{S}}$ bez wzmocnienia zauważamy, że

$$\underline{\bar{S}}_k = \underline{\bar{S}} - c \cdot \underline{\bar{\Pi}} \cdot \underline{W}^{-1}. \quad (5.8)$$

Jak stwierdzono w pracach [2], [3] macierz $\underline{\bar{S}}$ jest niedodatnio określona. Ze względu na charakter dodatnio określonej macierzy diagonalnej wag \underline{W} możemy wnioskować, że dla wzmocnienia, gdy $c > 0$, $\|c \underline{\bar{\Pi}} \underline{W}^{-1}\| > 0$. Oczywiście iloczyn $c \underline{\bar{\Pi}} \underline{W}^{-1}$ daje macierz symetryczną. Stąd wniosek, że $\underline{\bar{S}}_k$ jest macierzą symetryczną, niedodatnio określoną, rzeczywistą. Analizując równanie (5.5) możemy stwierdzić, że macierz $\underline{\Gamma}$ jest symetryczna, nieujemnie określona. Praktycznie macierz ta jest osobliwa jedynie w przypadku spełnienia warunku plastyczności. Ten warunek zostaje osiągnięty asymptotycznie jako rozwiązanie stacjonarne dla dużych czasów. Wynika to z niedodatniej określoności iloczynu $\underline{\bar{S}}_k \underline{W} \underline{\Gamma}$. Wówczas wartości własne $\lambda_k \leq 0$, co zapewnia asymptotyczną stabilność. Analiza stabilności numerycznej może być przeprowadzona w identyczny sposób jak w pracy [3], ponieważ macierze mają te same własności dla wzmocnienia kinematycznego, jak i bez wzmocnienia co pokazano powyżej.

Rozwiązanie w naprężeniach względnych $\underline{\Sigma}_k$ równania (5.6) można zapisać następująco

$$\underline{\Sigma}_{k(n+1)} = \underline{\Sigma}_{kn} + \delta t_{n+1} \cdot \underline{\bar{S}}_k \underline{L}_{n+\theta} \cdot \underline{\Sigma}_{k(n+\theta)}, \quad (5.9)$$

gdzie; $\underline{L} = \underline{W} \cdot \underline{\Gamma}$,

n — oznacza przyrost,

θ — jest parametrem aproksymacji liniowej.

Ostatecznie otrzymuje się identyczne kryterium stabilności postaci

$$\left| \frac{1 + \delta t_{n+1} \cdot (1 - \theta) \cdot \lambda_k^i}{1 - \delta t_{n+1} \cdot \theta \cdot \lambda_k^i} \right| \leq 1, \quad (5.10)$$

gdzie λ_k^i jest i -tą wartością własną macierzy $\underline{L} \underline{S}_k \underline{L}$.

Stąd wniosek, że dla $\theta \geq \frac{1}{2}$ warunek (5.10) zawsze będzie spełniony i otrzymamy algorytm z bezwarunkową stabilnością. Dla $\theta < \frac{1}{2}$ otrzymamy

$$\delta t_{n+1} \leq \frac{2}{(1 - 2\theta) \cdot \lambda} \quad (5.11)$$

gdzie $\lambda = \max |\lambda_k^i|$. Ponieważ λ_k^i zależy zarówno od $\underline{\Sigma}_{kn}$, jak i od $\underline{\Sigma}_{k(n+1)}$ (z wyjątkiem procedury Eulera dla $\theta = 0$) wówczas nie można z góry określić warunku (5.11).

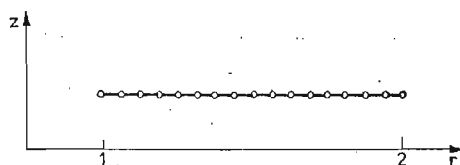
6. Zastosowania numeryczne

Do obliczeń wybrano przykład rury grubościennej i zbiornika kulistego obciążonych ciśnieniem wewnętrznym. Przykłady te są rozwiązane w literaturze, dlatego jest możliwe porównanie wyników. W obu wypadkach zastosowano prawo konstytutywne lepkoplastyczne postaci (2.7) z funkcją potęgową $\Phi(F) = F^n$.

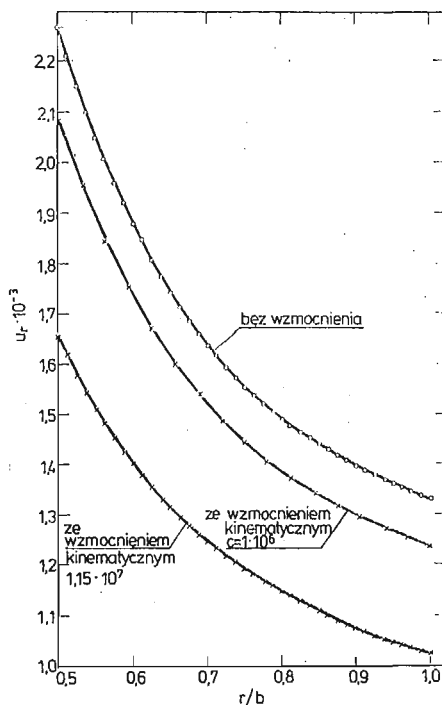
6.1. Nieskończenie długa rura grubościenna. Przykład ten zanalizowano w pracy [3] dla lepkoplastyczności bez wzmocnienia.

Dane materiałowe:

moduł Younga	$E = 3 \cdot 10^7$
ułamek Poissona	$\nu = 0.3$
granica plastyczności	$\sigma_0 = 3 \cdot 10^4$
wskaźnik potęgowania	$n = 1.$
lepkość	$\gamma = 1 \cdot 10^{-8}$
współczynnik wzmocnienia	$c = 1.15 \cdot 10^7$
	$c = 4.5 \cdot 10^6$
	$c = 1 \cdot 10^6$



Rys. 2. Rura grubościenna. Dyskretyzacja.



Rys. 3. Rura grubościenna. Wykresy przemieszczeń u_r , r — oznacza promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7];

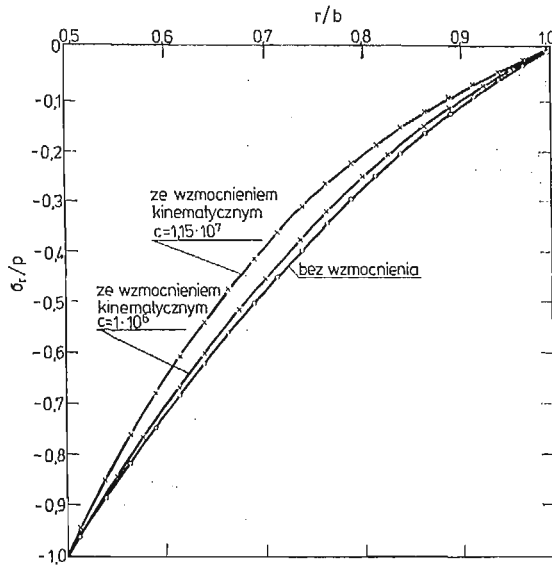
- + — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów; wartości przemieszczenia w węzłach elementów; $c = 10^6$,
- obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 20 elementów; wartości przemieszczenia w węzłach elementów; $c = 10^6$,
- o — bez wzmocnienia,
- + — ze wzmocnieniem kinematycznym $c = 1,15 \cdot 10^7$.

Zastosowano osiowo-symetryczne trójwęzłowe elementy Lagrange'a z ograniczoną możliwością odkształceń $\varepsilon_z = 0$ w kierunku osi symetrii oraz całkowanie numeryczne dwupunktowe kwadraturą Gaussa. Dyskretyzowano przekrój na 8 i 20 elementów otrzymując odpowiednio 17 i 41 węzłów. Wykonane obliczenia miały na celu potwierdzenie rozważań teoretycznych, związanych z bezwarunkową stabilnością dla $\Theta \geq \frac{1}{2}$ i dowolnie dużych przyrostów czasu δt oraz uzyskanie rozwiązań dla pośrednich czasów. Ponieważ można uzyskać rozwiązanie sprężysto-plastyczne dla dużych czasów, z tego więc względu przyjęto przyrost czasu $\delta t = 10^{10}$ (przebadano również większe przyrosty czasu $\delta t \leq 10^{12}$ uzyskując te same wyniki). Rozwiązaniem startowym było rozwiązanie „czysto” sprężyste. Dla różnych wartości parametru aproksymacji Θ testowano zacieranie się procedur. Podobnie jak w przypadku bez wzmocnienia [3] dla $\Theta \geq \frac{1}{2}$ algorytm miał bezwarunkową stabilność, jednakże dokładność zależała od wartości przyrostu czasu δt . Dla $\Theta = 1$ niezależnie od wielkości δt otrzymano bardzo dokładne wyniki dla stanu ustalonego zarówno dla naprężeń jak i przemieszczeń (Rys. 3÷6). Pominięcie wpływu $\frac{\partial \dot{\varepsilon}^a}{\partial \varepsilon^a}$ w procedurze, co odpowiada stosowaniu metody początkowych obciążeń względem ε^a , powoduje znaczne błędy w obliczeniach dla dużych δt . Dla małych δt zmniejsza się ten wpływ w macierzy „wzmocnienia” \underline{G} i tym samym błędy maleją. Jednakże dla obliczeń sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem, gdy jest wymagany duży krok czasu δt , powinno stosować się przedstawioną procedurę. Wykonano obliczenia bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym dla różnych współczynników (Rys. 3÷6). W zakresie bez wzmocnienia wyniki porównano z zamieszczonymi w pracach [6], [7] z odpowiednimi ułamkami Poissona, tzn. $\nu = 0.3$, $\nu = 0.25$. Otrzymano bardzo dobre wyniki.

W pracy [7] przedstawiono rozwiązywanie zagadnienia sprężysto-plastycznej rury ze wzmocnieniem liniowym. W celu sprawdzenia wyników równań różniczkowych zwyczajnych wyprowadzony w powyższej pracy rozwiązaliśmy metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. We wszystkich przypadkach zgodność wyników jest bardzo dobra i praktycznie dla 8 elementów warunek plastyczności jest spełniony idealnie w każdym punkcie Gaussa. Dla $\Theta = 1$ już w drugim przyroście osiąga się stan ustalony. Liczba iteracji nie przekraczała pięciu. Oczywiście również w zakresie przemieszczeń zgodność jest bardzo dobra z błędem poniżej 0.03%.

6.2. Grubościenny zbiornik kulisty. Zastosowano trójwęzłowe elementy Lagrange'a oraz dwupunktową kwadraturę Gaussa do całkowania numerycznego. Dane materiałowe przyjęto takie same jak w przypadku rury grubościennej (pkt. 6.1.) Ciśnienie wewnętrzne było stałe i wynosiło $p = 40000$. Obliczenia wykonano dla 8 elementów z 17 węzłami. Podobnie jak w poprzednim przykładzie otrzymano bardzo dokładne wyniki dla $\Theta = 1$ niezależnie od wielkości przyrostu δt . Dla mniejszych wartości $\Theta \in \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ pomimo bezwarunkowej stabilności dokładność pogarszała się. Dla $\Theta = 0$ warunkowo stabilna procedura zmuszała do stosowania dużej liczby przyrostów.

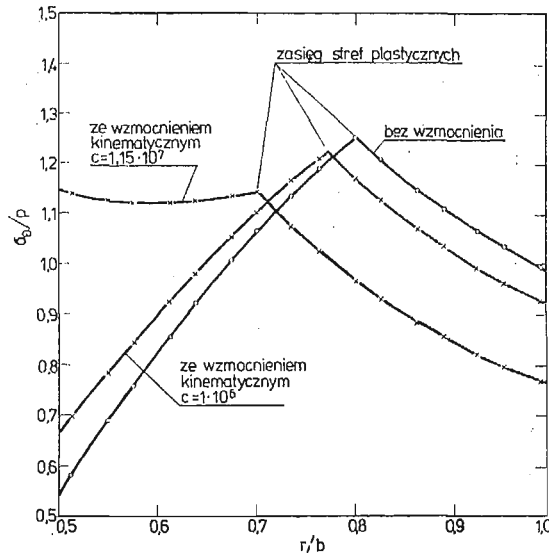
Wyniki porównano z własnymi obliczeniami według rozważań z pracy [7] zarówno dla wzmocnienia liniowego jak i bez wzmocnienia. Na kolejnych rysunkach 7, 8 oraz 9



Rys. 4. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń promieniowych σ_r/p ;

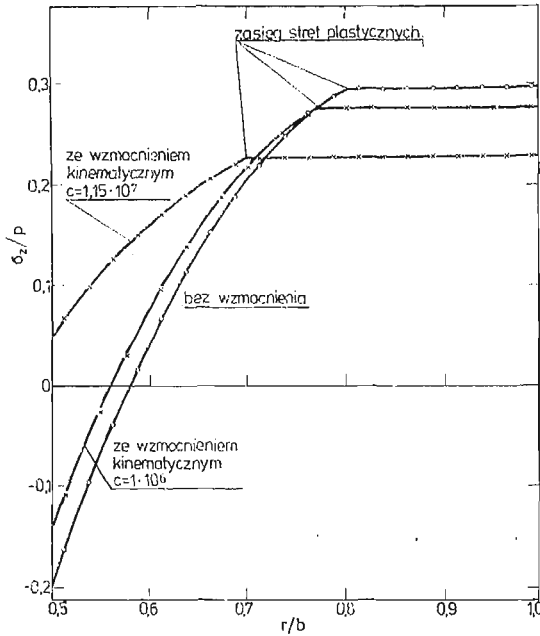
p — oznacza ciśnienie wewnętrzne, r — oznacza promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7].
 + — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów trójwęzłowych oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości w punktach Gaussa, dla wzmacnienia kinetycznego $c = 1,15 \cdot 10^6$,
 — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 20 elementów trójwęzłowych; wartości naprężeń w środku elementów:

o — bez wzmacnienia,
 + — ze wzmacnieniem kinematycznym $c = 1,15 \cdot 10^7$.



Rys. 5. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń obwodowych σ_θ/p ;

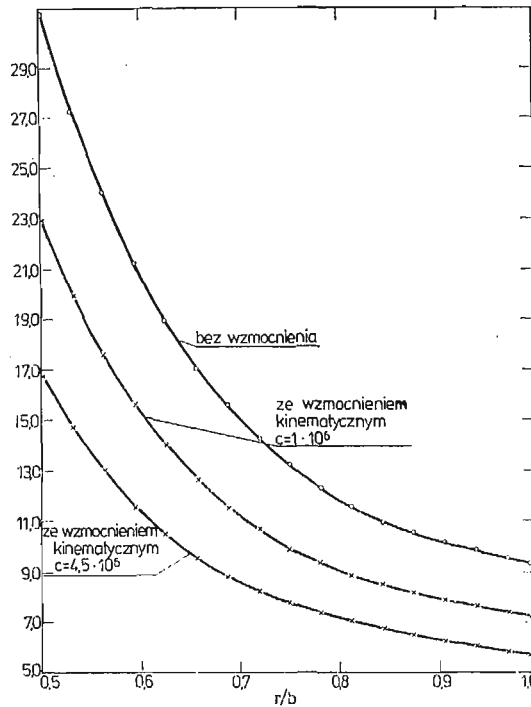
p — oznacza ciśnienie wewnętrzne, r — promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7];
 + o — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości naprężenia w punktach Gaussa.



Rys. 6. Rura grubościenna. Wykresy naprężeń osiowych σ_z/p ; p — oznacza ciśnienie wewnętrzne, r — promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7];

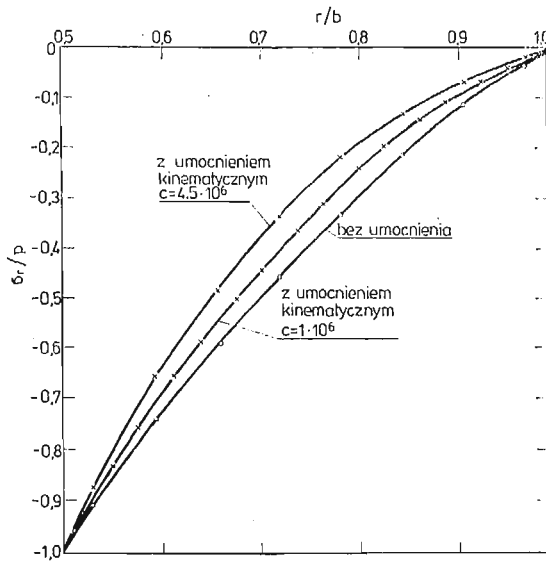
+ — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości naprężeń w punktach Gaussa, wzmacnienie $c = 1 \cdot 10^6$,
 — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 20 elementów trójwęzłowych; wartości naprężeń w środku elementów:

o — bez wzmacnienia,
 + — ze wzmacnieniem kinematycznym $c = 1,15 \cdot 10^7$.



Rys. 7. Zbiornik kulisty. Wykresy przemieszczeń u_r ; r — oznacza promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7];

+ o — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości przemieszczeń w węzłach elementów.



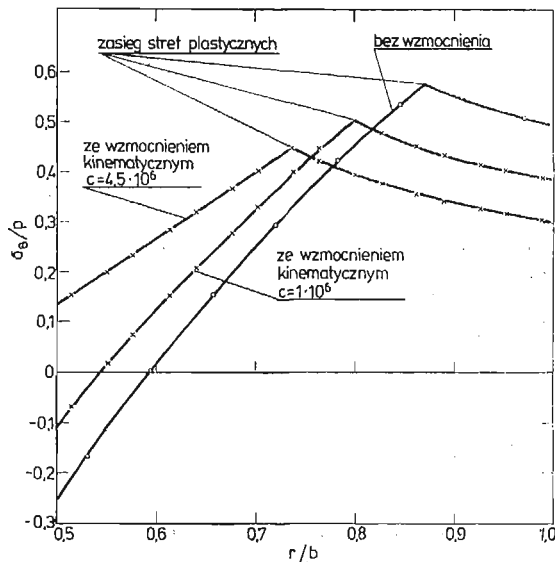
Rys. 8. Zbiornik kulisty. Wykresy naprężeń promieniowych σ_r/p ;

p — oznacza ciśnienie wewnętrzne, r — promień, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7].

+ — obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa do całkowania numerycznego; wartości naprężeń w punktach Gaussa, wzmocnienie kinematyczne $c = 10^6$,

— obliczenia metodą elementów skończonych z zastosowaniem 8 elementów oraz dwupunktowej kwadratury Gaussa; wartości naprężeń w środkach elementów:

o — bez wzmocnienia,
+ — ze wzmocnieniem.



Rys. 9. Zbiornik kulisty. Wykresy naprężeń obwodowych σ_θ/p ;

p — oznacza ciśnienie wewnętrzne. Dyskretyzacja — 8 elementów trójwęzłowych, linie ciągłe — obliczenia według pracy [7].

o — obliczenia metodą elementów skończonych dla środków elementów,

+ — obliczenia metodą elementów skończonych dla dwupunktowej kwadratury Gaussa całkowania numerycznego; wartości naprężeń w punktach Gaussa.

przedstawiono wyniki dla przemieszczeń i naprężeń dla parametru aproksymacji liniowej $\Theta = 1$. Przyjęto przyrost czasu $\delta t = 10^\circ$. Dla innych przyrostów czasu δt otrzymano praktycznie identyczne wyniki, z tym że dla mniejszych δt wymagana była większa liczba przyrostów w celu osiągnięcia stanu ustalonego.

7. Wnioski

Przedstawiony iteracyjno-przyrostowy algorytm typu Newtona-Raphsona umożliwia efektywne rozwiązywanie zarówno zagadnień quasi-statycznej sprężysto-lepkoplastyczności jak i sprężysto-plastyczności z uwzględnieniem wzmocnienia kinematycznego. Pokazano kryteria stabilności procedury z bezwarunkową stabilnością dla parametru aproksymacji liniowej $\Theta \geq \frac{1}{2}$. Zanalizowano własności macierzy sztywności oraz macierzy występujących w nieliniowym układzie równań różniczkowych zwyczajnych (punkt 5.).

Praca jest rozszerzeniem rozważań poprzednich publikacji nie uwzględniających wzmocnienia albo stosujących procedury warunkowo stabilne ze względu na wielkość przyrostu czasu δt . Zamieszczono przykłady numeryczne potwierdzające rozważania teoretyczne. Dalszych prac wymagają rozważania dotyczące innych modeli wzmocnienia i w tym kierunku prowadzone są przygotowania.

Literatura

1. J. H. ARGYRIS, L. F. VAZ, K. J. WILLAM, *Improved solution methods for inelastic rate problems*, Comp. Meth. in App. Mech. and Eng. 16, 31 - 77, 1978.
2. I. CORMEAU, *Numerical stability in quasi-static elasto/viscoplasticity*, Int. J. for Num. Meth. in Eng. 9, 109 - 127, 1975.
3. T. J. R. HUGHES, R. L. TAYLOR, *Unconditionally stable algorithms for quasistatic elasto/visco-plastic finite element analysis*, Comp. Struct. 8, 159-173, 1978.
4. M. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN-Warszawa-Poznań 1985.
5. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN 1966.
6. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley 1951.
7. W. W. SOKOŁOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN 1956.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, I. CORMEAU, *Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids — a unified numerical solution approach*, Int. J. for Num. Meth. in Eng. 8, 821 - 845, 1974.

Резюме

РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ УПРОЧНЕНИЕМ

Применен метод конечных элементов для квази-статических проблем упруго-вязкопластичности с учетом кинематического упрочнения. Представлен итерационный алгоритм типа Ньютона-Рафсона используя линейную аппроксимацию с параметром Θ . Показано, что для $\Theta \geq \frac{1}{2}$ алгоритм является безусловно стабильным. Приведены численные примеры, подтверждающие теоретическое решение

S u m m a r y

SOLUTIONS OF QUASI-STATIC PROBLEMS OF ELASTO-VISCOPLASTICITY WITH
KINEMATIC HARDENING

The finite element method is applied to quasi-static elasto-viscoplasticity with kinematic hardening. Newton-Raphson algorithm with linear approximation is developed. Unconditional stability for the approximation parameter $\Theta \geq \frac{1}{2}$ is shown. Selected examples illustrate theoretical investigations.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 lipca 1986 roku.
