

## ANALITYCZNY OPIS WYNIKÓW BADAŃ NA ZMĘCZENIE JEDNYM RÓWNANIEM NA PRZYKŁADZIE WYBRANYCH TWORZYW SZTUCZNYCH

MARIAN NOWAK

*Politechnika Wroclawska*

### 1. Wstęp

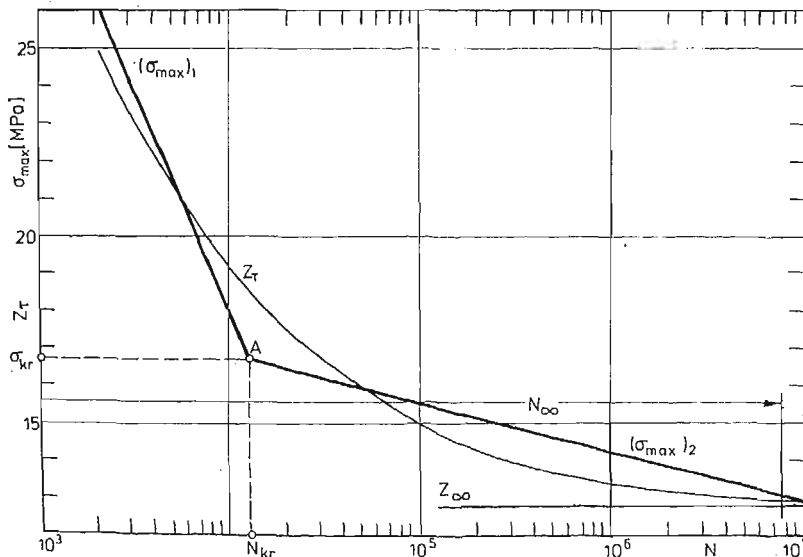
Wykresy zmęczenia tworzyw sztucznych składają się w przedziale  $N = 10^3 \div 10^7$  z dwóch przecinających się w punkcie A prostych o równaniach (rys. 1):

$$(\sigma_{\max})_1 = a_1 - b_1 \cdot \log N \quad (1)$$

$$(\sigma_{\max})_2 = a_2 - b_2 \cdot \log N \quad \text{albo} \quad (\sigma_{\max})_2 = Z_{\infty} \quad (2)$$

w których współczynniki  $a_1$  i  $a_2$  oraz  $b_1$  i  $b_2$  określa się metodą najmniejszych kwadratów. Współrzędne punktu A to :  $N_{kr}$  — krytyczna liczba cykli,  $\sigma_{kr}$  — krytyczne naprężenie. Zmiana kąta pochylenia wykresu zmęczenia z  $\text{tg } \alpha_1 = b_1$  na  $\text{tg } \alpha_2 = b_2$  odpowiada dwom rodzajom zmęczenia:

a) zmęczeniu o charakterze cieplnym, tj. gdy  $\sigma_{\max} > \sigma_{kr}$  i pierwszoplanowym czynni-



Rys. 1. Wykres zmęczenia Tarnamidu T-27 ( $\tau = 7$  mies.,  $\sigma = 2$ )

kiem dekohezji jest temperatura samowzbudna, o przybliżonej wartości  $\Delta T \sim \sigma_a^n \cdot C$ , ( $n, C$  — stałe); stan cieplny próbki — niestacjonarny;

b) zmęczeniu typowo mechanicznemu, tj. gdy  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{kr}$ ; stan cieplny próbki — stacjonarny.

Już w początkach rozwoju badań zmęczeniowych podejmowano próby opisu wyników pomiaru  $N(\sigma_{\max})$  jednym równaniem. Chronologiczne zestawienie tych równań wskazuje (tabl. 1), że są one coraz bardziej złożone, a więc w coraz mniejszym stopniu funkcjonalne.

Tablica 1. Równania wykresów zmęczenia

Nr	Autor	Równanie	Parametry	Uwagi
1	Basquin 1910r	$\sigma = bN^{-a}$	a, b	[8], [9]
2	Basquin	$\sigma^m N = Z^m N_{kr} = b^m$	m, b	[8]
3	Stromeyer 1914	$\sigma = \sigma_r + bN^{-a}$	$\sigma_r, a, b$	[10]
4	Ludwik, Scheu 1923	$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} + Ca^x; x = N^k$	C, a, k	[11]
5	Palmgren 1924	$k = C(an+e)^x + u$	C, e, x, u	[12]
6	Corson 1949	$N = \frac{A}{(\sigma - K)^{a(b-k)}}$	A, K, d	[13]
7	Weibull 1949	$\sigma = \sigma_r + b(N+B)^{-a}$	$\sigma_r, a, b, B$	[14], [15]
8	Bennett i Baker 1950	$\frac{1}{\sigma} = a \cdot \log N + b$	a, b	[16]
9	Epremian i Mehl 1952	$\frac{\sigma - Z}{R - Z} = 1 - \Phi(a \log N + C)$	a, c, Z, R	[17]
10	Weibull 1952 Stüssi 1953	$\frac{\sigma - Z}{R - Z} = e^{-a(\log N)^m}$	Z, a, m, R	[14], [18]
11	Stüssi 1955	$\frac{\sigma - Z}{R - Z} = bN^{-a}$	Z, b, a, R	[19]
12	Bastenaire 1957	$N = \frac{A}{\sigma - Z} \exp[-\alpha(\sigma - Z)]$	A, $\alpha, Z$	[20], [21]
13	Pocztienyj 1967	$N = \frac{Q}{\sigma} \ln \left\{ 1 + \left[ \exp \frac{\sigma - Z}{v_0} - 1 \right]^{-1} \right\}$	$v_0, Q, Z$	[1]
14	Dmitriczenko 1971	$N = A \exp(-\alpha\sigma)$	A, $\alpha$	[1]

Zgromadzenie liczego zbioru wykresów zmęczenia tworzyw sztucznych zainspirowało autora do poszukiwania takiej funkcji, za pomocą której można byłoby opisać wyniki pomiarów w obszarze ZO i ZZ jednym równaniem. Cel pracy sformułowano zatem następująco: na przykładzie wybranych, konstrukcyjnych tworzyw sztucznych (tabl. 2) udokumentować możliwość i celowość stosowania równania dwuskładnikowego (3), w którym jeden — to funkcja odpowiadająca funkcji rozkładu normalnego.

Tablica 2. Własności mechaniczne wybranych tworzyw sztucznych

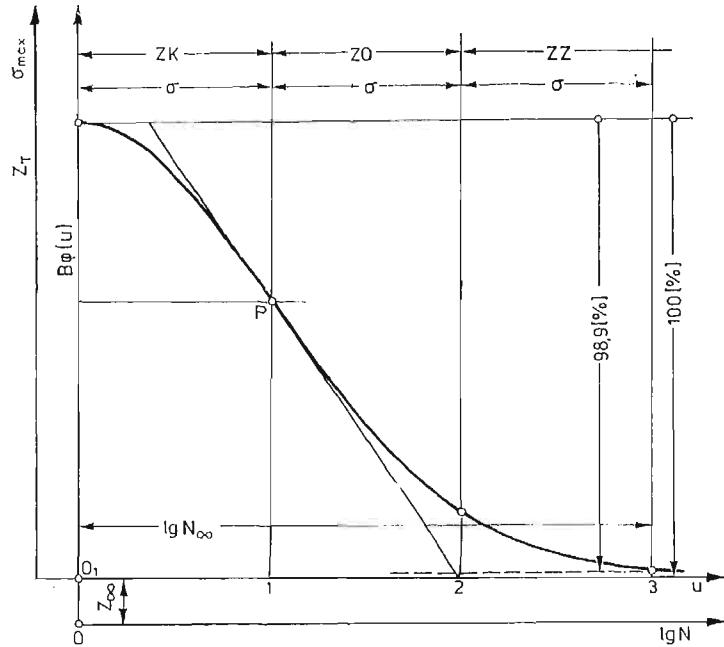
Lp.	Materiał	Nazwa handlowa	Zawartość napelnicza (zbrojenia) [%]	$\sigma_2^*$ [MPa]	$E_g$ [MPa]
1	Poliamid 6	Tarnamid T-27	0	75	720
2	Poliamid 6 wzmocniony szkłem	Itamid 25	25	100	4000
3		Itamid 35	35	110	4500
4		Itamid S-2	60	110	8000
5	Politereftalan etylenowy	Elana 2	0	70	2500
6	Politereftalan etylenowy wzmocniony włóknem szklanym	Elit 25	25	120	7500
7		Elit 25u	25	130	7500
8		Elit 30 EX	30	135	8300
9	Poliwęglan	Bistan AW	0	60	2300
10	Poliwęglan wzmocniony	Bistan AS-20	20	92	5900

\*<sup>o</sup> PN-81/C-89034 Tworzywa sztuczne. Oznaczanie cech wytrzymałościowych przy statycznym rozciąganiu

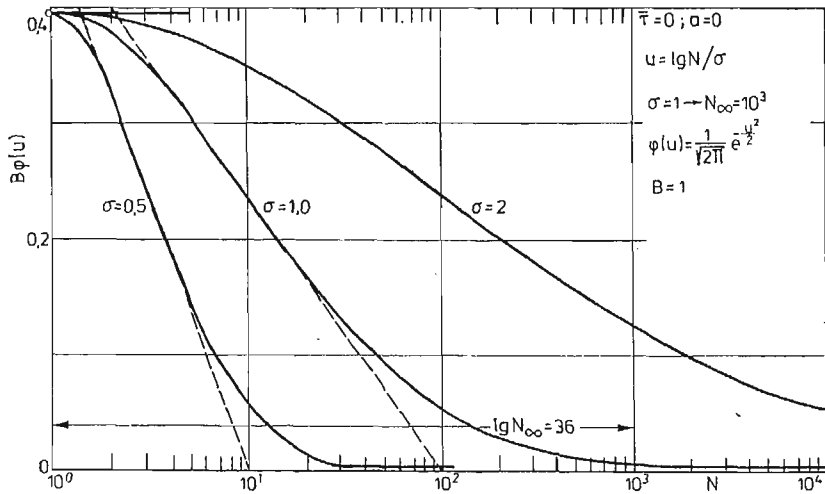
## 2. Analiza zagadnienia

Równania wykresów zmęczenia powinny z małym błędem (np. z błędem względnym nie większym niż 6%) opisywać wyniki pomiarów i posiadać minimalną liczbę parametrów. Najbardziej rozpowszechnione są funkcje potęgowe i wykładnicze (tabl. 1). Wadą równań, zbudowanych na ich bazie, jest [1]: duży błąd aproksymacji, a szczególnie dla naprężeń bliskich granicy zmęczenia lub naprężeń krytycznych  $\sigma_{kr}$  oraz trudności w określaniu parametrów, gdy ich liczba jest większa od dwóch.

Do opisu wyników badań na zmęczenie jednym równaniem autor zaproponował funkcję odpowiadającą funkcji rozkładu normalnego (rys. 2) w formie unormowanej,



Rys. 2. Pełny wykres zmęczenia w układzie  $\sigma_{\max}$ – $\log N$  z zaznaczonymi schematycznie obszarami: ZK — wytrzymałość zmęczeniowa przy małej liczbie cykli (oznaczenia wg Kocańdy [22]); ZO — ograniczona wytrzymałość zmęczeniowa; ZZ — obszar trwałej lub umownej wytrzymałości zmęczeniowej P — punkt przegięcia



Rys. 3. Wykresy rozkładu normalnego w układzie półlogarytmicznym  $B\varphi(u) \sim \log N$

w układzie półlogarytmicznym (rys. 3). Nowe równanie w tym zagadnieniu ma postać (rys. 2):

$$Z_{\tau} = Z_{\infty} + B\varphi(u) \begin{cases} \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \\ u = \frac{\log N - a}{\sigma} \end{cases} \quad (3)$$

gdzie:  $Z_{\infty}$  — równanie asymptoty;  $B$  — stała;  $\varphi(u)$  — gęstość unormowana zmiennej losowej normalnej [2];  $a$  — wartość średnia zmiennej losowej;  $\sigma$  — odchylenie standardowe (PN-74/N-01051).

Zaletą równania (3) jest to, że stałą  $B$  można określić, zależnie od sformułowanego celu badań, według różnych metod i kryteriów aproksymacji, np.:

A. Metod matematycznych [3]

1. jednakowych błędów
2. metodą najmniejszych kwadratów,
3. metodą wybranych punktów.

B. Kryteriów wytrzymałościowych — stałą  $B$  dobieramy tak, aby:

4. błąd aproksymacji był mały w zakresie małej liczby cykli (czyli  $\sigma_{\max} > \sigma_{kr}$ );
5. błąd aproksymacji był mały w zakresie dużej liczby cykli ( $\sigma_{\max} \leq \sigma_{kr}$ ).

Tablica 3. Opis wykresów zmęczenia jednym równaniem (3); asymptotę  $Z_{\infty}^*$  określono wg wzoru (5)

Lp.	Materiał	$Z_{90}(10^7)$ z równań regresji (2) [MPa]	$Z_{90}(10^7)$ z równań rozkładu normalnego (3) [MPa]	$\Delta Z_{\tau}$ [MPa]	$Z_{\tau}^* = Z_{\infty}^* + B\varphi(u)$ [MPa]		$10^{-7} N_{\infty}$ [cykle]
					$Z_{\infty}^*$	$B$	
1	Tarnamid T-27	12,9	12,91	0	12,8	122,4	0,75
2	Itamid 25	24,0	24,37	-0,37	23,33	151,4	5,70
3	Itamid 35	25,0	25,47	-0,47	24,23	174,2	6,40
4	Iramid S-2	39,6	39,36	+0,24	39,44	180,5	0,25
5	Elana 2	16,4	17,09	-0,69	15,51	160,6	20,10
6	Elit 25	26,3	26,28	0	26,00	310,6	1,00
7	Elit 25u	31,2	31,98	-0,78	30,02	269,1	9,30
8	Elit 30 EX	34,5	34,69	0	34,10	652,5	1,00
9	PW	7,6	7,83	0	7,50	408,7	5,00
10	Bistan AS-20	18,6	19,23	-0,63	17,77	189,3	11,50

A więc możliwości dostosowania równania (3) do wymienionych metod i kryteriów aproksymacji są szerokie i wyczerpują wymagania obliczeń wytrzymałościowych tworzyw sztucznych na zmęczenie [4, 5].

Dowolny zbiór wyników pomiarów na zmęczenie może być zatem opisany, zależnie od potrzeb wytrzymałościowych lub interpretacyjnych, dwoma równaniami prostych regresji (1) i (2) lub jednym równaniem rozkładu normalnego (3), względnie jednym i drugim typem równania.

Podstawą określania  $Z_{\infty}$  są własności rozkładu normalnego (rys. 2):

$$Z_{\infty} = 0,989 \cdot (Z_{g0})_{\min} \quad (4)$$

czyli wybrany punkt o współrzędnych  $[N_G, (Z_{g0})_{\min}]$ . Wybrany punkt może być również granica zmęczenia  $Z_{g0}(10^7)$  obliczona z równania prostej regresji (2). Wówczas równanie wykresu zmęczenia wg rozkładu normalnego (3), w którym B określono jedną z wymienionych metod, należy przesunąć równolegle (tabl. 3) o wielkości  $\Delta Z_{\tau}$ :

$$Z_{\tau}^* = (Z_{\infty} \pm \Delta Z_{\tau}) + B\varphi(u) = Z_{\infty}^* + B\varphi(u) \quad (5)$$

gdzie:

$$\Delta Z_{\tau} = \sigma_{\max}(10^7) - Z_{\tau}(10^7) \quad \text{albo} \quad \Delta Z_{\tau} = (a_2 - 7b_2) - Z_{\tau}(10^7) \quad (6)$$

Do wstępnej oceny możliwości dopasowania rozkładu normalnego do wyników doświadczalnych można zastosować dwa parametry (tabl. 4):

1. parametr naprężenia  $\lambda$ ,
2. parametr liczby cykli  $\psi$ .

Tablica 4. Wartości granicy zmęczenia, naprężeń krytycznych i parametrów  $\lambda$  i  $\psi$

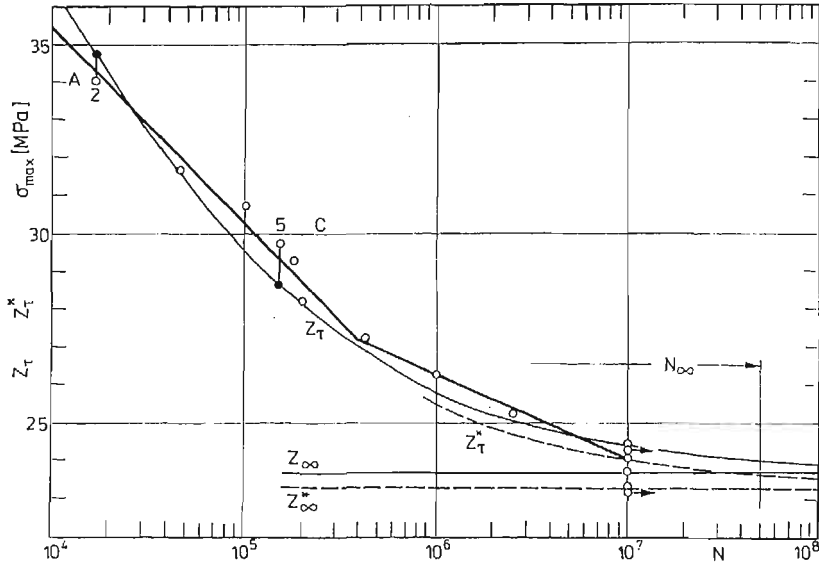
Lp.	Materiał	rys.	$Z_{g0}(10^7)$ [MPa]	$\sim \sigma_{kr}$ [MPa]	$\sim N_{kr}$ [cykle]	$\lambda = \frac{Z_{g0}}{\sigma_{kr}}$	$\psi = \frac{N_G}{N_{kr}}$
1	Tarnamid T-27	1	12,9	16,7	13 000	0,77	769
2	Itamid 25	4	24,0	27,1	400 000	0,89	25
3	Itamid 35	5	25,0	26,6	$10^6$	0,94	10
4	Itamid S-2	6	39,6	42,8	40 000	0,93	250
5	Elana 2 (PTE)	7	16,4	23,7	55 000	0,69	182
6	Elit 25	8	26,3	29,0	150 000	0,91	66
7	Elit 25u	9	31,2	33,2	$2 \cdot 10^6$	0,94	5
8	Elit 30EX	10	34,5	36,0	$10^6$	0,96	10
9	Poliwęglan (PW)	11	7,6	10,6	300 000	0,72	33
10	Bistan AS-20	12	18,6	19,5	$3 \cdot 10^6$	0,95	3

Tablica 5. Równania prostych regresji i rozkładu normalnego, opisujące wyniki pomiarów na zmęczenie wybranych tworzyw sztucznych

Lp.	Materiał	$\sigma_{\max} = a - b \cdot \log N$ , [MPa]						$Z_r = Z_{\infty} + B\varphi(u)$ [MPa]		max. $\Delta_3$ [%]
		$\sigma_{\max} > \sigma_{kr}$		max. $\Delta_1$ [%]	$\sigma_{\max} < \sigma_{kr}$		max. $\Delta_2$ [%]	$Z_{\infty}$	B	
		$a_1$	$b_1$		$a_2$	$b_2$				
1	Tarnamid T-27	65,9871	12,0055	1,82	21,9764	1,2926	2,55	12,8	122,4	10,96
2	Itamid 25	56,2741	5,2110	4,92	39,4000	2,2000	3,45	23,7	151,4	4,79
3	Itamid 35	64,7931	6,3251	3,55	36,2000	1,6000	7,76	24,7	174,2	6,53
4	Itamid S-2	92,6434	10,8695	2,15	49,0307	1,3531	1,68	39,2	180,5	3,51
5	Elana 2	100,2442	16,1395	0,20	39,1237	3,2494	4,17	16,2	160,6	3,81
6	Elit 25	89,0548	11,6686	5,96	35,8729	1,3693	1,15	26,0	310,6	5,52
7	Elit 25u	71,3076	6,0437	2,13	53,8369	3,2299	0,10	30,8	269,1	2,83
8	Elit 30 EX	92,5559	9,3983	1,65	43,3133	1,2656	0,40	34,1	652,5	3,22
9	PW	67,1983	10,3838	7,12	21,6532	2,0015	2,35	7,5	408,7	4,64
10	Bistan AS-20	46,2481	4,1269	3,90	30,6480	1,7211	0,10	18,4	189,3	4,04

$\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  — błąd aproksymacji wyników pomiaru równaniem (1), (2) i (3)

Z obliczeń wynika, że mały błąd aproksymacji może być wówczas, gdy  $\psi$  jest również małe, np.  $\psi < 200$  (Tarnamid T-27, tabl. 4). Parametr  $\psi$  jest bardziej czułym kryterium niż parametr naprężenia  $\lambda$ .



Rys. 4. Wykres zmęczenia Itamidu 25 ( $\tau = 10$  mies.,  $\sigma = 2,33$ ); błąd względny  $\Delta_2 \approx \Delta_5$

Spośród zbioru wykresów zmęczenia o liczebności  $n > 100$  opisano przykładowo dziesięć (tabl. 5, rys. 1 oraz rys. 4÷12) dla materiałów, których własności wytrzymałościowe zawiera tablica 2. Wyboru dokonano na podstawie parametru liczby cykli tak, aby przedział zmienności  $\psi$  był szeroki ( $3 \leq \psi \leq 800$ ), tzn. uwzględnił różne charakterystyki wytrzymałościowe tworzyw sztucznych oraz czas starzenia  $\tau$ .

Z własności funkcji  $\varphi(u)$  — rys. 2 — oraz wykresów zmęczenia wynika (rys. 1 oraz 4÷12), że istnieje możliwość opisu wyników pomiarów wytrzymałości zmęczeniowej szerokiej klasy materiałów, szczególnie tych, które mają nieograniczoną wytrzymałość zmęczeniową, a więc przede wszystkim metali. Gdy natomiast materiał charakteryzuje krzywa monotonicznie malejąca, jak to występuje w przypadku tworzyw sztucznych, to obszar ważności równania (3) jest ograniczony do  $N_G$  (bazy próby zmęczeniowej) lub  $N_\infty$  (wartości większej, tabl. 3):

$$N_g \leq N_G \quad \text{lub} \quad N_g \leq N_\infty \quad (7)$$

gdzie

$$\log N_\infty = a + u\sigma = u\sigma; \varphi(u) = \frac{0,011 \cdot Z_\infty}{B} \quad (8)$$

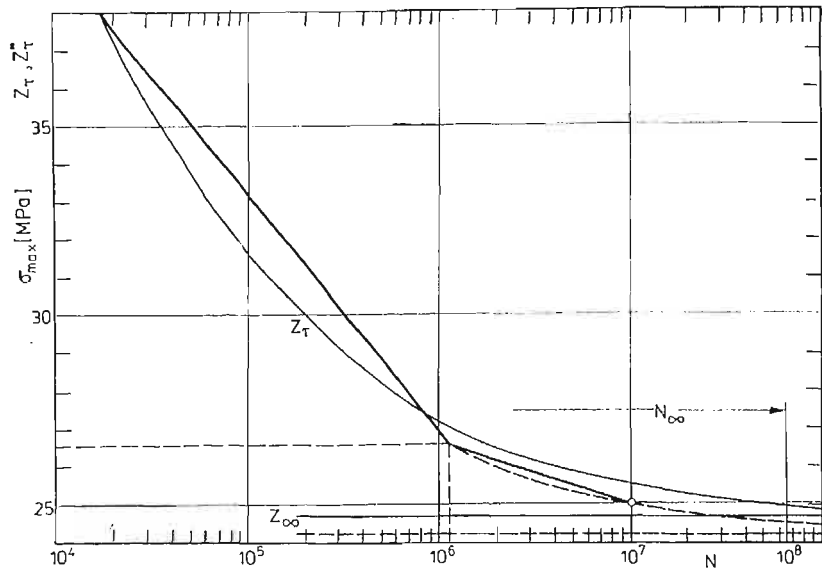
Wyznaczenie stałej  $B$  i parametru  $\sigma$  równania (3) jest zabiegiem prostym ze względu na unormowanie zmiennej. W związku z tym nie ma potrzeby korzystania z ETO. W przypadku konstruowania większej liczby wykresów celowym jest jednak napisanie programu, w tym również ze względu na dokładniejsze dopasowanie wartości  $B$  i  $\sigma$  do wyników pomiaru (tabl. 6).



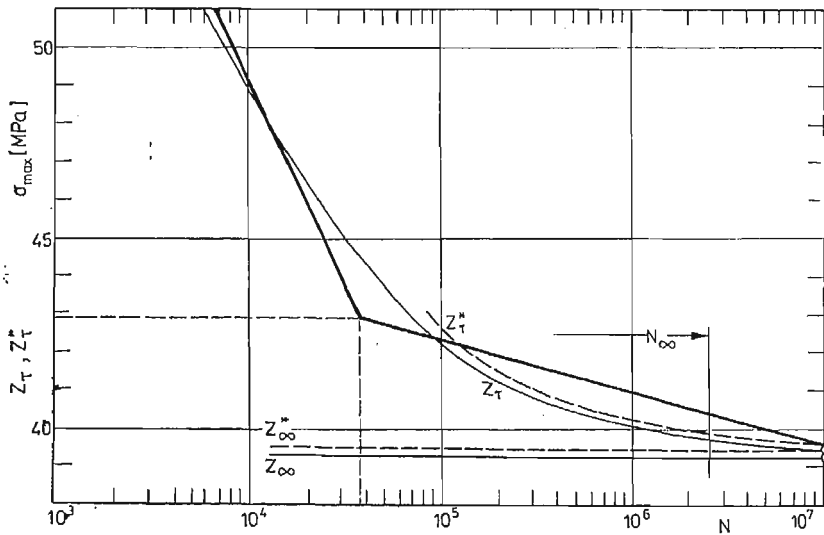
Tablica 6. Porównanie stałej  $B$  równania  $Z_t = Z_{\infty} + B\varphi(t)$  i parametru  $\sigma$  obliczonych na kalkulatorze i wg programu ETO — Fortran

Lp.	Materiał	$\sigma$ (odchylenie standardowe)		$B$		Błąd aproxymacji $\Delta$ [%]	
		KAL <sup>1)</sup>	ETO	KAL	ETO	KAL	ETO
1	Tarnamid T-27	2,00	1,875	122,4	155,86	10,96 <sup>2)</sup>	8,98
2	Itamid 25	2,33	2,513	151,4	108,68	4,00	2,61
3	Itamid 35	2,33	2,515	174,2	129,55	6,53	4,79
4	Itamid S-2	2,00	2,262	180,5	109,73	3,51	3,49
5	Elana 2	2,40	2,425	160,6	139,74	3,81	4,02
6	Elit 25	2,00	1,832	310,6	511,56	5,52	4,97
7	Elit 25u	2,33	2,360	269,1	251,86	2,63	2,85
8	Elit 30 EX	2,00	1,997	652,5	667,67	3,22	2,70
9	PW	2,00	1,992	408,7	406,81	4,64	5,10
10	Bistan AS-20	2,33	2,355	189,3	181,79	4,04	3,86
11	Stal 45	1,95	1,922	5310,0	6499,06	6,75	4,37

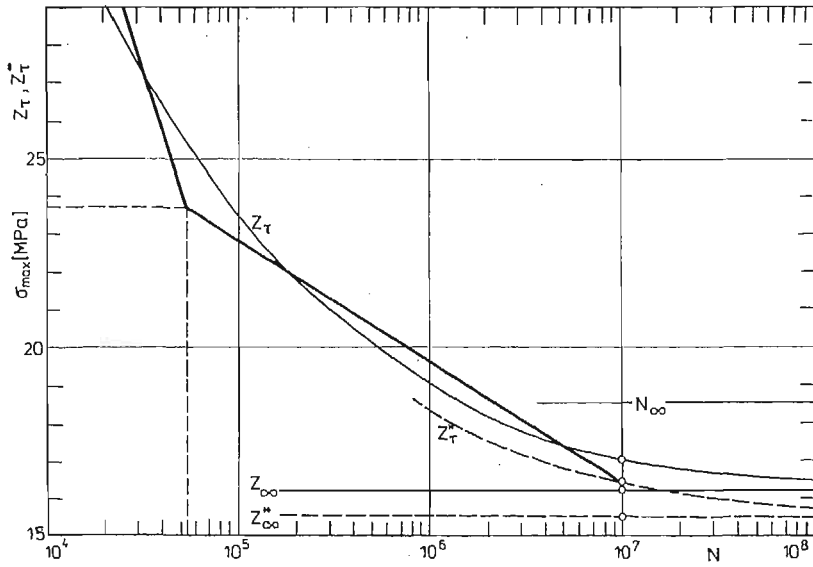
<sup>1)</sup> KAL = kalkulator Elwro 105 LN; <sup>2)</sup> duży błąd w przejściu łukowym wykresu; Gdy  $N \geq 10^6$  to błąd względny jest mniejszy wg (KAL) niż (ETO); stała  $B$  obliczona przybliżoną metodą najmniejszych kwadratów.



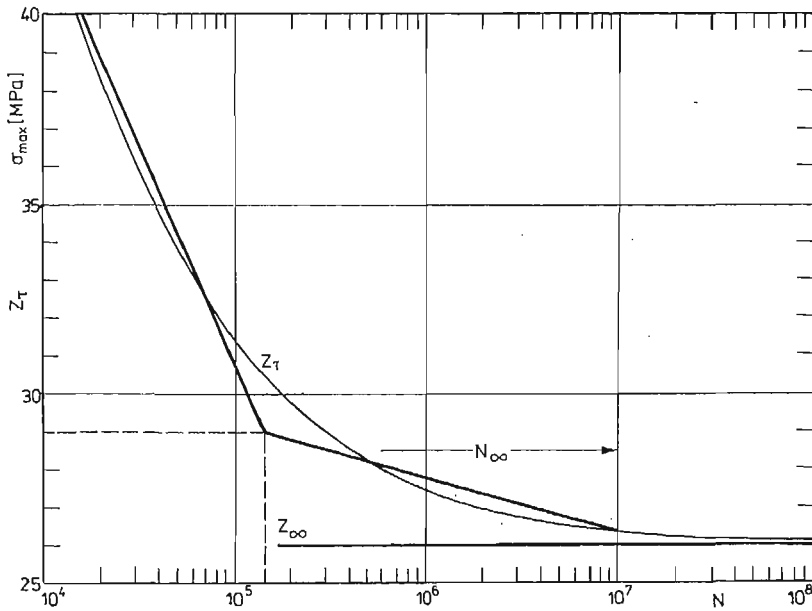
Rys. 5. Wykresy zmęczenia Itamidu 35 ( $\tau = 10$  mies.,  $\sigma = 2,33$ )



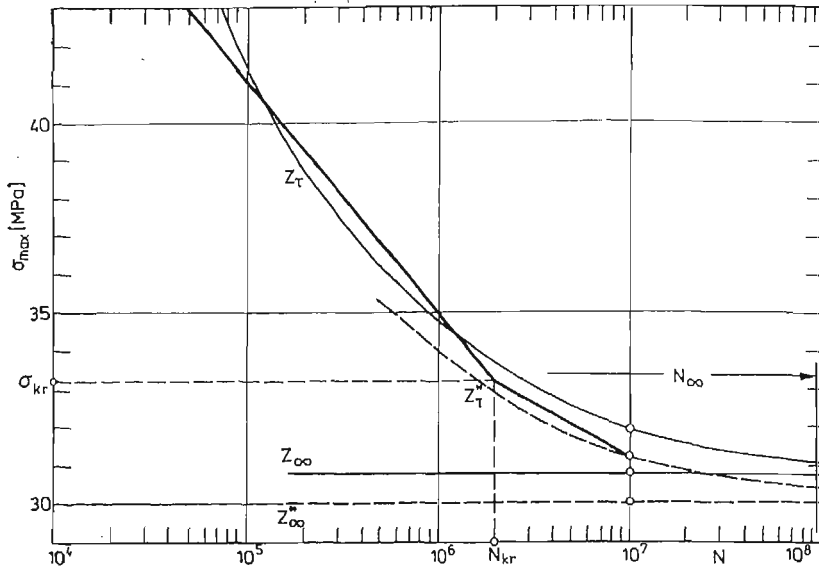
Rys. 6. Wykres zmęczenia Itamidu S-2 ( $\tau = 10$  mies.,  $\sigma = 2$ )



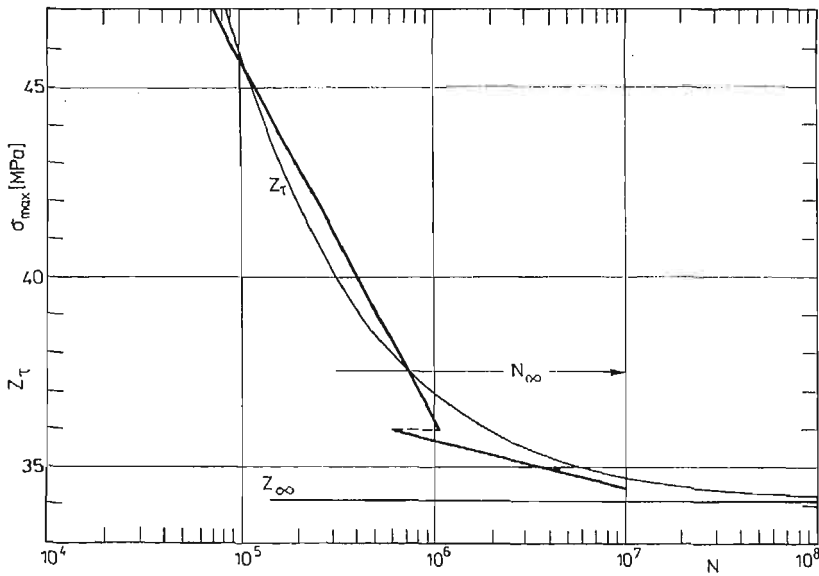
Rys. 7. Wykres zmęczenia PTE (Elana 2,  $\tau = 60$  mies.,  $\sigma = 2,4$ )



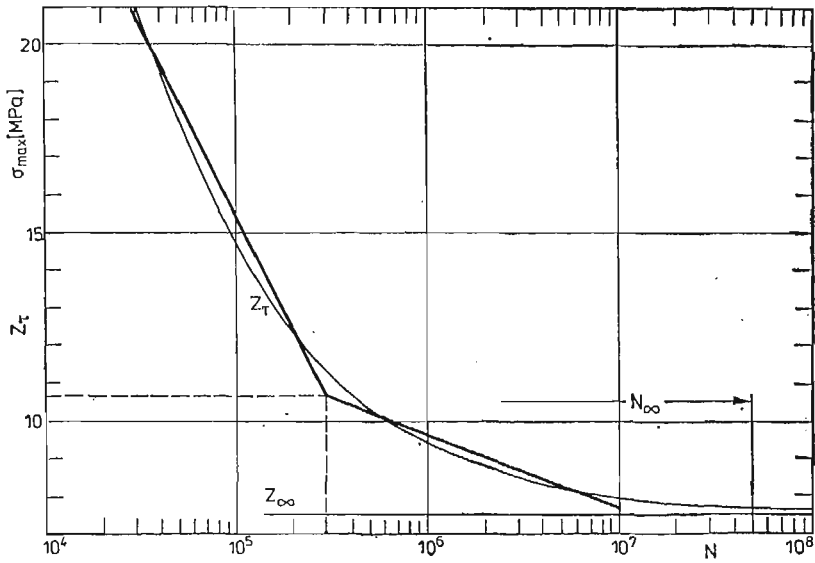
Rys. 8. Wykres zmęczenia Elitu 25 ( $\tau = 24$  mies.,  $\sigma = 2$ )



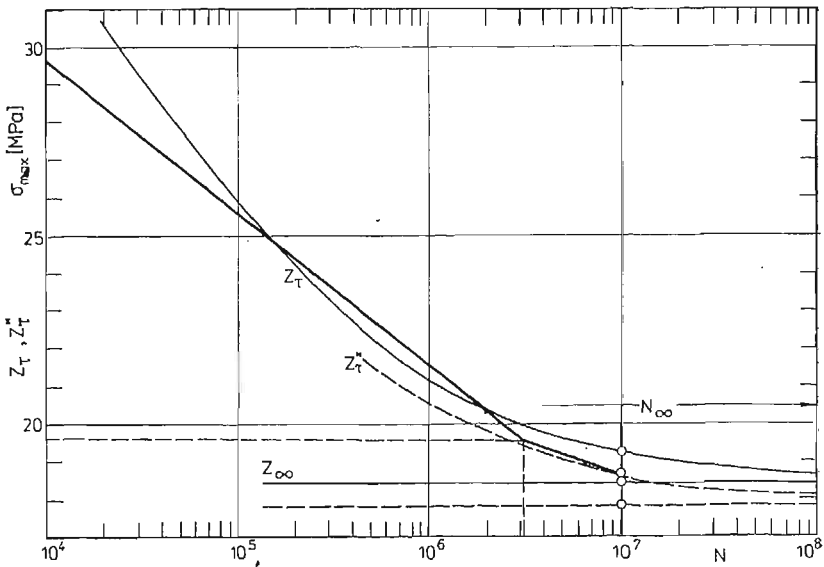
Rys. 9. Wykres zmęczenia Elitu 25u ( $\tau = 27$  mies.,  $\sigma = 2,33$ )



Rys. 10. Wykres zmęczenia Elitu 30 EX ( $\tau = 18$  mies.,  $\sigma = 2$ ); wykres zerwany [23]



Rys. 11. Wykres zmęczenia poliwęglanu ( $\tau = 10$  mies.,  $\sigma = 2$ )



Rys. 12. Wykres zmęczenia Bistanu AS-20 ( $\tau = 24$  mies.,  $\sigma = 2,33$ )

Średni błąd aproksymacji wyników pomiaru  $N(\sigma_{\max})$  równaniami prostych regresji (1) i (2), dla wybranych tworzyw sztucznych, wynosi 4,42% (tabl. 5), natomiast średni błąd aproksymacji równaniem rozkładu normalnego wynosi 4,32% wg (KAL) lub 3,82% wg (ETO), a więc są one w przybliżeniu równe, ale z tendencją na korzyść równania (3). Oznacza to, że równanie (3) wystarczająco dokładnie opisuje wyniki badań zmęczeniowych i może zastępować lub uzupełniać równania prostych regresji. Różnice w wartościach błędów aproksymacji  $\Delta$  (tabl. 6) wg KAL i ETO wynikają m.in. stąd, że do obliczania stałej B na kalkulatorze zastosowano wzór półempiryczny, natomiast do obliczenia stałej B na MC zastosowano rozwinięcie funkcji  $\varphi(u)$  w szereg Taylora (linearyzacja funkcji).

### 3. Przykłady liczbowe

3.1. Zbudować wykres zmęczenia Itamidu 25 (czas starzenia próbek  $\tau = 10$  mies. — rys. 4) według jednego równania (tabl. 7). Odchylenie standardowe, określone metodą kolejnych przybliżeń, wynosi  $\sigma = 2,33$ . Wartość średnią rozkładu przyjęto  $a = 0$ .

Równanie asymptoty:

$$Z_{\infty} = 0,989 \cdot (Z_{g0})_{\min} = 0,989 \cdot 24 = 23,7 \text{ [MPa]}$$

Stała B określona metodą jednakowych błędów (jb) w punktach  $A(\bar{N}_2, 34)$  i  $C(\bar{N}_5, 29,7)$ , według równania  $\Delta_2 \cong \Delta_5$  wynosi:  $B = 146,3$  [MPa].

Zmienna losowa unormowana:

$$u_i = \frac{\log \bar{N}_i - a}{\sigma} = \frac{\log \bar{N}_i}{\sigma} = \frac{\log \bar{N}_i}{2,33}$$

Równanie wykresu zmęczenia:

$$Z_{\tau}(jb) = Z_{\infty} + B\varphi(u) = 23,7 + 146,3\varphi(u)$$

Stała B według przybliżonej metody najmniejszych kwadratów (wzór w zasadzie półempiryczny):

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_{g0} - Z_{\infty})_i}{\sum_{i=1}^n \varphi(u_i)} = \frac{62,3}{0,4114} = 151,4 \text{ [MPa]}$$

Równanie wykresu zmęczenia:

$$Z_{\tau}(nk) = Z_{\infty} + B\varphi(u) = 23,7 + 151,4 \cdot \varphi(u)$$

Błąd względny:  $\Delta = 100 \frac{Z_{g0} - Z_{\tau}}{Z_{g0}}$

Liczba cykli odpowiadająca  $u$  odchyleniom standardowym rozkładu:

$$\varphi(u) = \frac{0,011 \cdot Z_{\infty}}{B} = \frac{0,011 \cdot 23,7}{151,4} = 0,0017; \quad u = 3,31$$

$$\log N_{\infty} = u \cdot \sigma = 3,31 \cdot 2,33 = 7,7123$$

$$N_{\infty} = 51\,600\,000 \approx 5 \cdot 10^7 \text{ [cykli]}$$

Tablica 7. Zestawienie wyników pomiarów i obliczeń do konstrukcji wykresu zmęczenia Itamidu 25

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\bar{N}_i$ [cykle]	7800	18000	45000	$10^5$	$0,15 \cdot 10^6$	$0,18 \cdot 10^6$	$0,2 \cdot 10^6$	$0,42 \cdot 10^6$	$10^6$	$2,5 \cdot 10^6$	$10^7$
$\log N_i$	3,8921	4,2553	4,6532	5	5,1761	5,2553	5,3010	5,6233	6	6,3979	7
$u_i$	1,67	1,83	2,00	2,15	2,22	2,26	2,28	2,41	2,58	2,75	3,00
$\varphi(u_i)$	0,0989	0,0748	0,0539	0,0395	0,0339	0,0310	0,0297	0,0219	0,0143	0,0091	0,0044
$\sigma_{\max}$	36,9	34,0	31,7	30,7	29,7	29,2	28,2	27,2	26,2	25,2	24,2
$Z_\tau(jb)$	38,17	34,64	31,59	29,48	28,66	28,24	28,05	26,90	25,79	25,03	24,34
$\Delta(jb)$	3,72	1,88	0,35	3,97	3,50	3,29	0,53	1,10	1,56	0,67	0,58
$Z_\tau(nk)$	38,67	35,02	31,86	29,68	28,83	28,39	28,20	27,02	25,87	25,08	24,37
$\Delta(nk)$	4,79	3,00	0,50	3,32	2,93	2,77	0	0,66	1,26	0,48	0,70

Naprężenia:  $\sigma_{\max}$ ,  $Z_\tau - w$  [MPa];  $Z_\tau(jb)$  — stałą  $B$  obliczono metodą jednakowych błędów;

Błąd względny  $\Delta(jb)$  oraz  $\Delta(nk) - w$  [%]  $Z_\tau(nk)$  — stałą  $B$  obliczono przybliżoną metodą najmniejszych kwadratów;

3.2. Zbudować wykres zmęczenia dla stali 45 o  $R_m = 713,7$  MPa oraz  $R_e = 454$  MPa (tabl. 8).

Tablica 8. Zestawienie wyników pomiarów i obliczeń do konstrukcji wykresu zmęczenia stali 45

$\sigma_{\max}$	$> \sigma_{kr}$				$\leq \sigma_{kr}$		
	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{N}_i$ [cykle]	12 000	20 000	30 000	40 000	$2 \cdot 10^5$	$10^6$	$10^7$
$\log \bar{N}_i$	4,0792	4,3010	4,4771	4,6021	5,3010	6	7
$u_i$	2,04	2,15	2,24	2,30	2,65	3	3,5
$\varphi(u_i)$	0,0498	0,0400	0,0325	0,0283	0,0119	0,0044	0,0009
$Z_r(jb)$	525	476	439	418	336	299	281
$Z_r(nk)$	541	489	450	427	340	300	282
$\sigma_{\max}$	555	493	443	408	344	314	271
$Z_g^{1)}$	550	500	450	400	350	300	280
$\Delta(jb)$	4,55	4,80	2,44	4,50	4,00	0,33	0,36
$\Delta(nk)$	1,64	2,20	0	6,75	2,86	0	0,71
$\Delta(\sigma_{\max})$	1,00	1,40	1,56	2,00	1,71	4,67	3,21

<sup>1)</sup> Dane liczbowe pochodzą z rekonstrukcji wyników pomiaru z wykresu zmęczenia Stali [7] — s. 365; Naprężenia w [MPa]

Równania prostych regresji:

dla  $\sigma_{\max} > \sigma_{kr} = 368$  MPa;  $\sigma_{\max} = 1697 - 280 \cdot \log N$ ;

dla  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{kr}$ ;  $\sigma_{\max} = 572 - 43 \cdot \log N$ .

Odchylenie standardowe, określone metodą kolejnych przybliżeń, wynosi  $\sigma = 2$ .

Równanie asymptoty:

$$Z_{\infty} = 0,989 \cdot (Z_g)_{\min} = 0,989 \cdot 280 \approx 277 \text{ [MPa]}$$

Stała  $B$  określona metodą jednakowych błędów w punktach  $A_1$  i  $A_4$  wynosi:  $B = 4985$  [MPa]

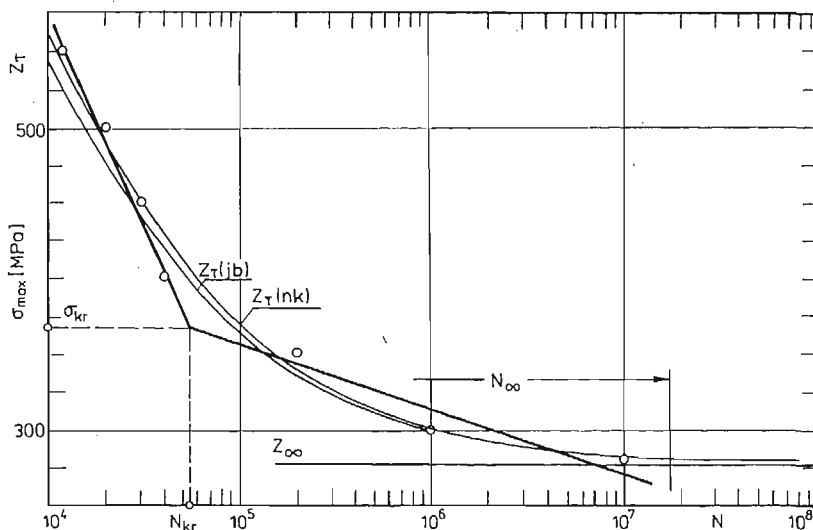
Zmienna losowa unormowana

$$u_i = \frac{\log \bar{N}_i - a}{\sigma} = \frac{\log \bar{N}_i}{2}$$

Równanie wykresu zmęczenia (rys. 13):

$$Z_r(jb) = Z_{\infty} + B\varphi(u) = 277 + 4985 \cdot \varphi(u)$$





Rys. 13. Wykres zmęczenia stali 45

Stała B według przybliżonej metody najmniejszych kwadratów:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^7 (Z_{gs} - Z_{\infty})_i}{\sum_{i=1}^7 \varphi(u_i)} = \frac{891}{0,1678} = 5310 \text{ [MPa]}$$

Równanie wykresu zmęczenia:

$$Z_r(nk) = 277 + 5310 \cdot \varphi(u).$$

Maksymalny błąd względny  $\Delta$ , dla aproksymacji wyników pomiaru równaniami prostych regresji wynosi 4,67%, a dla aproksymacji rozkładem normalnym 4,80%. Biorąc pod uwagę aproksymację w zakresie naprężeń  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{kr}$ , korzystniejsze wyniki osiągnięto dla aproksymacji wyników pomiaru rozkładem normalnym (4,00% wobec 4,67%). Liczba cykli odpowiadająca  $u$  odchyleniom standardowym rozkładu:

$$\varphi(u) = \frac{0,011 \cdot Z_{\infty}}{B} = \frac{0,011 \cdot 277}{5310} = 0,0005; \quad u = 3,63$$

$$\log N_{\infty} = u\sigma = 3,63 \cdot 2 = 7,26$$

$$N_{\infty} = 18\,200\,000 \approx 18 \cdot 10^6 \text{ [cykli]}.$$

Jeśli stal 45 ma trwałą wytrzymałość zmęczeniową (byłaby to wartość  $Z_{\infty}$ ), to obszar ważności równania  $Z_r = 277 + 5310 \cdot \varphi(u)$  jest nieograniczony; jeśli jest inaczej (brak rozstrzygnięcia w pracy [7]) — to równanie asymptoty  $Z_{\infty} = 277$  MPa jest umowną granicą zmęczenia, ważną w myśl własności rozkładu normalnego, do liczby cykli  $N_{\infty} = 18 \cdot 10^6$ .

#### 4. Wnioski

Rozkład normalny (a ściślej — funkcja odpowiadająca funkcji rozkładu normalnego) może być stosowany do konstrukcji wykresu zmęczenia tworzyw sztucznych i metali,

szczególnie w tych przypadkach, gdy materiał ma trwałą granicę zmęczenia ze względu na bazę. Wówczas równanie asymptoty  $Z_\infty$  jest nieograniczoną wytrzymałością zmęczeniową.

Celowość aproksymacji wyników pomiarów rozkładem normalnym wynika z prostego algorytmu obliczeń, dużej dokładności aproksymacji wyników pomiaru jednym równaniem, z braku ograniczeń w wyborze metod i kryteriów aproksymacji. A więc istnieje możliwość dostosowania konstrukcji wykresu zmęczenia do założonej metody obliczeń wytrzymałościowych i potrzeb interpretacyjnych. Z własności rozkładu normalnego wynika ponadto analityczne kryterium ograniczające ważność aproksymacji dla tych materiałów, których wytrzymałość zmęczeniowa monotonicznie maleje. Tym kryterium jest liczba cykli  $N_\infty$  określona ze wzoru (8).

Rozkładem normalnym można opisać wykres zmęczenia w obszarze ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej (ZO) i w obszarze trwałej lub umownej wytrzymałości zmęczeniowej (ZZ) oraz w obszarze wytrzymałości zmęczeniowej przy małej liczbie cykli (ZK) z ograniczeniem do takiej części, którą można przedstawić w układzie  $\sigma_{\max} - \log N$ .

#### Literatura

1. Е. К. Почтенный, *Прогнозирование долговечности и диагностика усталости деталей машин*, Наука и Техника, Минск 1983.
2. T. CZESCHOWSKI, M. FISZ, T. IWIŃSKI, O. LANGE, W. SADOWSKI, R. ZASĘPA, *Tablice statystyczne*, PWN, Warszawa 1957.
3. A. STRZAŁKOWSKI, A. ŚLIŻYŃSKI, *Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów*, PWN Warszawa 1978.
4. M. NOWAK, *Obliczenie i badanie na wytrzymałość zmęczeniową konstrukcyjnych tworzyw sztucznych*, Archiwum Budowy Maszyn, Nr 3 - 4, 30 (1983).
5. M. NOWAK, *Alterungsgeschwindigkeit und Sicherheitskoeffizienten gegen Dauerbruch von Polyamiden, Plaste und Kautschuk*, H. 3, 31 (1984), s. 109.
6. M. NOWAK, *Analityczny opis starzenia poliamidu 6 niszczonego zmęczeniowo*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, z. 3, 19 (1981), s. 435.
7. J. SZALA, *O pewnej metodzie obliczeń elementów konstrukcyjnych na zmęczenie w warunkach obciążeń stochastycznych*, Archiwum Budowy Maszyn, Nr 3 - 4, 29 (1982), s. 357.
8. O. H. BASQUIN, *The exponential law of endurance tests*, Proceedings American Society for Testing Materials, Vol. 10, 1910, pp. 625.
9. W. N. FINDLEY, O. E. HINTZ, *Relation between repeated impact and fatigue tests*, Modern Plastics, Nr 4, 21 (1943), pp. 119.
10. C. E. STROMEYER, *The determination of fatigue limits under alternating stress conditions*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A 90, 1914, pp. 411.
11. P. LUDWIK, R. SCHEU, *Das Verhalten der Metalle bei wiederholter Beanspruchung*, VDJ — Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Nr 1, 67 (1923), S. 122.
12. A. PALMGREN, *Die Lebensdauer von Kugellagern*, VDJ — Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Nr 14, 68 (1924), s. 339.
13. M. G. CORSON, *The N: S relationship in endurance testing*, Iron Age, 163 (1949), pp. 103.
14. W. WEIBULL, *The statistical aspect of fatigue failures*, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Conference 1952, pp. 182.
15. W. WEIBULL, *Fatigue testing and analysis of results*, Pergamon Press, Oxford — London — New York — Paris, 1961.
16. J. A. BENNET, J. L. BAKER, *Effects of prior static and dynamic stresses on the fatigue strength of alu-*

- minium alloys*, J. Res. Nat. Bur. Stand. 45, Aeronautics Materials Research 4, Revue 2506, 1950, pp. 449.
17. E. EPREMIAN, R. F. MEHL, *Investigation of statistical nature of fatigue properties*, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 2719, AMR6, Rev. 488, 1952.
  18. F. STÜSSI, *Dauerfestigkeit von Aluminium — Legierungen*, Mémoires Association Internationale des Ponts et Charpentes (MAJPCh), 13, 1953, s. 357.
  19. F. STÜSSI, *Die Theorie der Dauerfestigkeit und die Versuche von August Wöhler*, Mitteilungen der Technische Kommission des Verbandes schweizerischer Brückenbau und Stahlhochbau — Unternehmung (TKVSB), Nr 13, Verlag VSB Zürich 1955.
  20. F. BASTENAIRE, *Distributions statistiques des durée de vie à la fatigue et forme de la courbe de Wöhler*, Comptes Rendus (C.R.) 245, 1957, s. 136.
  21. F. BASTENAIRE, *Résultats apportés par l'étude statistique du compartement des métaux à la fatigue*, Bulletin de association française pour le control industriel de qualité, Nr 24, 1962, s. 71.
  22. S. KOCANĀDA, *Zmęczeniowe niszczenie metali*, WNT, Warszawa 1978.
  23. M. NOWAK, *Zgięcia i nieciągłości wykresów zmęczenia tworzyw sztucznych*, Archiwum Budowy Maszyn, z. 2, 29 (1982), s. 139.

## Р е з ю м е

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ  
ОДНИМ УРАВНЕНИЕМ НА ПРИМЕРЕ ИЗБРАННЫХ ПЛАСТМАСС

Для описания результатов измерения на усталость применено двухкомпонентное уравнение (3), в котором один является функцией нормального разложения. На примере избранных пластмасс установлено (избранных ввиду значения  $\psi$ ), что погрешность аппроксимации уравнением (3) не больше, чем уравнениями прямых регрессии (1) и (2). Нормальным разложением можно описать полную диаграмму усталости, т.е. участок малоциклового усталости и участок многоциклового усталости.

## S u m m a r y

A ONE-EQUATION ANALYTICAL DESCRIPTION OF FATIGUE TESTING RESULTS FOR  
SELECTED PLASTICS AS EXAMPLES

For the description of the results of fatigue testing a two-component equation was used (3) in which one of the components in the function of the normal decomposition. It has been found that, with regard to the selected plastics (selected on account of the value  $\psi$ ) the approximation error by means of equation (3) is not greater than by equations of simple regressions (1) and (2). The normal decomposition enables a description of full fatigue diagram, i.e. fatigue strength with a small number of cycles, limited fatigue strength as well as durable or conventional fatigue strength.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 października 1984 roku.