MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 24 (1986)

LINIOWE UKŁADY MECHANICZNE O NAJSZYBSZYM TŁUMIENIU

STANISŁAW DUBIEL

Wojskowa Akademia Techniczna

Wstęp

Układy mechaniczne tworzone przez człowieka spełniają swoją rolę tym lepiej im korzystniejszy jest ruch tych układów. Założeniem konstruktorów jest zbudowanie układów optymalnych, w tym przypadku układów poruszających się w sposób najkorzystniejszy. Zezwalają na to rozwijające się metody optymalizacji, zapoczątkowane w ramach wariacyjnych zasad mechaniki i rozwijane aktualnie w teorii sterowania.

Cechą charakterystyczną układów mechanicznych, tworzonych przez człowieka jest celowość ich ruchu, realizowana najmniejszym kosztem. Takie przynajmniej założenia przyświecają pierwotnym koncepcjom każdego tworzonego układu. Układy takie realizują ruch według opracowanego wcześniej programu poprzez sterowanie tymi układami. Sterowane układy mechaniczne będziemy w dalszym ciągu nazywali układami mechanicznymi celowego działania.

Optymalny program ruchu można opracować znanymi metodami optymalizacji w postaci ekstremal. Bardzo często uzyskuje się takie ekstremale jako zbiór krzywych kawałkami ciągłych. Realizacja takiego programu wymaga bardzo często gwałtownej zmiany położenia równowagi układu, co pociąga za sobą niekorzystne procesy przejściowe. Celem złagodzenia tych procesów stosowane są odpowiednie podukłady sprzęgające, których elastyczność łagodzi niebezpieczne zmiany położenia równowagi. Złagodzenie to jest tym płynniejsze im właściwiej dobrana jest charakterystyka podukładu sprzęgającego. Charakterystykę taką można określać mianem związków sprzęgających.

Rozważania niniejsze stanowią metodę syntezy układów mechanicznych celowego działania, zmierzające do wyznaczenia związków sprzęgających, które zapewniają najszybsze tłumienie układu. Tak zaprojektowane sprzężenie układu mechanicznego z układem sterowania daje spokojny przebieg procesów przejściowych wywołanych zmianą położenia równowagi. Oddala również niebezpieczeństwo wynikające niekiedy z awaryjnych przerw w układzie sterującym, wywołanych przerwami zasilania układu.

1. Wyjściowe równania układu mechanicznego

Oddziaływanie układu sterowania na układ mechaniczny sprowadza się z zasady do zmiany sił działających na układ. Model matematyczny układu można zapisać w przestrzeni konfiguracji (Q — przestrzeni) za pomocą współrzędnych uogólnionych. Układ opisujący dynamiczne efekty sterowania przyjmie więc postać

$$\ddot{q}_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Rozważania niniejsze ogranicza się do liniowej zależności sił od przemieszczeń i prędkości uogólnionych a więc równanie liniowego układu dynamicznego zapisać można w formie

$$\ddot{q}_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} q_j + \sum_{i=1}^{n} d_{kj} \dot{q}_j, \tag{1.2}$$

gdzie macierz $\mathbf{C} = \{c_{kj}\}$ jest macierzą sprężystości układu, zaś macierz $\mathbf{D} = \{d_{kj}\}$ jest macierzą tłumienia

Część elementów macierzy $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ można przyjąć jako poszukiwane wielkości. Są to te elementy, które reprezentują charakterystykę układu sprzęgającego, a więc sztywności i tłumienia układu sterowania, oraz współczynniki wzmocnienia tego układu. Zdaniem syntezy jest wyznaczenie takich ich wartości, aby tłumienie układu było jak najszybsze. Poszukiwane elementy można wyodrębnić specjalnym oznaczeniem.

Syntezę układu liniowego (1.2) można przeprowadzić drogą czysto algebraiczną, lub drogą pośrednią, którą nazwiemy metodą macierzową. Droga czysto algebraiczna polega na przekształceniu wielomianu charakterystycznego odpowiadającego równaniu wyjściowemu i wyznaczeniu odpowiednich warunków na pierwiastki tego wielomianu. Metoda macierzowa polega na odpowiednim przekształceniu macierzowego równania jednorodnego odpowiadającego układowi dynamicznemu, a następnie wyznaczenie warunków na nierosnące rozwiązania układu przekształconego. Obie metody nabierają ogólniejszego charakteru jeśli równania ruchu opisujące układ mechaniczny sprowadzimy do formy macierzowej.

Formę macierzową równoważną układowi (1.2) uzyskamy w przestrzeni fazowej wprowadzeniem następujących oznaczeń

$$\begin{aligned} &x_1 = q_1; \quad x_{s-1} = q_k; \quad x_{m-1} = q_n; \\ &x_2 = \dot{x}_1 = \dot{q}_1; \quad x_s = \dot{x}_{s-1} = \dot{q}_k; \quad x_m = \dot{x}_{m-1} = \dot{q}_n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

gdzie $s = 2k = 2, 4, \ldots, m = 2n$.

Układ równań (1.2) w przestrzeni fazowej ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_{s-1} &= x_s, \\ \dot{x}_s &= \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_{2j}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Formę macierzową powyższego układu można zapisać następująco:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x \tag{1.5}$$

gdzie

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

zaś macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{11} & d_{11} & c_{12} & d_{12} & \dots & c_{1n} & d_{1n} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_{n1} & d_{n1} & c_{n2} & d_{n2} & \dots & c_{nn} & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{A}$ w układzie (1.5) będącym odpowiednikiem układu (1.4) posiada dość specyficzną formę. Nieparzyste wiersze macierzy $\mathbf{A}$ posiadają $2n-1$ zer oraz jedynki na kolejnych parzystych miejscach. Wiersze parzyste są kombinacją współczynników sztywności i tłumienia na przemian. Wprowadza to pewne uproszczenia do przekształceń dokonywanych w procesie badań. Ponieważ jednak przekształcenia opracowano dla ogólnej macierzy $\mathbf{A}$ zatem w dalszym ciągu elementy macierzy $\mathbf{A}$ oznacza się odpowiednio przez a_{ij}. Wskaźniki i, j, przyjmują ze zbioru liczb naturalnych zarówno wartości nieparzyste jak i parzyste czyli

$$i, j = 1, 2, \dots, m$$

Co więcej dla ogólności rozważań m może być również liczbą parzystą jak i nieparzystą. Równanie macierzowe

$$\dot{x} = \mathbf{A}x, \tag{1.5'}$$

może więc mieć postać ogólniejszą w odniesieniu do równania (1.4). Zatem macierz $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}^* \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}^* \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}^* \end{vmatrix}.$$

Zakłada się, że wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}$ są stałe i rzeczywiste.

Elementy macierzy $\mathbf{A}$ oznaczone gwiazdką można dobierać w taki sposób aby rozwiązanie spełniało odpowiednie warunki.

2. Poszukiwanie rozwiązań o najszybszym tłumieniu z wielomianu charakterystycznego

Niech macierz $\mathbf{A}$ w zakresie zmienności $\{a_{im}^*\}$ spełnia warunek stateczności układu. Zgodnie z warunkami Sylvestra

$$\det \mathbf{A} > 0, \text{ dla } m \text{ parzystego},$$

$$\det \mathbf{A} < 0, \text{ dla } m \text{ nieparzystego},$$

zaś

$$\mathrm{Tr}\, \mathbf{A} < 0.$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ wyznacza się z wielomianu charakterystycznego

$$W(\lambda) = |\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda| = 0.$$

Jeżeli elementy macierzy $\mathbf{A}$ są stałe i rzeczywiste wówczas wartości własne macierzy są rzeczywiste lub zespolone parami sprzężone. Spełniają one równanie charakterystyczne

$$W(\lambda) = (-1)^m[\lambda^m + p_1\lambda^{m-1} + p_2\lambda^{m-2} + \ldots + p_{m-1}\lambda + p_m], \tag{2.2}$$

gdzie

$$p_1 = -\sum_{i=1}^{m} a_{ii} = -\operatorname{Tr}\mathbf{A},$$

$$p_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \quad j > i,$$

$$p_3 = (-1)^3 \sum_{i=1}^{m-2} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kn} \end{vmatrix}, \quad k > j > i,$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$p_m = (-1)^m \det \mathbf{A}.$$

Kolejne współczynniki p_i wielomianu charakterystycznego są sumami wszystkich wyznaczników minorów głównych i-tego stopnia. Dla układu statecznego współczynniki te są wszystkie jednakowego znaku. Spełniają ponadto warunki Hurtwitza w całym zakresie zmienności współczynników $\{a_{im}^*\}$.

Wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ spełniają związki Viety

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = -p_1,$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_k \lambda_i = p_2,$$

$$\sum_{k=1}^{m-2} \sum_{i=k+2}^{m} \lambda_k \lambda_{k+1} \lambda_i = -p_3,$$

$$\prod_{i=1}^{m} \lambda_i = (-1)^m p_m.$$

Wyrażenia powyższe łącznie z zależnościami na współczynniki $\{p_i\}$ dają interesujące związki między pierwiastkami równania charakterystycznego, λ_i a elementami macierzy $\mathbf{A}$. Przy ich pomocy można przeprowadzić wielce pożyteczne badania jakościowe liniowego układu. Już pierwszy związek daje możliwości wyznaczenia takich pierwiastków, które dadzą rozwiązania o najszybszym tłumieniu.

Pierwiastki równania charakterystycznego (2.1) i (2.2) mają ogólną postać

$$\lambda_{(s-1)s} = -\delta_s \pm i\omega_s, \quad s = 2, 4, \ldots, 2_n. \tag{2.5}$$

Pierwiastki powyższe są parami sprzężone zatem pierwszy ze związków Viety można wyrazić za pomocą sumy części rzeczywistych

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = -2\sum_{k=1}^{n} \delta_k = -p_1, \quad k = 1, 2, \ldots, n = \frac{1}{2}m. \tag{2.6}$$

Części urojone dają w sumie zero.

Układ, którego ruch jest ruchem statecznym posiada wszystkie części rzeczywiste ujemne co w wyrażeniu (2.5) podkreślono znakiem minus. Spośród wszystkich części rzeczywistych interesuje nas pierwiastek którego moduł jest najmniejszy. Pierwiastek taki nosi nazwę pierwiastka dominującego. Decyduje on o prędkości tłumienia, a więc prędkości zanikania procesów przejściowych. Oznaczmy pierwiastek dominujący przez δ_d, a więc

$$\delta_d < \{\delta_k\},$$

dla wszystkich k z wyjątkiem $k = d$.

Skrócenie czasu trwania procesów przejściowych (zwiększenie prędkości tłumienia) sprowadza się więc do zwiększenia modułu części rzeczywistej pierwiastka dominującego. Jest to równoznaczne ze zwiększeniem dekrementu logarytmicznego tłumienia rozwiązania szczególnego, najwolniej tłumionego.

Łatwo wykazać, że największą wartość, jaką może osiągnąć moduł części rzeczywistej pierwiastka dominującego

$$\delta_{d_{max}} = \frac{p_1}{m}. \tag{2.8}$$

Ma to miejsce wówczas, kiedy wszystkie części rzeczywiste pierwiastków są jednakowe. Zgodnie z równaniem (2.6)

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \frac{p_1}{m}. \tag{2.9}$$

Można więc sformułować bardzo ważne twierdzenie.

Twierdzenie:

Układ dynamiczny (1.5) będzie układem najszybciej tłumionym, jeżeli wszystkie części rzeczywiste pierwiastków równania charakterystycznego (2.1) będą jednakowe i ujemne.

D o w ó d:

Jeżeli by którykolwiek z pierwiastków miał część rzeczywistą większą o bardzo małą liczbę $\varepsilon > 0$, a więc np. $\delta_k = \frac{p_1}{m} + \varepsilon$ to w myśl równania (2.6) inny pierwiastek musiałby mieć część rzeczywistą mniejszą o ε, a więc $\delta_d = \frac{p_1}{m} - \varepsilon$ i ten byłby częścią rzeczywistą pierwiastka dominującego.

Należy więc ustalić warunki na poszukiwane elementy macierzy $\mathbf{A}$ a_{ij}, przy których uzyskuje się pierwiastki ze wszystkimi częściami rzeczywistymi równymi. Wprowadza się w tym celu następujące podstawienie do wielomianu charakterystycznego

$$\lambda = \sigma - \delta,$$

gdzie $\delta = \frac{p_1}{m}$.

Otrzymuje się w ten sposób równanie charakterystyczne o postaci

$$\sigma^m + b_2\sigma^{m-2} + b_3\sigma^{m-3} + \ldots + b_{m-1}\sigma + b_m = 0. \tag{2.10}$$

Poszczególne współczynniki równania (2.10) wyznacza się z zależności

$$b_i = \sum_{k=0}^{m} \binom{m-k}{i-k} p_k(-\delta)^{i-k},$$

przy czym

$$b_1 = -m\cdot\delta + p_1 = 0.$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego (2.5) będą miały jednakowe części rzeczywiste jeżeli pierwiastki równania (2.10) będą pierwiastkami tylko urojonymi lub równymi zero. Zgodnie ze związkami Viety

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma_k = 0,$$

a zatem układ dynamiczny, którego równanie (2.10) jest równaniem charakterystycznym nie posiada rozwiązania tylko malejącego. Może posiadać rozwiązanie co najwyżej nierosnące i to tylko w takim przypadku kiedy wszystkie pierwiastki są czysto urojone lub równe zero. Pierwiastki takie można uzyskać jeżeli:

$$\begin{aligned} b_i &= 0, \quad \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \\ b_i &> 0, \quad \text{dla } i \text{ parzystych.} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Równanie (2.10) przy warunkach (2.11) zapisze się w postaci zawierającej tylko parzyste potęgi dla m parzystego (lub tylko nieparzyste dla m nieparzystego).
Dla m parzystego

$$\sigma^m + b_2\sigma^{m-2} + b_4\sigma^{m-4} + \ldots + b_{m-2}\sigma^2 + b_m = 0, \tag{2.12}$$

zaś dla m nieparzystego

$$(\sigma^{m-1} + b_2\sigma^{m-3} + b_4\sigma^{m-5} + \ldots + b_{m-3}\sigma^2 + b_{m-1})\sigma = 0. \tag{2.12'}$$

Równanie (2.12) posiada $m = 2n$ pierwiastków i możemy wprowadzić oznaczenie

$$\sigma^2 = b_2 \cdot r, \tag{2.13}$$

otrzymuje się wówczas równanie n-tego stopnia gdzie $n = \frac{m}{2}$

$$\begin{gathered} r^n + r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + c_3 r^{n-3} + \ldots + c_{n-1} r + c_n = 0, \\ c_2 = \frac{b_4}{b_2^2}; \quad c_3 = \frac{b_6}{b_3^3}; \ldots ; \quad c_i = \frac{b_{2i}}{b_2^i}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Równanie (2.12) będzie posiadać wszystkie pierwiastki urojone lub równe zeru, jeśli wszystkie pierwiastki równania (2.14) będą pierwiastkami rzeczywistymi niedodatnimi. Takie pierwiastki zapewniają następujące warunki wystarczające.

$$\begin{aligned} 0 &< c_2 < \frac{n-1}{2!n}, \\ 0 &< c_3 < \frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2}, \\ 0 &< c_i < \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{i!n^{i-1}}, \\ &\text{— — — — — — — — — — — —} \\ 0 &< c_n = \frac{1}{n^n}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Pierwiastki równania (2.14) będą mieć postać

$$r = -\frac{\sigma^2}{b_2},$$

Zaś pierwiastki równania (2.12)

$$\sigma_{s(s+1)} = \pm i\omega_s, \quad \omega = \sqrt{|b_2 \cdot r|},$$

Rozwiązanie równania wyjściowego ma postać

$$x(t) = e^{-\delta(t \cdot t_0)} \sum_{s=1}^{n} [A_s \cos\omega_s(t-t_0) + B_s \sin\omega_s(t-t_0)]. \tag{2.16}$$

Najszybsze tłumienie układu wymaga aby współczynnik p_1 był jak największy, a to jest równoznaczne z wymaganiem największej wartości modułu śladu macierzy **A**. Warunek stateczności wymaga bowiem, aby ślad macierzy **A** był mniejszy od zera.

3. Wyznaczenie warunków najszybszego tłumienia z formy macierzowej

Przekształcenie wyznacznika charakterystycznego $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|$ do wielomianu charakterystycznego wymaga dość żmudnych obliczeń. Proces wyznaczenia warunków najszybszego tłumienia można znacznie uprościć odpowiednim przekształceniem równania (1.5). Wprowadza się następujące przekształcenie

$$x = y \cdot e^{\delta t}, \tag{3.1}$$

gdzie

$$\delta = \frac{1}{m} \operatorname{Tr} \mathbf{A}.$$

Pochodne

$$\dot{x} = (\dot{y} + \delta y) e^{\delta(t \cdot t_0)},$$

prowadzą do równania

$$\dot{y} = By, \tag{3.2}$$

dla którego macierz $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I}\delta$,
a więc

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & a^*_{1m} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a^*_{2m} \\ \hline a_{m2} & a_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}, \tag{3.3}$$

gdzie

$$b_{ii} = a_{ii} - \delta,$$

zaś ślad macierzy **B** jest równy zeru, czyli:

$$\operatorname{Tr} \mathbf{B} = \operatorname{Tr} \mathbf{A} - m\delta = 0.$$

Rozwiązania y nie mogą być rozwiązaniami malejącymi, co najwyżej nierosnącymi. Takich właśnie nierosnących rozwiązań należy poszukiwać, aby rozwiązanie $x(t)$ były rozwiązaniami najszybciej tłumionymi. Rozwija się w tym celu wyznacznik macierzy $(\mathbf{B}-\delta\mathbf{I},)$ który daje bezpośrednio wielomian charakterystyczny odpowiedni wielomianowi (2.10).

$$\det(\mathbf{B}-\sigma\mathbf{I}) = D(\sigma), \tag{3.4}$$
$$D(\sigma) = (-1)^m(\sigma^m+b_2\sigma^{m-2}+b_3\sigma^{m-3}+\ldots+b_{m-1}\sigma+b_m),$$

gdzie poszczególne współczynniki

$$b_1 = -\mathrm{Tr}\,\mathbf{B} = -\sum_{i=1}^{m}(a_{ii}-\delta) = 0,$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^{m-1}\begin{vmatrix} b_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & b_{jj}\end{vmatrix}, \quad j>i,$$

$$b_3 = -\sum_{i=1}^{m-2}\begin{vmatrix} b_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & b_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & b_{kk}\end{vmatrix}, \quad k>j>i,$$

zaś

$$b_m = (-1)^m\det\mathbf{B}.$$

Warunki konieczne na to aby pierwiastki równania charakterystycznego

$$D(\sigma) = \sigma^m+b_2\sigma^{m-2}+b_3\sigma^{m-3}+\ldots+b_{m-1}\sigma+b_m = 0, \tag{3.5}$$

były urojone i równe zero są analogiczne jak dla równania (2.10)

$$\begin{aligned} b_k &= 0, \quad \text{dla } k \text{ nieparzystych,} \\ b_k &> 0, \quad \text{dla } k \text{ parzystych.}\end{aligned} \tag{3.5'}$$

Zaproponowany sposób przekształcenia macierzy $\mathbf{A}$ na macierz $\mathbf{B}$ upraszcza znacznie proces obliczeniowy. Odpada przejście od równania charakterystycznego (2.2) do równania (2.10). Współczynniki b_i uzyskuje się bezpośrednio z rozwinięcia wyznacznika charakterystycznego macierzy $\mathbf{B}$.

Warunki (3.5′) są niezależne od tego czy m jest parzyste czy nie. Dla m — parzystego uzyskuje się równanie

$$\sigma^{2n}+b_2\sigma^{2(n-1)}+b_4\sigma^{2(n-2)}+\ldots+b_{2(n-1)}\sigma^2+b_{2n} = 0, \tag{3.6}$$

zaś dla m nieparzystego

$$(\sigma^{2n}+b_2\sigma^{2(n-1)}+b_4\sigma^{2(n-2)}+\ldots+b_{2(n-2)}\sigma^2+b_{2(n-1)})\sigma = 0. \tag{3.6'}$$

Zatem jeden z pierwiastków $\sigma = 0$ dla m nieparzystego. Wielomian w nawiasie równania (3.6′) posiada analogicznie jak równanie (3.6) tylko parzyste potęgi. Warunki dające pierwiastki czysto urojone lub równe zero dla obu równań będą podobne.

Podstawienie dla obu równań $\sigma^2 = b_2 r$, daje

$$r^n+r^{n-1}+c_2r^{n-2}+c_3r^{n-3}+\ldots+c_{n-1}r+c_n = 0, \tag{3.7}$$

gdzie: $c_i = \dfrac{b_{2i}}{b_2^i}$.

Przy analogicznych warunkach (2.15) dla współczynników b_{2i} uzyskuje się pierwiastki

r rzeczywiste i ujemne, a zatem

$$\sigma_{s(s+1)} = \pm i\omega_s; \quad \omega = \sqrt{b_2 \cdot r}, \qquad s = 1, 3, \ldots, 2(n-1). \tag{3.7'}$$

Rozwiązania równania wyjściowego (1.5') mają postać:

$$x(t) = e^{-\delta(t-t_0)} \sum_{s=1}^{n} [A_s \cos\omega_s(t-t_0) + B_s \sin\omega_s(t-t_0)]. \tag{3.8}$$

Ponieważ wielkość δ jest zarazem wielkością dominującą o największej wartości zatem i czas uspokojenia procesu zakłóconego będzie najkrótszy. Oznacza się go przez t_r — jako czas regulacji. Jego wartość wyznacza zależność [3]

$$t_r = \frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{\Delta}, \tag{3.9}$$

gdzie Δ wartość odchyleń założona dla wyznaczenia czasu procesu przejściowego. Stanowi ona zazwyczaj

$$\Delta = 0{,}02 \div 0{,}05,$$

w stosunku do początkowych wartości dla $t = t_0$.

Podsumowanie

Sposób wyznaczania rozwiązań najszybciej zanikających, zaproponowany w niniejszym opracowaniu, wyprowadzono ze związków czysto algebraicznych. Warunki układu najszybciej tłumionego są tym samym łatwiejsze do wykazania, a więc bardziej oczywiste.

Podano dwie drogi wyznaczania tych warunków. Korzystniejsza w ujęciu ogólnym jest metoda uzyskana bezpośrednio z zapisu macierzowego. Skraca bowiem wyraźnie proces obliczeniowy znacznie dla ogólnej postaci macierzy **A**. Jeśli jednak ilość stopni swobody jest mniejsza, np. 2—3, to dla układu mechanicznego prostsze może okazać się wyznaczenie warunków końcowych z równania charakterystycznego jak w punkcie 2. Czytelnik sam osądzi kiedy stosowanie jednej lub drugiej metody jest bardziej opłacalne.

Wyznaczenie warunków najszybszego tłumienia nie jest jeszcze równoznaczne z problemem minimalno-czasowym. Należy dodatkowo rozwiązać problem oscylacyjności poszczególnych rozwiązań. Dla celów praktycznych nie zawsze jest to konieczne, choć ważnym zadaniem jest uniknięcie stanów krytycznych.

Literatura

1. А. Н. Голубенцев; *Интегральные методы в динамике*, Киев 1967.
2. Y. TAKAHASKI, M. J. RABINS, D. M. AUSLÄNDCR; *Sterowanie i układy dynamiczne*; WNT Warszawa 1976
3. T. KACZOREK; *Teoria sterowania*, T. 1 PWN Warszawa 1977.
4. S. DUBIEL: *O pewnej modyfikacji metody A. N. GOŁUBIENCEWA optymalizacji liniowych układów dynamicznych.* Biuletyn WAT nr 5 1984.

Резюме

ЛИНЕЙНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С НАЙБОЛЕЕ БЫСТРЫМ ЗАТУХАНИЕМ

В работе рассмотрены условия наиболее быстрого затухания для линейных механических систем. Эти условия выведены алгебраическим методом для линейного дифференциального уравнения н-того порядка, а для линейной механической системы в матричной форме, методом некоторого преобразобания системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Summary

LINEAR MECHANICAL SYSTEMS WITH SUPREME DAMPING

In the paper are determined the conditions for supreme damping of linear mechanical systems. The conditions have been derived by algebraic approach for linear differential equations of n-th order, and next for systems of linear equations, presented in matrix form, by a method consisting of a transformation of the system of first order differential equations.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 lutego 1986 roku