

## ANALITYCZNE BADANIE INTENSYWNYCH FAL UDERZENIOWYCH W GAZIE POLITROPOWYM W OTOCZENIU GAZOWYCH PRODUKTÓW WYBUCHU

ZBIGNIEW GŁODOWSKI  
EDWARD WŁODARCZYK

*Wojskowa Akademia Techniczna*

### 1. Wstęp

Ważną rolę w fizyce wybuchu spełnia teoria wybuchu skupionego (punktowego). Opisuje ona zjawiska występujące w ośrodkach ciągłych przy wybuchu w nich ładunku o małej objętości i dużej energii (wybuch jądrowy, wybuch stałych materiałów wybuchowych o dużej gęstości, elektrowybuch cienkich folii metali, silne wyładowania elektryczne i inne). Teoria wybuchu skupionego daje możliwość opisanie, z wystarczającą dla celów praktyki dokładnością, charakterystyk niestacjonarnego ruchu ośrodków ciągłych wywołanego nagłym, lokalnym wydzielaniem energii (jądrowej, chemicznej, elektromagnetycznej). Teoria ta znalazła również zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień opływu ciał smukłych strumieniem gazów poruszających się z dużą, naddźwiękową prędkością.

Podstawy teorii wybuchu skupionego stworzyli, niezależnie od siebie, J. G. Taylor [1 i 2] i L. I. Siedow [3 i 4] w latach czterdziestych bieżącego stulecia. Od tego czasu, problemowi niestacjonarnego ruchu gazów, wywołanego wybuchem skupionym, poświęcono wiele prac. Systematyczny opis teorii i ważniejszych wyników prac z tego zakresu wraz z przeglądem literatury światowej podany jest w monografii W. P. Korobiejnikowa, N. S. Mielnikowej i Je. W. Rjazanowa [5].

Teoria wybuchu skupionego opiera się na założeniu, że cała energia wybuchu wydzielana jest w obszarze o zerowej objętości; w punkcie — dla symetrii kulistej, na linii — dla symetrii cylindrycznej oraz na płaszczyźnie — dla symetrii płaskiej (w dwóch ostatnich przypadkach rozpatruje się energię odniesioną odpowiednio do jednostki długości oraz do jednostki powierzchni). Założenie to jest równoważne przyjęciu nieskończonej gęstości energii (energia na jednostkę objętości) wydzielonej w centrum wybuchu.

Taka idealizacja warunku początkowego oraz zaniedbanie wartości ciśnienia przed frontem fali uderzeniowej (przeciwiśnienia), umożliwia redukcję problemu do zagadnienia samopodobnego [6] i uzyskanie zamkniętych rozwiązań, określających charakterystyki niestacjonarnego ruchu gazu idealnego, wywołanego wybuchem ładunku skupionego. Zgodnie z tymi rozwiązaniami prędkość przepływu, ciśnienie i temperatura gazu w początkowej

chwili czasu ( $t = 0$ ) mają nieskończenie wielkie wartości w centrum wybuchu. Natomiast z fizycznych rozważań i danych eksperymentalnych wynika, że wymienione parametry w chwili  $t = 0$  mają duże, ale skończone wartości. Rozbieżność między wynikami teoretycznymi i eksperymentalnymi w otoczeniu centrum symetrii w początkowej chwili czasu spowodowana jest przyjętą idealizacją modelu, dopuszczającą nieskończenie wielką gęstość energii w miejscu wybuchu.

Poza tym, model wybuchu skupionego bez uwzględnienia objętości źródła wydzielającego energię nie pozwala ocenić wpływu geometrii ładunku (jego wymiarów) na rozkład parametrów ruchu i stanu gazu w otoczeniu centrum wybuchu. Z rozwiązań samopodobnych nie można również badać dowolnego, niestacjonarnego ruchu granicy gazowych produktów detonacji (GDP). Istniejące z tego zakresu rozwiązania [7 i 8] mają charakter szczególny — aproksymują prędkość ruchu granicy gazów za pomocą jednomianu potęgowego  $v_0 = ct^n$ .

Mając na uwadze wymienione mankamenty istniejących rozwiązań, w niniejszej pracy podjęliśmy próbę skonstruowania lokalnego w czasie i przestrzeni rozwiązania dla wybuchu skupionego (kulistego, cylindrycznego i płaskiego) w gazie politropowym z uwzględnieniem skończonej gęstości energii w centrum wybuchu. Rozwiązanie to przedstawimy w postaci szeregów Taylora dla funkcji jednej i dwóch zmiennych niezależnych ( $r, t$ ), przy czym współczynniki rozwinięcia określimy za pomocą równań ruchu i warunków granicznych, odpowiednią ilość razy różniczkowanych.

Zdaniem autorów, prezentowane rozwiązanie stanowi istotny przyczynek do teorii wybuchu skupionego.

## 2. Sformułowanie problemu

Będziemy badać niestacjonarny ruch układu mechanicznego, złożonego z wkłuzji o symetrii kulistej (kula), cylindrycznej (cylinder o nieskończonej długości) lub płaskiej (warstwa o nieskończonych wymiarach powierzchniowych), zanurzonej w nieograniczonej przestrzeni wypełnionej jednorodnym, niezaburzonym gazem politropowym.

Zakładamy, że w chwili  $t = 0$  w całej objętości wkłuzji nastąpiło nagłe wydzielenie energii o skończonej wartości  $E_0$ . Jak już wspomniano we wstępie, w przypadku symetrii cylindrycznej —  $E_0$  oznacza energię wydzieloną z jednostki długości cylindra, a dla symetrii płaskiej — z jednostki powierzchni warstwy.

Fizycznym modelem takiego układu może być, na przykład, natychmiastowy wybuch kulistego, cylindrycznego lub płaskiego ładunku materiału wybuchowego (MW) w przestrzeni nieograniczonej, wypełnionej gazem politropowym. Dla ujednoznacznienia dalszych rozważań przyjmujemy, że źródłem energii  $E_0$  jest natychmiastowa detonacja odpowiedniego ładunku MW. Przez  $r_0$  oznaczymy początkowy promień ładunku kulistego (cylindrycznego) lub połowę grubości warstwy ładunku płaskiego.

Z doświadczenia i hydrodynamicznej teorii ruchu gazu doskonałego wynika, że w opisanych warunkach w niezaburzonym gazie propagować się będzie, ze zmienną prędkością, fala uderzeniowa, wygenerowana rozszerzającymi się gazowymi produktami detonacji, które spełniają rolę ruchomego tłoka.

Jeśli przyjąć, że za czołem fali uderzeniowej ruch gazu ma charakter adiabatyczny, to

rozwiązanie tak zdefiniowanego zagadnienia początkowo-brzegowego sprowadza się do całkowania następującego układu równań:

$$\begin{aligned} p_{,r} &= -\varrho_1 \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} v_{,t} \\ \varrho(r+u)_{,r} &= \varrho_1 \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \\ \varrho p_{,t} - \gamma p \varrho_{,t} &= 0 \\ v &= u_{,t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie  $r$  jest współrzędną Lagrange'a, a  $t$  oznacza czas.

Wielkości  $p$ ,  $\varrho$ ,  $u$ ,  $v$  i  $\gamma$  odpowiednio oznaczają: ciśnienie, gęstość, przemieszczenie, prędkość przepływu i wykładnik izentropy gazu;  $\varrho_1$  jest wielkością stałą, charakteryzującą początkową gęstość gazu.

Symbolem  $\nu$  oznaczono wskaźnik symetrii, przy czym  $\nu$  przyjmuje wartości:

1 — dla symetrii płaskiej, 2 — dla symetrii cylindrycznej i 3 — dla symetrii kulistej.

Na czole fali silnej nieciągłości równania różniczkowe (2.1) tracą sens. W ich miejsce, z praw zachowania otrzymujemy związki w formie skończonej o następującej postaci:

$$\begin{aligned} \varrho_1(c-v_1) &= \varrho_2(c-v_2), \\ \varrho_1 v_1(c-v_1) - p_1 &= \varrho_2 v_2(c-v_2) - p_2, \\ \varrho_1(c-v_1) \left( \frac{v_1^2}{2} + \varepsilon_1 \right) - p_1 v_1 &= \varrho_2(c-v_2) \left( \frac{v_2^2}{2} + \varepsilon_2 \right) - p_2 v_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie literami  $c$  i  $\varepsilon$  odpowiednio oznaczono prędkość propagacji czoła fali w danym ośrodku oraz energię wewnętrzną jednostki masy ośrodka. Indeksy 1 i 2 identyfikują poszczególne parametry stanu i ruchu ośrodka przed i na czole fali.

Jeśli wziąć pod uwagę, że ośrodek przed czołem fali jest nieruchomy ( $v_1 = 0$ ) oraz, że dla gazu doskonałego mamy:

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma-1)\varrho}; \quad a_1 = \left( \gamma \frac{p_1}{\varrho_1} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

to związki (2.2) można, po przekształceniach, uprościć do postaci:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1} (1-q)c \\ \varrho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \varrho_1 \left( 1 + \frac{2q}{\gamma-1} \right)^{-1} \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1} \varrho_1 c^2 \left( 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} q \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

lub

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{1-q}{\sqrt{q}} a_1 \\ \varrho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2q} \varrho_1 \\ p_2 &= \frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{(\gamma+1)q} p_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie parametr  $q = (a_1/c)^2$  charakteryzuje intensywność fali uderzeniowej;  $a_1$  jest prędkością propagacji dźwięku w gazie niezaburzonym.

Z trzeciego wyrażenia (2.5)<sub>3</sub> bezpośrednio otrzymujemy:

$$q = \frac{2\gamma}{(\gamma+1)p_2/p_1 + \gamma - 1}. \quad (2.6)$$

Dalej, z wzoru tego wynika, że dla silnych fal uderzeniowych ( $p_2/p_1 \geq 1$ ) parametr  $q$  jest mały.

Dla  $q$  zmierzającego do zera, związki na czole fali uderzeniowej przyjmują prostą postać:

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1} c; \quad \varrho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \varrho_1; \quad p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \varrho_1 c^2. \quad (2.7)$$

Z analizy obliczeń liczbowych można wyciągnąć wniosek, że dla  $q < 0,01$  błąd określania wartości poszczególnych parametrów wg wzorów przybliżonych (2.7) nie przekracza 5%. Zatem dla fal poruszających się z prędkością  $c > 10a_1$  i niosących na swym czole ciśnienie  $p_2 > 100p_1$  można, z wystarczającą dla celów praktyki dokładnością, posługiwać się wzorami uproszczonymi (2.7). Takim właśnie falom poświęcona jest niniejsza praca.

Przejdziemy obecnie do sformułowania modelu ruchu GPD. Jak już wspomniano, stosujemy hipotezę natychmiastowej (momentalnej) detonacji ładunku wybuchowego. Stosowanie tej hipotezy w praktyce inżynierskiej jest uzasadnione małym udziałem energii kinetycznej w bilansie energetycznym GPD w fali detonacyjnej.

Dla przykładu w tablicy 1 podajemy ułamkowe udziały energii potencjalnej i kinetycznej GPD w fali detonacyjnej trotylu.

Tablica 1

Udział energii	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$
Energia potencjalna	0,939613	0,926581	0,920597
Energia kinetyczna	0,060387	0,073419	0,079403

Jak widać z zamieszczonych danych, największy udział energii kinetycznej (symetria kulista) nie przekracza 8%. Podobne wyniki uzyskuje się dla innych, stałych materiałów wybuchowych. Zatem w fali detonacyjnej ponad 90% energii GPD stanowi energia potencjalna (sprężysta i ciepła). Energię kinetyczną można zaniedbać — tym samym przyjmujemy, że cząstki GPD w czasie detonacji pozostają nieruchome. W wyniku tego założenia początkowa gęstość GPD równa się gęstości materiału wybuchowego, którą oznaczymy przez  $\varrho_{0e}$ . Natomiast ciśnienie początkowe  $p_{0e}$  określamy z następującego wzoru [9]:

$$p_{0e} = 0,5p_H; \quad p_H = \frac{\varrho_{0e} D^2}{k_H + 1}, \quad (2.8)$$

gdzie  $p_H$  oznacza ciśnienie GPD w punkcie Jougueta,  $D$  jest prędkością detonacji, a  $k_H$  — wykładnikiem izentropy GPD.

Jeśli zaniedbać zjawiska falowe w GPD i założyć, że gazowe produkty detonacji roz-

szerzają się w sposób adiabatyczny [10, 11], to średnią gęstość  $\varrho_e(t)$  i średnie ciśnienie  $p_e(t)$  w GPD można określić z następujących wzorów:

$$\varrho_{GPD}(r_0, t) = \varrho_e(t) = \varrho_{0e} \left[ \frac{r_0}{R_0(t)} \right]^r, \quad (2.9)$$

$$p_{GPD}(r_0, t) = p_e(t) = p_{0e} \left[ \frac{r_0}{R_0(t)} \right]^{rk_0}, \quad (2.10)$$

gdzie:

$$R_0(t) = r_0 + u(r_0, t), \quad (2.11)$$

$k_0$  jest skorelowanym wykładnikiem politropy GPD.

Sposób określania jego wartości podany jest w pracy [12]. Jest on nieco większy od wykładnika izentropy GPD w punkcie Jougueta ( $k_0 > k_H$ ). Przykładowe wartości  $k_0$  i  $k_H$  dla kilku klasycznych MW podajemy w tabelicy 2.

Tablica 2

MW	$\varrho_{0e}$ kg/m <sup>3</sup>	$p_{11}$ MPa	$D$ m/s	$k_{11}$	$k_0$
Trotyl	1630	21000	6930	2,73	3,00
TH 36/64	1717	29500	7980	2,71	3,00
Oktozen	1891	42000	9110	2,74	3,40
Pentryt	1770	33500	8300	2,64	2,90
Nitrometan	1128	12500	6280	2,56	2,73

Wymienione dotychczas warunki graniczne uzupełniają dodatkowo warunki ciągłości ciśnienia i prędkości na granicy kontaktowej GPD tj:

$$p(r_0 t) = p_e(t); \quad v(r_0, t) = v_e(t). \quad (2.12)$$

Ponadto przyjmujemy, że ośrodek gazowy przed czołem fali uderzeniowej jest niezaburzony. Zatem warunki początkowe mają postać:

$$u(r, 0) = 0; \quad v(r, 0) = 0; \quad p(r, 0) = p_1; \quad \varrho(r, 0) = \varrho_1. \quad (2.13)$$

Tym samym problem został jednoznacznie sformułowany. Przejdziemy obecnie do konstrukcji lokalnego (ograniczonego w czasie i przestrzeni) rozwiązania przedstawionego zagadnienia granicznego.

### 3. Lokalne rozwiązanie problemu

**3.1. Uwagi ogólne.** Pełne rozwiązanie sformułowanego w poprzednim rozdziale problemu sprowadza się do konstrukcji rozwiązania zmodyfikowanego zagadnienia Goursata [13] dla układu równań (2.1) z warunkami granicznymi (2.7) ÷ (2.13). Modyfikacja zagadnienia

Goursata w rozpatrywanym przypadku polega na nieznanym brzegu obszaru, w którym poszukujemy rozwiązania problemu. Jest nim czoło fali uderzeniowej  $r = R(t)$ . Będziemy go poszukiwać w formie szeregu Taylora o postaci:

$$R(t) = r_0 + R'(0)t + \frac{1}{2} R''(0)t^2 + \frac{1}{6} R'''(0)t^3 + \dots \quad (3.1)$$

Analogicznym szeregiem przedstawiamy położenie granicy kontaktowej GPD:

$$R_0(t) = r_0 + u(r_0, t) = r_0 + R'_0(0)t + \frac{1}{2} R''_0(0)t^2 + \frac{1}{6} R'''_0(0)t^3 + \dots \quad (3.2)$$

W podobnym ujęciu przedstawimy charakterystyki niestacjonarnego ruchu gazu z czołem fali uderzeniowej, a mianowicie:

$$F(r, t) = F(r_0, 0) + F_{,r}(r_0, 0)(r - r_0) + F_{,t}(r_0, 0)t + \frac{1}{2} [F_{,rr}(r_0, 0)(r - r_0)^2 + 2F_{,rt}(r_0, 0)(r - r_0)t + F_{,tt}(r_0, 0)t^2] + \dots \quad (3.3)$$

gdzie symbol  $F(r, t)$  reprezentuje następujące funkcje:  $u(r, t)$ ,  $v(r, t)$ ,  $p(r, t)$  i  $\varrho(r, t)$ .

Zatem dla uzyskania lokalnego rozwiązania przedstawionego problemu należy jednoznacznie określić współczynniki szeregów (3.1) — (3.3). Wykorzystamy do tego celu równania problemu (2.1) oraz warunki graniczne (2.7) - (2.13).

**3.2. Określenie wartości funkcji w punkcie rozwinięcia  $(r_0, 0)$ .** Zgodnie z trzecim warunkiem (2.7) prędkość propagacji czoła fali uderzeniowej wynosi:

$$c(t) = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \frac{p_2(t)}{\varrho_1} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

Stąd dla  $t = 0$ , po wykorzystaniu (2.8) mamy:

$$c(0) = c_0 = \left( \frac{\gamma + 1}{4} \frac{p_H}{\varrho_1} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma + 1}{k_H + 1} \frac{\varrho_{0e}}{\varrho_1} \right)^{1/2} D \quad (3.5)$$

Następnie wykorzystując związki (2.7) oraz warunki początkowe (2.8) i (2.13) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u(r_0, 0) &= u_{02} = 0; \\ v(r_0, 0) &= v_{02} = \frac{2}{\gamma + 1} c_0 = \left( \frac{1}{\gamma + 1} \frac{p_H}{\varrho_1} \right)^{1/2} = \frac{1}{\gamma + 1} \left( \frac{\gamma + 1}{k_H + 1} \frac{\varrho_{0e}}{\varrho_1} \right)^{1/2} D; \\ p(r_0, 0) &= p_{02} = \frac{2}{\gamma + 1} \varrho_1 c_0^2 = \frac{p_H}{2} = \frac{\varrho_{0e} D^2}{2(k_H + 1)}; \\ \varrho(r_0, 0) &= \varrho_{02} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \varrho_1; \\ R(0) &= r_0 + u_{02} = r_0; \quad R_0(0) = r_0 + u_{02} = r_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**3.3. Określenie wartości pierwszych pochodnych funkcji w punkcie  $(r_0, 0)$ .** Z równań (2.1)<sub>2</sub> i (2.1)<sub>4</sub> bezpośrednio wynika, że

$$\begin{aligned} u_{,r}(r, t) &= \left( \frac{r}{r + u} \right)^{\gamma - 1} \frac{\varrho_1}{\varrho} - 1; \\ u_{,t}(r, t) &= v(r, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dalej, różniczkując warunek brzegowy (2.10) względem czasu  $t$  i wykorzystując warunek ciągłości ciśnienia (2.12) otrzymujemy:

$$p_{,t}(r_0, t) = -\nu k_0 p_{0e} \left[ \frac{r_0}{R_0(t)} \right]^{\nu k_0} \frac{R_0'(t)}{R_0(t)}, \quad (3.8)$$

gdzie:

$$p_{0e} = p_{02} = \frac{2}{\gamma+1} \varrho_1 c_0^2, \quad R_0'(t) = v(r_0, t). \quad (3.9)$$

Następnie z (2.1)<sub>3</sub> mamy:

$$\varrho_{,t}(r, t) = \frac{\varrho}{\gamma p} p_{,t}(r, t). \quad (3.10)$$

Z kolei różniczkując równanie (2.1)<sub>2</sub> względem czasu, po rozwikłaniu uzyskujemy:

$$v_{,r}(r, t) = - \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \left[ \frac{\varrho'_{,t}(r, t)}{\varrho} + (\nu-1) \frac{v}{r+u} \right] \frac{\varrho_1}{\varrho}. \quad (3.11)$$

Dla określenia pozostałych pochodnych funkcji  $p$ ,  $\varrho$  i  $v$ , różniczkujemy związki (2.7) wzdłuż trajektorii czoła fali uderzeniowej w wyniku czego otrzymujemy:

$$v'_2(t) = \frac{2}{\gamma+1} c'(t); \quad \varrho'_2(t) \equiv 0; \quad p'_2(t) = \frac{4}{\gamma+1} \varrho_1 c c'(t). \quad (3.12)$$

Z drugiej strony, zgodnie z definicją pochodnej w danym kierunku, mamy:

$$\begin{aligned} v'_2(t) &= v_{,r}c + v_{,t}; & \varrho'_2(t) &= \varrho_{,r}c + \varrho_{,t}; \\ p'_2(t) &= p_{,r}c + p_{,t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Przyrównując prawe strony równań (3.12) i (3.13) oraz wykorzystując równanie (2.1)<sub>1</sub>, po rozwikłaniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varrho_{,r}(r, t)|_{r=R(t)} &= -\frac{1}{c(t)} \varrho_{,t}(r, t)|_{r=R(t)}, \\ v_{,t}(r, t)|_{r=R(t)} &= \frac{2}{\gamma+1} c'(t) - c v_{,r}(r, t)|_{r=R(t)}, \\ p_{,r}(r, t) &= -\varrho_1 \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} v_{,t}(r, t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdzie:

$$c'(t) = \frac{\gamma+1}{2\varrho_1 c} \frac{p_{,t}(r, t) + \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \varrho_1 c^2 v_{,r}(r, t)}{2 + \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1}}. \quad (3.15)$$

Z definicji funkcji  $R_0(t)$  i  $R(t)$  wynika, że:

$$\begin{aligned} R_0'(t) &= u_{,t}(r_0, t) = v(r_0, t), \\ R'(t) &= c(t) = \frac{\gamma+1}{2} v_2(t), \\ R_0''(t) &= u_{,tt}(r_0, t) = v_{,t}(r_0, t), \\ R''(t) &= c'(t), \quad \text{itd.} \end{aligned} \quad (3.16)$$

W ten sposób wyprowadziliśmy zamknięte wzory na wszystkie pierwsze pochodne poszukiwanych funkcji. Ponadto, rozwiązując układ równań (3.12) i (3.13) oraz (2.1)<sub>1</sub>, określono również drugie pochodne funkcji  $R(t)$  i  $R_0(t)$ .

Z wzorów tych, po wykorzystaniu wartości funkcji (3.6) i przekształceniach, w punkcie  $(r_0, 0)$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_{,r}(r_0, 0) &= -\frac{1}{c_0} u_{,t}(r_0, 0) = -\frac{v_{02}}{c_0} = -\frac{2}{\gamma+1}, \\ v_{,r}(r_0, 0) &= \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)^2} [\gamma + \nu(k_0 - \gamma)] \frac{c_0}{r_0}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$v_{,t}(r_0, 0) = -\frac{1}{\varrho_1} p_{,r}(r_0, 0) = -\frac{4}{3\gamma(\gamma+1)^2} \{ \nu k_0 \gamma + (\gamma-1) [\gamma + \nu(k_0 - \gamma)] \} \frac{c_0^2}{r_0},$$

$$p_{,t}(r_0, 0) = -\frac{4\nu k_0}{(\gamma+1)^2} \varrho_1 \frac{c_0^3}{r_0},$$

$$\varrho_{,r}(r_0, 0) = -\frac{1}{c_0} \varrho_{,t}(r_0, 0) = \frac{2\nu k_0}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\varrho_1}{r_0},$$

$$R'(0) = c_0; \quad R'_0(0) = v_{02} = \frac{2}{\gamma+1} c_0,$$

$$R''(0) = c'(0) = -\frac{2\nu k_0 \gamma - (\gamma-1) [\nu(k_0 - \gamma) + \gamma]}{3\gamma(\gamma+1)} \frac{c_0^2}{r_0}, \quad (3.18)$$

$$R''_0(0) = v_{,t}(r_0, 0).$$

**3.4. Określenie wartości drugich pochodnych funkcji w punkcie  $(r_0, 0)$ .** Z wyrażeń (3.7), po zróżniczkowaniu względem  $r$  i  $t$ , otrzymujemy:

$$u_{,rr}(r, t) = \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \left[ \frac{(\gamma-1)(u/r - u_{,r}(r, t))}{r+u} - \frac{\varrho_{,r}(r, t)}{\varrho} \right] \frac{\varrho_1}{\varrho}, \quad (3.19)$$

$$u_{,rt}(r, t) = v_{,r}(r, t), \quad u_{,tt}(r, t) = v_{,t}(r, t).$$

Z kolei różniczkując wyrażenia (3.8), (3.10), (3.11) i (2.1)<sub>1</sub> względem czasu  $t$  mamy:

$$\begin{aligned} p_{,tt}(r_0, t) &= \nu k_0 p_{0e} \left[ \frac{r_0}{R_0(t)} \right]^{\nu k_0} \left[ -\frac{R'_0(t)}{R_0(t)} + (1 + \nu k_0) \frac{R_0'^2(t)}{R_0^2(t)} \right], \\ \varrho_{,tt}(r, t) &= \frac{\varrho}{\gamma p} p_{,tt}(r, t) - \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{\varrho}{p^2} p_{,t}^2(r, t), \\ v_{,rt}(r, t) &= \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho} \right)^3 \frac{1}{\varrho_1^2} \left\{ -\varrho \varrho_{,tt}(r, t) + 2\varrho_{,t}^2(r, t) + \right. \\ &\quad \left. + (\nu-1) \left[ 2 \frac{\varrho v}{r+u} \varrho_{,t}(r, t) - \varrho^2 \frac{v_{,t}(r, t)}{r+u} + \nu \varrho^2 \left( \frac{v}{r+u} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.20) \\ v_{,tt}(r, t) &= -\frac{1}{\varrho_1} \left( \frac{r+u}{r} \right)^{\nu-1} \left\{ \frac{\gamma p}{\varrho} \varrho_{,rt}(r, t) + \gamma \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} \left[ p_{,r}(r, t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{p}{\varrho} \varrho_{,r}(r, t) \right] \right\} + (\nu-1) \frac{v}{r+u} v_{,t}(r, t). \end{aligned}$$



Dalej z równań (2.1)<sub>1</sub>, (2.1)<sub>3</sub> i (3.11) po zróżniczkowaniu względem  $r$  i rozwikłaniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 p_{,rr}(r, t) &= -\left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \left[ v_{,rt}(r, t) + \frac{(\nu-1)(u|r-u_{,r}(r, t))}{r+u} v_{,t}(r, t) \right] \varrho_1 \\
 p_{,rt}(r, t) &= \frac{\gamma p}{\varrho} \varrho_{,rt}(r, t) + \gamma \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} \left[ p_{,r}(r, t) - \frac{p}{\varrho} \varrho_{,r}(r, t) \right] \\
 v_{,rr}(r, t) &= -\left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \varrho_{,rt}(r, t) - \left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left\{ \left[ \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\nu-1) \frac{v}{r+u} \right] \left[ \frac{(\nu-1)(u|r-u_{,r}(r, t))}{r+u} - \frac{\varrho_{,r}(r, t)}{\varrho} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\varrho_{,r}(r, t)\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho^2} + (\nu-1) \left[ \frac{v_{,r}(r, t)}{r+u} - \frac{v}{(r+u)^2} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \right] \right\} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Następnie różniczkując wyrażenia (3.12) i (3.13) wzdłuż trajektorii czoła fali, po rozwikłaniu mamy:

$$\begin{aligned}
 \varrho_{,rr}(r, t)|_{r=R(t)} &= -\frac{2}{c} \varrho_{,rt}(r, t)|_{r=R(t)} - \frac{1}{c^2} \varrho_{,tt}(r, t)|_{r=R(t)} + \\
 &\quad - \frac{c'(t)}{c^2} \varrho_{,r}(r, t)|_{r=R(t)} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

$$\varrho_{,rt}(r, t)|_{r=R(t)} = -\frac{(\gamma+1)^2}{(\gamma-1)(5\gamma-1)} \frac{\varrho_1}{c_0^2} L(r, t)|_{r=R(t)}$$

$$R_0'''(t) = c''(t) = \frac{\gamma+1}{2} [c^2 v_{,rr}(r, t) + 2c v_{,rt}(r, t) + v_{,tt}(r, t) + c'(t) v_{,r}(r, t)]|_{r=R(t)}, \quad (3.23)$$

$$R_0'''(t) = v_{,tt}(r_0, t),$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 L(r, t)|_{r=R(t)} &= \left[ \frac{c}{2\varrho_1} p_{,rr}(r, t) + \frac{1}{2\varrho_1 c} p_{,tt}(r, t) - 2c v_{,rt}(r, t) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A(r, t)}{\varrho_1} - B(r, t) - c^2 C(r, t) + \frac{c'(t)}{2\varrho_1 c} p_{,r}(r, t) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{\gamma+1} \frac{c'^2(t)}{c} - c'(t) v_{,r}(r, t) \right]_{r=R(t)}, \\
 A(r, t) &= \gamma \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} \left[ p_{,r}(r, t) - \frac{p}{\varrho} \varrho_{,r}(r, t) \right], \\
 B(r, t) &= -\left(\frac{r+u}{r}\right)^{\nu-1} \frac{A(r, t)}{\varrho_1} + (\nu-1) \frac{v}{r+u} v_{,t}(r, t), \\
 C(r, t) &= -\left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left\{ \left[ \frac{\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho} + (\nu-1) \frac{v}{r+u} \right] \left[ \frac{(\nu-1)(u|r-u_{,r}(r, t))}{r+u} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\nu-1) \frac{v}{r+u} \right] \left[ \frac{(\nu-1)(u|r-u_{,r}(r, t))}{r+u} - \frac{\varrho_{,r}(r, t)}{\varrho} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\varrho_{,r}(r, t)\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho^2} + (\nu-1) \left[ \frac{v_{,r}(r, t)}{r+u} - \frac{v}{(r+u)^2} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left(\frac{r}{r+u}\right)^{\nu-1} \right] \right\} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\varrho_{,r}(r, t)}{\varrho} \right] - \frac{\varrho_{,r}(r, t)\varrho_{,t}(r, t)}{\varrho^2} + (\nu-1) \left[ \frac{v_{,r}(r, t)}{r+u} + \right. \\ \left. - \frac{v}{(r+u)^2} \frac{\varrho_1}{\varrho} \left( \frac{r}{r+u} \right)^{\nu-1} \right] \Bigg\}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy komplet wzorów na drugie pochodne poszukiwanych funkcji  $u, v, p, i$  oraz trzecie pochodne  $R'''(t)$  i  $R_0'''(t)$ . Z wzorów tych w punkcie rozwinięcia  $(r_0, 0)$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_{,rr}(r_0, 0) &= - \frac{v_{,r}(r_0, 0)}{c_0} = - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)^2} [\nu(k_0-\gamma) + \gamma] \frac{1}{r_0}, \\ u_{,ri}(r_0, 0) &= v_{,r}(r_0, 0) = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)^2} [\nu(k_0-\gamma) + \gamma] \frac{c_0}{r_0}, \\ u_{,ii}(r_0, 0) &= v_{,i}(r_0, 0) = - \frac{4}{3\gamma(\gamma+1)^2} \{ \nu k_0 \gamma + (\gamma-1) [\gamma + \nu(k_0-\gamma)] \} \frac{c_0^2}{r_0}, \\ v_{,rr}(r_0, 0) &= - \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{\varrho_1} \varrho_{,ri}(r_0, 0) + C(r_0, 0), \\ v_{,ri}(r_0, 0) &= \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^3} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\nu k_0}{\gamma} \left[ (\nu-1) \left( \gamma + \frac{\gamma-1}{\nu} \frac{\gamma}{k_0} + \frac{\gamma-1}{k_0} (k_0-\gamma) \right) - 4\nu k_0 - \gamma + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 - \frac{\nu}{\gamma} (k_0-\gamma)(\gamma-1) \right] + 4(\gamma-1) \left( \frac{\nu k_0}{\gamma} \right)^2 + 8 \frac{\nu k_0}{\gamma} \left( \frac{\nu k_0}{\gamma} - \nu + 1 \right) + 4\nu(\nu-1) \right\} \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\ v_{,ii}(r_0, 0) &= - \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{c_0^2}{\varrho_1} \varrho_{,ri}(r_0, 0) + B(r_0, 0), \tag{3.25} \\ p_{,rr}(r_0, 0) &= - \frac{4}{3} \frac{\nu k_0}{\gamma} \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^3} \left\{ 4 \frac{\nu k_0}{\gamma} - 2\nu k_0 - 3 + (\nu-1) \left[ 2\gamma - 7 + \frac{\gamma-1}{\nu} \frac{\gamma}{k_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\gamma-1}{k_0} (k_0-\gamma) + \frac{3\gamma}{k_0} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} - \frac{2}{\nu k_0} (\gamma + \nu(k_0-\gamma)) \right] \right\} \varrho_1 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\ p_{,ri}(r_0, 0) &= \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} c_0^2 \varrho_{,ri}(r_0, 0) + A(r_0, 0), \\ p_{,ii}(r_0, 0) &= \frac{8}{3} \frac{\nu k_0}{(\gamma+1)^3} \left[ 4\nu k_0 + \gamma + 2 + \frac{\nu(k_0-\gamma)(\gamma-1)}{\gamma} \right] \varrho_1 c_0^2 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\ \varrho_{,rr}(r_0, 0) &= - \frac{2}{c_0} \varrho_{,ri}(r_0, 0) + D(r_0, 0), \\ \varrho_{,ri}(r_0, 0) &= - \frac{(\gamma+1)^2}{(\gamma-1)(5\gamma-1)} \frac{\varrho_1}{c_0^2} L(r_0, 0), \\ \varrho_{,ii}(r_0, 0) &= \left\{ \frac{4}{3} \frac{\nu k_0}{\gamma^2(\gamma^2-1)} [\gamma(4\nu k_0 + \gamma + 2) + \nu(k_0-\gamma)(\gamma-1)] - \frac{4(\nu k_0)^2}{\gamma^2(\gamma+1)} \right\} \varrho_1 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\ R'''(0) &= c''(0) = \frac{\gamma+1}{2} [c_0^2 v_{,rr}(r_0, 0) + 2c_0 v_{,ri}(r_0, 0) + v_{,ii}(r_0, 0) + c'(0) v_{,r}(r_0, 0)], \\ R_0'''(0) &= v_{,ii}(r_0, 0), \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 A(r_0, 0) &= -\frac{8\nu}{(\gamma+1)^3} \frac{k_0}{\gamma} \left\{ \frac{\nu k_0 \gamma + (\gamma-1)[\gamma + \nu(k_0 - \gamma)]}{3} - \nu k_0 \right\} \varrho_1 c_0 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\
 B(r_0, 0) &= \frac{8}{3} \frac{\nu}{(\gamma+1)^3} \frac{k_0}{\gamma} \left\{ \nu \gamma \left( k_0 - \frac{\nu-1}{\nu} \right) + \frac{\gamma(\gamma-1)}{k_0} (\nu k_0 - \nu + 1) \left( \frac{1}{\nu} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{k_0 - \gamma}{\gamma} \right) - 3\nu k_0 \right\} c_0 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2, \\
 C(r_0, 0) &= -\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^3} \left\{ (\nu-1)^2 + 2 \left( \frac{\nu k_0}{\gamma} \right)^2 + \frac{\nu(\nu-1)}{\gamma} \left[ \frac{(\gamma-1)(k_0 - \gamma)}{2} - 2k_0 \right] \right\} \frac{c_0}{r_0^2}, \\
 D(r_0, 0) &= -2 \frac{\nu k_0}{\gamma(\gamma^2-1)} \left[ \gamma + 1 + 2\nu \frac{k_0}{\gamma} + \nu \frac{(\gamma-1)(k_0 - \gamma)}{\gamma} \right] \frac{\varrho_1}{r_0^2}.
 \end{aligned}$$

Postępując w analogiczny sposób można wyprowadzić wzory na pochodne poszukiwanych funkcji dowolnego rzędu. Tym samym można dość dokładnie określić charakterystyki niestacjonarnego ruchu gazu doskonałego w bezpośrednim otoczeniu centrum wybuchu.

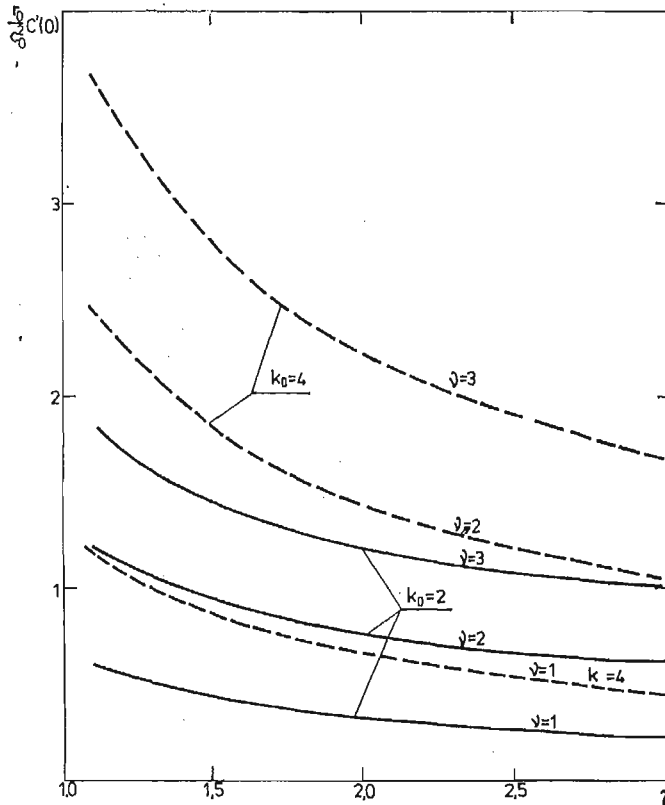
**3.5. Uproszczona wersja wzorów.** Wyprowadzone w poprzednich punktach wzory ulegają znacznemu uproszczeniu w przypadku, gdy  $k_0 = \gamma$ . Mamy wówczas:

$$\begin{aligned}
 v_{,r}(r_0, 0) &= \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{c_0}{r_0}, \\
 v_{,t}(r_0, 0) &= -\frac{1}{\varrho_1} p_{,r}(r_0, 0) = -\frac{4}{3} \frac{(\nu+1)\gamma-1}{(\gamma+1)^2} \frac{c_0^2}{r_0}, \\
 p_{,t}(r_0, 0) &= -\frac{4\nu\gamma}{(\gamma+1)^2} \varrho_1 \frac{c_0^3}{r_0}, \\
 \varrho_{,r}(r_0, 0) &= -\frac{1}{c_0} \varrho_{,t}(r_0, 0) = \frac{2\nu}{\gamma-1} \frac{\varrho_1}{r_0}, \\
 R''(0) = c'(0) &= -\frac{(2\nu-1)\gamma+1}{3(\gamma+1)} \frac{c_0^2}{r_0}, \\
 v_{,rr}(r_0, 0) &= -\left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 \frac{1}{\varrho_1} \varrho_{,rr}(r_0, 0) - \frac{4(\gamma-1)(\nu^2+1)}{(\gamma+1)^3} \frac{c_0}{r_0^2}, \\
 v_{,rt}(r_0, 0) &= \frac{4}{3} \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^3} [1 - (\nu+1)\gamma] \frac{c_0^2}{r_0^2}, \\
 v_{,tt}(r_0, 0) &= -\frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{c_0^2}{\varrho_1} \varrho_{,rt}(r_0, 0) + \frac{8}{3} \frac{\gamma^2\nu(\nu+1) - \gamma\nu(4\nu+1) + \nu + \gamma - 1}{(\gamma+1)^3} \frac{c_0^3}{r_0^2}, \\
 p_{,rr}(r_0, 0) &= \frac{4}{3} \frac{1}{(\gamma+1)^3} [\nu\gamma(2\gamma-1) + \gamma^2(\nu+1) - 4(\gamma-\nu) - 3] \frac{\varrho_1 c_0^2}{r_0^2}, \\
 p_{,rt}(r_0, 0) &= \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} c_0^2 \varrho_{,rt}(r_0, 0) - \frac{8\nu\gamma}{(\gamma+1)^3} \left[ \frac{\gamma(\nu+1)-1}{3} - \nu \right] \varrho_1 \frac{c_0^3}{r_0^2}, \\
 p_{,tt}(r_0, 0) &= \frac{8}{3} \frac{\nu\gamma[(4\nu+1)\gamma+2]}{(\gamma+1)^3} \frac{\varrho_1 c_0^4}{r_0^2},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

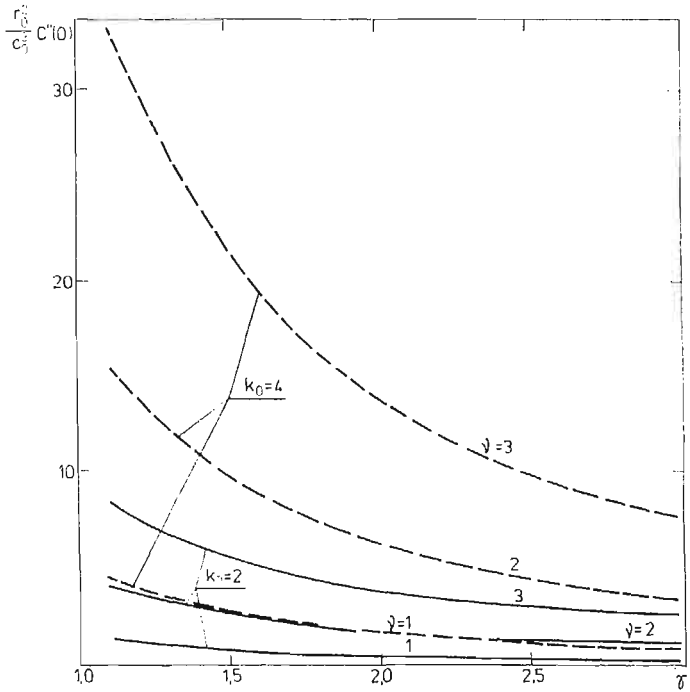
$$\begin{aligned} \varrho_{,rr}(r_0, 0) &= -\frac{2}{c_0} \varrho_{,rr}(r_0, 0) - \frac{2\nu}{\gamma^2 - 1} (\gamma + 2\nu + 1) \left( \frac{\varrho_1}{r_0^2} \right), \\ \varrho_{,ri}(r_0, 0) &= \frac{4}{3} \frac{\gamma^2(\nu^2 - 2\nu - 2) - \gamma(17\nu^2 + 14\nu - 16) + 3\nu^2 - 12\nu + 11}{(\gamma + 1)(5\gamma - 1)(\gamma - 1)} \frac{\varrho_1 c_0}{r_0^2}, \\ \varrho_{,ii}(r_0, 0) &= \left[ \frac{4}{3} \nu \frac{\gamma(4\nu + 1) + 2}{\gamma^2 - 1} - \frac{4\nu^2}{\gamma + 1} \right] \varrho_1 \left( \frac{c_0}{r_0} \right)^2. \end{aligned}$$

#### 4. Uwagi końcowe

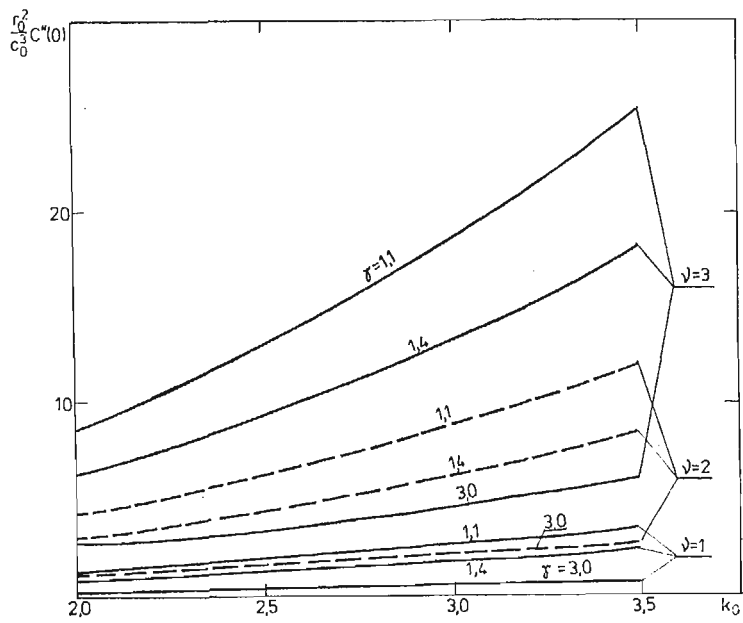
Z wyprowadzonych zależności wynika, że charakterystyki stanu i niestacjonarnego ruchu gazu politropowego w otoczeniu centrum silnego wybuchu zależą od następujących parametrów:  $\gamma$ ,  $k_0$ ,  $\nu$ ,  $\varrho_1$ ,  $\varrho_{0e}$ ,  $D$  i  $r_0$ . Zależność ta widoczna jest w sposób jawny w wyprowadzonych wzorach na współczynniki szeregów Taylora charakteryzujących poszczególne funkcje. Przykładowy charakter zmian pierwszego i drugiego współczynnika szeregu określającego trajektorię czoła fali uderzeniowej pokazujemy w formie bezwymiarowej na rysunkach 1 do 3.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

Tablica 3

Početna $\gamma$	$u_r(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{c_0} v_{r,r}(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{c_0^2} v_{r,t}(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{\varrho_1 c_0^2} p_{r,t}(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{\varrho_1} \varrho_{r,r}(r_0, 0)$	$\frac{r_0}{c_0^2} c'(0)$
1	2	3	4	5	6	7
$\nu = 1$						
$k_0 = 3$						
1.1	-0.9524	0.1237	-0.9895	-2.7211	54.5455	-0.9091
1.2	-0.9091	0.2066	-0.9642	-2.4793	25.0000	-0.8333
1.3	-0.8696	0.2617	-0.9306	-2.2684	15.3846	-0.7692
1.4	-0.8333	0.2976	-0.8929	-2.0833	10.7143	-0.7143
5/3	-0.7500	0.3375	-0.7875	-1.6875	5.4000	-0.6000
2	-0.6667	0.3333	-0.6667	-1.3333	3.0000	-0.5000
2.5	-0.5714	0.2939	-0.5225	-0.9796	1.6000	-0.4000
3	-0.5000	0.2500	-0.4167	-0.7500	1.0000	-0.3333
7	-0.2500	0.0804	-0.1161	-0.1875	0.1429	-0.1429
$\nu = 2$						
$k_0 = 3$						
1.1	-0.9524	0.2020	-1.9487	-5.4422	109.0909	-1.8341
1.2	-0.9091	0.3306	-1.8733	-4.9387	50.0000	-1.6970
1.3	-0.8696	0.4101	-1.7857	-4.5369	30.7692	-1.5819
1.4	-0.8333	0.4564	-1.6931	-4.1667	21.4286	-1.4841
5/3	-0.7500	0.4875	-1.4500	-3.3750	10.8000	-1.2833
2	-0.6667	0.4444	-1.1852	-2.6667	6.0000	-1.1111
2.5	-0.5714	0.3429	-0.8816	-1.9592	3.2000	-0.9429
3	-0.5000	0.2500	-0.6667	-1.5000	2.0000	-0.8333
7	-0.2500	-0.0268	-0.1071	-0.3750	0.2857	-0.5357

	$\nu = 3$	$k_0 = 3$				
1.1	-0.9524	0.2804	-2.9080	-8.1633	163.6364	-2.7590
1.2	-0.9091	0.4546	-2.7824	-7.4380	75.0000	-2.5606
1.3	-0.8696	0.5584	-2.6407	-6.8053	46.1539	-2.3947
1.4	-0.8333	0.6151	-2.4934	-6.2500	32.1429	-2.2540
5/3	-0.7500	0.6375	-2.1125	-5.0625	16.2000	-1.9667
2	-0.6667	0.5556	-1.7037	-4.0000	9.0000	-1.7222
2.5	-0.5714	0.3918	-1.2408	-2.9388	4.8000	-1.4857
3	-0.5000	0.2500	-0.9167	-2.2500	3.0000	-1.3333
7	-0.2500	-0.1339	-0.0982	-0.5625	0.4286	-0.9286

Pełną charakterystykę zmian wszystkich współczynników określonych wzorami (3.17) i (3.18) oraz (3.25) w funkcji wykładnika izentropii  $\gamma$  dla wartości  $k_0 = 3$  (najczęściej spotykanej w praktyce) i wszystkich rodzajów symetrii ( $\nu = 1, 2, 3$ ) podajemy w tablicach 3 i 4. Zamieszczone w nich dane pozwalają w prosty sposób określać charakterystyki niestacjonarnego ruchu i stanu gazu politropowego w bezpośrednim otoczeniu centrum wybuchu w początkowych chwilach czasu trwania procesu.

Tablica 4

Pochodna $\gamma$	$r_0 u_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{c_0} v_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{c_0^2} v_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{c_0^3} v_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0^2} p_{,rr}$
1	2	3	4	5	6
$\nu = 1$					
1.1	-0.1237	-0.3223	0.0750	2.8035	-0.0750
1.2	-0.2066	-0.4689	0.0626	2.6371	-0.0626
1.3	-0.2617	-0.5190	0.0175	2.4815	-0.0175
1.4	-0.2976	-0.5173	-0.0354	2.3313	0.0354
5/3	-0.3375	-0.4188	-0.1519	1.9560	0.1519
2	-0.3333	-0.2778	-0.2222	1.5556	0.2222
2.5	-0.2939	-0.1380	-0.2351	1.1074	0.2351
3	-0.2500	-0.0655	-0.2083	0.8036	0.2083
7	-0.0804	0.0076	-0.0488	0.1249	0.0488
$\nu = 2$					
1.1	-0.2020	-0.8681	0.2513	9.2001	1.6047
1.2	-0.3306	-1.2233	0.2204	8.5305	1.4826
1.3	-0.4101	-1.3102	0.0905	7.9169	1.4622
1.4	-0.4563	-1.2622	-0.0579	7.3363	1.4689
5/3	-0.4875	-0.9272	-0.3575	5.9295	1.4450
2	-0.4444	-0.5322	-0.4938	4.4883	1.2840
2.5	-0.3429	-0.1881	-0.4506	2.9461	0.9544
3	-0.2500	-0.0298	-0.3333	1.9524	0.6667
7	0.0268	0.1253	0.0191	0.0536	0.0077
$\nu = 3$					
1.1	-0.2804	-1.6805	0.5275	19.2199	5.0115
1.2	-0.4545	-2.3379	0.4683	17.7351	4.5905
1.3	-0.5584	-2.4710	0.2092	16.3811	4.3833
1.4	-0.6151	-2.3484	-0.0830	15.1063	4.2386
5/3	-0.6375	-1.6602	-0.6481	12.0429	3.8169
2	-0.5556	-0.9005	-0.8642	8.9410	3.1358
2.5	-0.3918	-0.2721	-0.7165	5.6703	2.1346
3	-0.2500	0.0060	-0.4583	3.6012	1.3750
7	0.1339	0.3394	0.1100	-0.1054	-0.0609



Na przykład trajektorię ruchu czoła fali uderzeniowej dla  $\gamma = 1.4$  i  $k_0 = 3$  można przedstawić zgodnie z wzorami (3.1) i danymi zamieszczonymi w tablicach 3 i 4 następującym wielomianem potęgowym:

$$R(\xi) = 1 + \xi + \frac{1}{2} a\xi^2 + \frac{1}{6} b\xi^3, \tag{3.27}$$

$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0^3} p_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0^4} p_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1} \varrho_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0} \varrho_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{\varrho_1 c_0^2} \varrho_{,rr}$	$\frac{r_0^2}{c_0^3} c''(0)$
7	8	9	10	11	12
$k_0 = 3$					
-2.8035	13.1932	81.7001	-141.2043	250.2952	2.6446
-2.6371	11.6454	28.5606	-56.8939	106.0606	2.3333
-2.4815	10.3179	13.5931	-31.2370	60.7152	2.0656
-2.3313	9.1766	7.3980	-19.6429	39.3408	1.8367
-1.9560	6.8344	1.9882	-7.8791	17.0100	1.3745
-1.5556	4.8889	0.5000	-3.5000	8.0000	1.0000
-1.1074	3.1347	0.0517	-1.4430	3.4743	0.6678
-0.8036	2.1250	-0.0238	-0.7381	1.8333	0.4762
-0.1259	0.2746	-0.0087	-0.0441	0.1173	0.0936
$k_0 = 3$					
-11.0561	47.4168	436.4788	-565.1107	893.8213	8.8873
-10.2335	41.7731	163.9515	-227.4303	375.7576	7.9057
-9.4696	36.9322	84.3000	-124.5272	213.4294	7.0599
-8.7472	32.7712	49.8352	-77.9788	137.9252	6.3371
-7.0170	24.2438	17.1891	-30.7345	58.1400	4.8823
-5.2785	17.1852	6.4198	-13.2099	26.6667	3.7119
-3.4499	10.8595	2.0353	-5.0862	11.1543	2.6835
-2.2857	7.2500	0.7619	-2.3810	5.6667	2.0952
-0.0804	0.8170	-0.1020	0.0000	0.2551	0.9260
$k_0 = 3$					
-24.7590	102.6710	1064.3926	-1271.7477	1930.5785	18.7120
-22.7940	90.3832	406.2697	-511.6576	809.0909	16.6869
-20.9736	79.8427	212.2473	-279.9338	458.1425	14.9400
-19.2620	70.7837	127.4599	-175.0820	295.1531	13.4467
-15.2116	52.2281	45.7845	-68.6573	123.3900	10.4436
-11.2126	36.8889	17.9568	-29.2284	56.0000	8.0329
-7.0884	23.1743	6.1496	-11.0291	23.0400	5.9203
-4.5179	15.3750	2.5476	-5.0238	11.5000	4.7143
0.0563	1.6272	-0.1624	-0.0735	0.4133	2.3133

gdzie:

$$\bar{R} = \frac{R(\xi)}{r_0}, \quad \xi = \frac{c_0 t}{r_0},$$

$$a = \frac{r_0}{c_0^2} c'(0) = \begin{cases} -0,7143 & \text{dla } \nu = 1 \\ -1,4841 & \text{dla } \nu = 2 \\ -2,2540 & \text{dla } \nu = 3 \end{cases}$$

$$b = \frac{r_0^2}{c_0^3} c''(r_0, 0) = \begin{cases} 1,8367 & \text{dla } \nu = 1 \\ 6,3371 & \text{dla } \nu = 2 \\ 13,4467 & \text{dla } \nu = 3 \end{cases}$$

Z warunku maleńia intensywności fali uderzeniowej w miarę oddalania się od centrum wybuchu (maleńia prędkości propagacji) wynika, że wzór (3.27) można stosować w przedziale

$$0 \leq \xi \leq -\frac{a}{b}. \quad (3.28)$$

Pozostałe funkcje można identyfikować w analogiczny sposób.

Przedstawiona w pracy metoda konstrukcji lokalnego rozwiązania problemu wybuchu skupionego stanowi pewien przyczynek do ogólnej teorii wybuchu punktowego [5]. Usuwa z tej teorii mankamenty związane z założeniem o nieskończonej wartości gęstości energii w centrum wybuchu. Ma ona charakter ogólny i można ją stosować do rozwiązywania problemów propagacji fal uderzeniowych o dowolnej intensywności również w ośrodkach niejednorodnych. Problemami tymi zajmiemy się w oddzielnym opracowaniu.

#### Literatura

1. J. G. TAYLOR, *The formation of a blast wave by a very intense explosion*, Ministry of Home Security, R. C. 210 (115-153), 1941.
2. J. G. TAYLOR, *The propagation and decay of blast waves*, British Civilian Research Committee, 1944.
3. Л. И. Седов, *Движение воздуха при сильном взрыве*, ДАН СССР, т. 52, № 1, 1946.
4. Л. И. Седов, *Распространение сильных взрывных волн*, ПММ, т. 10, в. 2, 1946.
5. В. П. Коровейников, Н. С. Мельникова, Е. В. Рязанов, *Теория точечного взрыва*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1961.
6. Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, 4-е изд., Гостехиздат, Москва, 1957.
7. Н. Л. Крашенинникова, *О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем*, Известия АН СССР, ОТН, № 8, 1955.
8. Н. Н. Кочина, Н. С. Мельникова, *О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем без учета противодействия*, ПММ, т. 22, в. 4, 1958.
9. К. П. Станюкович и др., *Физика взрыва*, Изд. Наука, Москва, 1975.
10. W. TRZCIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Shock compression of gas bubbles in ideal compressible liquid*, J. Techn. Phys., 22, 3, 1981.
11. E. WŁODARCZYK, *Роль пузырьков газа в инициировании детонации водонаполненных взрывчатых веществ (ВВВ)*. Успехи Механики 8, 2, 1985.
12. *Plane expansion of real detonation products. Closed form solutions*, M. Techn. Phys., 25, 3-4, 1984.
13. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, Część II*, PWN, Warszawa 1962.,

## Резюме

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ПОЛИТРОПНОМ ГАЗЕ В ОКРЕСТНОСТИ ГАЗОВЫХ ПРОДУКТОВ ВЗРЫВА

В работе построено локальное решение задачи сосредоточенного (точечного) взрыва в политропном газе. Учтена конечная плотность энергии в центре взрыва, что является существенным дополнением по отношению к существующим решениям. Характеристики состояния и движения политропного газа с ударной волной в окрестности центра взрыва представлены в виде рядов Тейлора для функции двух независимых переменных  $(r, t)$ . Коэффициенты ряда определены из уравнений движения и граничных условий задачи. Представлено в виде таблицы изменение этих коэффициентов в функции показателей политропы  $\gamma$  и  $k_0$  для трех симметрий: плоской, цилиндрической и сферической.

Представленное решение является дополнением к теории сосредоточенного взрыва. Оно дополняет существующие автомодельные решения для сильных точечных взрывов, базирующие на предположении о бесконечной плотности энергии в центре взрыва. Исключает недостатки этих решений и дает возможность исследования количественных зависимостей характеристик нестационарного движения политропного газа в окрестности центра взрыва.

## Summary

## ANALYTIC STUDY OF STRONG SHOCK WAVES IN A POLYTROPIC GAS IN THE VICINITY OF THE EXPLOSION CENTRE

A local solution has been constructed to the problem of concentrated (point) explosion in a polytropic gas. The finite energy density at the explosion centre is taken into account. The state and motion characteristic of the polytropic gas with the shock-wave in the vicinity of the explosion centre are presented in the form of the Taylor series for the functions of two independent variables  $(r, t)$ . The coefficients of the series are determined from the equations of motion and the boundary conditions of the problem. Variation in these coefficients in function of the polytropic exponents of  $\gamma$  and  $k_0 = 3$  for three symmetries: plane, cylindrical and spherical, is presented in the form of tables. The solution presented constitutes a contribution to the theory of concentrated explosion. It complements the existing self-similar solutions for powerful point explosions, these solutions basing upon the assumption of the infinite energy density at the explosion centre. It eliminates the shortcomings of these solutions and raises the possibility of studying the quantitative dependences on the characteristics of a non-stationary motion of the polytropic gas in the vicinity of the explosion centre.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 listopada 1985 roku.*