MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 23 (1985)

GRANICZNE ZAGADNIENIA ODWROTNE DLA RÓWNANIA FALOWEGO

Krzysztof Grysa

Politechnika Poznańska

Wstęp

Równanie falowe było wielokrotnie rozważane w literaturze naukowej ze względu na rozliczne jego zastosowania. Głównie badano je pod kątem znalezienia rozwiązań zagadnień początkowych bądź początkowo-brzegowych.

Tak zwane zagadnienia odwrotne dla równania falowego zaczęto badać stosunkowo niedawno. Przez takie zagadnienia rozumiano przy tym różnego typu problemy, m.in.

— zagadnienia wyznaczania nieznanych, stałych lub zmiennych współczynników w równaniach,

— zagadnienie identyfikacji funkcji opisującej źródła zaburzeń,

— zagadnienia identyfikacji obciążeń brzegu obszaru (tzw. graniczne zagadnienia odwrotne) i inne.

W odróżnieniu od nich zagadnienia początkowo-brzegowe zwykło się nazywać zagadnieniami prostymi lub bezpośrednimi, [10].

Prace poświęcone zagadnieniom odwrotnym dla równania falowego spotyka się w literaturze stosunkowo rzadko. Rozważane są głównie zagadnienia jednowymiarowe, wśród których — wg rozeznania autora — nieliczne są prace dotyczące granicznych zagadnień odwrotnych. Istotą tego typu zagadnień jest poszukiwanie warunków panujących wewnątrz i na brzegu rozważanego obszaru na podstawie tzw. wewnętrznych odpowiedzi przy znanych warunkach początkowych. Wewnętrzne odpowiedzi są przy tym znane na pewnej powierzchni (krzywej, zbiorze punktów izolowanych — zależnie od tego, czy rozpatrujemy zagadnienie trój-, dwu- czy jednowymiarowe) wewnątrz rozważanego obszaru, przy czym mogą to być przemieszczenia, prędkości lub inne wielkości.

W pracy niniejszej rozważane są wielowymiarowe graniczne zagadnienia odwrotne dla równania falowego. Na podstawie teorii potencjałów wprowadzono reprezentacje całkowe rozwiązań pewnych zagadnień prostych, a następnie sformułowano równania całkowe, pozwalające rozwiązywać zagadnienia odwrotne. Są to równania na gęstość potencjału opóźnionego warstwy pojedyńczej. Równania te wykorzystano przy rozwiązywaniu trzech jednowymiarowych zagadnień odwrotnych, dla których wyznaczono rozwiązania ścisłe.

1. Potencjały opóźnione

Rozważmy równanie falowe

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c^2} f(\mathbf{x}, t), \ (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T, \tag{1}$$

gdzie Ω jest pewnym obszarem regularnym o brzegu kawałkami gładkim. $\Omega \subset E^m$, gdzie E^m jest m-wymiarową przestrzenią euklidesową; $m = 1, 2, 3$. Ponadto $c = \text{const} > 0$ jest prędkością falową, $u(\mathbf{x}, t)$ jest funkcją klasy $C^{2,2}$ na $\Omega \times T$, gdzie $T = (0, t_0)$, $t_0 < +\infty$, oraz $f(\mathbf{x}, t)$ jest lokalnie całkowalna na $\Omega \times T$.

Jeśli położymy $f(\mathbf{x}, t) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, t) \in E^m \times T$, $\mathbf{y} \in E^m$, wówczas rozwiązanie równania (1) otrzymujemy w postaci (por. [1], § 9.13, [2], § 5.9):

$$V(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) = \begin{cases} \dfrac{\delta(t - r/c)}{4\pi r c^2} & \text{gdy } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^3, \\[2ex] \dfrac{\eta(t - r/c)}{2\pi c^2 \sqrt{t^2 - (r/c)^2}} & \text{gdy } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^2, \\[2ex] \dfrac{1}{2c}\eta(t - r/c) & \text{gdy } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^1, \ t \in T, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $\delta(\cdot)$ jest dystrybucją delta Diraca, $r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, a $\eta(\cdot)$ jest funkcją Heaviside'a. Funkcję $V(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)$ nazywamy rozwiązaniem podstawowym równania (1).

Wykorzystując rozwiązanie podstawowe wprowadza się potencjały opóźnione, które tutaj zapiszemy w postaci całek ze splotów rozwiązania podstawowego i odpowiednich gęstości.

Potencjałem opóźnionym warstwy pojedynczej nazywamy całkę

$$WS(\mathbf{x}, t|H) = c^2 \int_{\partial\Omega} V(\mathbf{x}-\xi, t) * H(\xi, t) dS(\xi), \ (\mathbf{x}, t) \in E^m \times T, \tag{3}$$

gdzie gęstość potencjału, $H(\xi, t)$, jest funkcją klasy $C^{0,2}$ na $\partial\Omega \times T$, $\partial\Omega$ jest brzegiem obszaru $\Omega \subset E^m$, $*$ zaś oznacza splot rozumiany następująco:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) dt, \qquad t \in T. \tag{4}$$

Potencjałem opóźnionym warstwy podwójnej nazywamy całkę

$$WD(\mathbf{x}, t|G) = c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\mathbf{x}-\xi, t)}{\partial n(\xi)} * G(\xi, t) dS(\xi), \ (\mathbf{x}, t) \in E^m \times T, \tag{5}$$

gdzie gęstość potencjału, $G(\xi, t)$, jest funkcją klasy $C^{1,2}$ na $\partial\Omega \times T$ oraz $\partial(\ )/\partial n = \mathbf{n} \cdot \gamma(\ )$; $\mathbf{n}(\xi)$ jest normalną zewnętrzną w punkcie $\xi \in \partial\Omega$.

Potencjałem opóźnionym objętościowym nazywamy całkę

$$WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0) = \int_{\Omega} \left[v_0(\mathbf{y}) + u_0(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} + f(\mathbf{y}, t) * \right] V(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) dV(\mathbf{y}), \tag{6}$$

$(\mathbf{x}, t) \in E^m \times T$, gdzie funkcja $u_0(\mathbf{x})$ jest klasy C^3 na $\bar{\Omega}$, funkcja $v_0(\mathbf{x})$ jest klasy C^2 na $\bar{\Omega}$, funkcja zaś $f(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, jest klasy $C^{0,2}$ na $\Omega \times T$, ograniczona na Ω, [7], s. 250

Potencjał WD oraz pochodna normalna potencjału WS doznają skoku przy przejściu z argumentem $\mathbf{x}$ do brzegu $\partial\Omega$. Zachodzą związki, [3]:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\xi\in\partial\Omega} WD(\mathbf{x}, t)|G) = \begin{cases} -C(\xi;\Omega)G(\xi,t)+WD(\xi,t|G), \mathbf{x}\in\Omega, \\ [1-C(\xi;\Omega)]G(\xi,t)+WD(\xi,t|G), \mathbf{x}\in\Omega', \end{cases} \tag{7}$$

$t\in T$, gdzie $\Omega' = E^m\setminus\bar{\Omega}$, oraz

$$\lim_{\mathbf{x}\to\xi\in\partial_s\Omega} \frac{\partial WS(\mathbf{x}, t|H)}{\partial n(\mathbf{x})} = \pm\frac{1}{2}H(\xi,t)+c^2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial V(\xi-\zeta,t)}{\partial n(\xi)} * H(\zeta,t)dS(\zeta), \tag{8}$$

$t\in T$, gdzie znak „+" dotyczy przypadku, gdy $\mathbf{x}\in\Omega$, a znak „−" — gdy $\mathbf{x}\in\Omega'$. Funkcja $C(\mathbf{x};\Omega)$ jest uogólnioną funkcją Heaviside'a i ma postać

$$C(\mathbf{x};\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \mathbf{x}\in \mathrm{Int}\,\Omega,\ \mathrm{Int}\,\Omega = \Omega\setminus\partial\Omega, \\ 1/2, & \text{gdy } \mathbf{x} = \xi\in\partial_s\Omega, \\ \varepsilon\in(0,1), & \text{gdy } \mathbf{x} = \xi\in(\partial\Omega\setminus\partial_s\Omega) \\ 0, & \text{gdy } \mathbf{x}\in\Omega', \end{cases} \tag{9}$$

gdzie $\partial_s\Omega$ oznacza zbiór punktów gładkości powierzchni $\partial\Omega$, [4]. Wartość ε jest równa stosunkowi kąta bryłowego, jaki tworzy powierzchnia $\partial\Omega$ w punkcie ξ, do pełnego kąta bryłowego (por. także [5], s. 52 - 53). Całki po prawej stronie wzorów (7) i (8) rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego, [6], s. 155.

Można udowodnić, że potencjał WS jest funkcją ciągłą na brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω dla $t\in T$.

W dalszych rozważaniach przy obliczaniu pochodnej normalnej nie będziemy rozróżniać zbioru punktów gładkości brzegu, $\partial_s\Omega$, od brzegu $\partial\Omega$, gdyż krawędzie i wierzchołki będziemy traktować jako domknięcia jednego z płatów ograniczonych daną krawędzią czy krawędziami, zbiegającymi się w danym wierzchołku. W praktyce obliczeniowej decyzję o tym, do którego płata powierzchniowego dołącza się krawędź (wierzchołek) podejmuje się w oparciu o przesłanki natury fizykalnej.

2. Reprezentacje całkowe rozwiązań zagadnień prostych

W oparciu o twierdzenie o wzajemności, [2], s. 370, można udowodnić następujące twierdzenie o reprezentacji całkowej rozwiązania równania falowego, [2], s. 372 - 373:

T w i e r d z e n i e 1

Niech $\Omega\subset E^m$ będzie obszarem regularnym o brzegu $\partial\Omega$. Niech funkcja $u(\mathbf{x}, t)$ klasy $C^{2,2}$ na $\Omega\times T$ spełnia równanie (1). Wówczas dla $\mathbf{x}\in E^m$ ma miejsce następująca reprezentacja całkowa:

$$\hat{C}(\mathbf{x};\Omega)u(\mathbf{x},t) = WS\left(\mathbf{x}, t\,\middle|\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) - WD(\mathbf{x}, t|u) + WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), \tag{10}$$

gdzie $u_0(\mathbf{x})$ jest klasy C^3 na $\bar{\Omega}$, $v_0(\mathbf{x})$ jest klasy C^2 na $\bar{\Omega}$, $f(\cdot, t)$ jest ograniczona i ciągła na $\bar{\Omega}$, $f(\mathbf{x}, \cdot)$ jest klasy C^2 na T oraz

$$\lim_{t\to 0} u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = v_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \tag{11}$$

a $\hat{C}(\mathbf{x}; \Omega)$ określona jest wzorem

$$\hat{C}(\mathbf{x}; \Omega = \begin{cases} C(\mathbf{x}; \Omega), & \text{gdy } \mathbf{x} \notin \partial\Omega, \\ 1 - C(\mathbf{x}; \Omega), & \text{gdy } \mathbf{x} = \xi \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Dla $\mathbf{x} = \xi \in \partial\Omega$ całki powierzchniowe po prawej stronie wzoru (10) rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego. □

Na podstawie twierdzenia 1 można udowodnić inne twierdzenia o reprezentacjach rozwiązań zagadnień prostych. Mogą to być tak reprezentacje bazujące na potencjale warstwy pojedynczej, jak i na potencjale warstwy podwójnej. Poniżej przedstawiamy twierdzenia dotyczące kilku reprezentacji całkowych rozwiązań zagadnień prostych.

Twierdzenie 2

Niech $\Omega \subset E^m$ będzie obszarem regularnym o brzegu $\partial\Omega$. Niech funkcja $u(\mathbf{x}, t)$, klasy $C^{2,2}$ na $\Omega \times T$, spełnia równanie (1) z warunkiem brzegowym

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \to \xi \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}, t) = u_b(\xi, t), \quad t \in T \tag{13}$$

oraz z warunkami początkowymi (11). Funkcja $u_b(\xi, t)$ jest przy tym klasy $C^{1,2}$ na $\partial\Omega \times T$. Wówczas funkcję $u(\mathbf{x}, t)$ można wyznaczyć ze wzoru

$$u(\mathbf{x}, t) = WS(\mathbf{x}, t|H) + WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), (\mathbf{x}, t) \in \operatorname{Int}\Omega \times T, \tag{14}$$

przy czym gęstość potencjału warstwy pojedynczej spełnia następujące równanie całkowe:

$$WS(\xi, t|H) = u_b(\xi, t) - WV(\xi, t|f, u_0, v_0), (\xi, t) \in \partial\Omega \times T. \ \square \tag{15}$$

Dowód:

Rozważmy dwa problemy propagacji fal, w obszarze Ω i w jego dopełnieniu $\Omega' = E^m \setminus \bar{\Omega}$. Niech prędkości fal w obu obszarach będą równe c. Założymy, że w obszarze Ω fala opisana jest funkcją $u'(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, spełniającą warunek brzegowy (13) i warunki początkowe (11). W obszarze Ω' fala opisana jest funkcją $u''(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega' \times T$, równą funkcji $u'(\mathbf{x}, t)$ dla $(x, t) \in \partial\Omega \times T$. W obszarze Ω' zakładamy zerowe warunki początkowe oraz brak źródeł zaburzeń. Na mocy twierdzenia 1 można napisać następujące reprezentacje całkowe funkcji u' oraz u'':

$$\begin{aligned} \hat{C}(\mathbf{x}; \Omega) u'(\mathbf{x}, t) &= WS\left(\mathbf{x}, t \,\middle|\, \frac{\partial u'}{\partial n'}\right) - WD(\mathbf{x}, t|u') + WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), \\ \hat{C}(\mathbf{x}; \Omega') u''(\mathbf{x}, t) &= WS\left(\mathbf{x}, t \,\middle|\, \frac{\partial u''}{\partial n''}\right) - WD(\mathbf{x}, t|u''), (\mathbf{x}, t) \in E^m \times T, \end{aligned} \tag{16}$$

Dodając związki (16) stronami i oznaczając

$$u(\mathbf{x}, t) = \hat{C}(\mathbf{x}; \Omega) u'(\mathbf{x}, t) + \hat{C}(\mathbf{x}; \Omega') u''(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in E^m \times T \tag{17}$$

$$H(\xi, t) = \frac{\partial u'}{\partial n'}(\xi, t) + \frac{\partial u''}{\partial n''}(\xi, t). \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times T, \quad \mathbf{n}'' = -\mathbf{n}', \tag{18}$$

otrzymujemy wzór (14). Tutaj $\mathbf{n}'$ oznacza normalną zewnętrzną do $\partial\Omega$. Gęstość potencjału WS, $H(\xi, t)$, wyznacza się z równania całkowego (15), które otrzymuje się, wykorzystując (14), (13) i ciągłość potencjału WS na powierzchni $\partial\Omega$.

W związkach (16) potencjały WD dla $\mathbf{x} = \xi \in \partial\Omega$ rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego. □

Twierdzenie 3

Niech $\Omega \subset E^m$ będzie obszarem regularnym o brzegu $\partial\Omega$. Niech funkcja $u(\mathbf{x}, t)$ klasy $C^{2,2}$ na $\Omega \times T$ spełnia równanie (1) z warunkiem brzegowym (13) oraz z warunkami początkowymi (11). Wówczas funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \operatorname{Int} \Omega \times T$ można wyznaczyć ze wzoru

$$u(\mathbf{x}, t) = -WD(\mathbf{x}, t|G) + WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), \tag{19}$$

przy czym gęstość potencjału warstwy podwójnej spełnia następujące równanie całkowe dla $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$:

$$C(\xi; \Omega)G(\xi, t) - WD(\xi, t|G) = u_b(\xi, t) - WV(\xi, t|f, u_0, v_0), \tag{20}$$

Całkę WD po lewej stronie równania (20) rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego.
□

Dowód:

Rozważmy dwa problemy propagacji fal, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2. Załóżmy przy tym, że funkcja $u''(\mathbf{x}, t)$ nie spełnia warunku (13), spełnia natomiast warunek następujący:

$$\frac{\partial u'}{\partial n'}(\xi, t) = -\frac{\partial u''}{\partial n''}(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times T, \tag{21}$$

gdzie $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}''$ jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega$.

Dla funkcji $u'(\mathbf{x}, t)$ i $u''(\mathbf{x}, t)$ prawdziwe są reprezentacje (16). Dodając je stronami, wprowadzając oznaczenie (17) oraz oznaczając

$$G(\xi, t) = u'(\xi, t) - u''(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times T; \tag{22}$$

otrzymujemy wzór (19). Gęstość potencjału WD, $G(\xi, t)$, wyznacza się z równania całkowego postaci (20), które otrzymuje się, wykorzystując (19), (13) i (7).

Twierdzenie 4

Niech $\Omega \subset E^m$ będzie obszarem regularnym o brzegu $\partial\Omega$. Niech funkcja $u(\mathbf{x}, t)$ klasy $C^{2,2}$ na $\Omega \times T$ spełnia równanie (1) z warunkami początkowymi (11) i z warunkiem brzegowym

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \to \xi \in \partial\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n(\mathbf{x})} = u_n(\xi, t), \quad t \in T, \tag{23}$$

gdzie $u_n(\xi, t)$ jest funkcją klasy $C^{0,2}$ na $\partial\Omega \times T$.

Wówczas funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \operatorname{Int} \Omega \times T$, można wyznaczyć ze wzoru (14), przy czym gęstość potencjału warstwy pojedynczej spełnia następujące równanie całkowe dla $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H(\xi, t) + c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\xi - \zeta, t)}{\partial n(\xi)} \times H(\zeta, t) dS(\zeta) = \\ = u_n(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial n(\xi)} WV(\xi, t|f, u_0, v_0). \end{aligned} \tag{24}$$

Całkę powierzchniową po lewej stronie równania całkowego (24) rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego. □

Dowód twierdzenia 4 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 2. Równanie całkowe (24) otrzymuje się wykorzystując (14), (23) i (8).

T w i e r d z e n i e 5

Niech $\Omega \subset E^m$ będzie obszarem regularnym o brzegu $\partial\Omega$. Niech funkcja $u(\mathbf{x}, t)$ klasy $C^{2,2}$ na $\Omega \times T$ spełnia równanie (1) z warunkami początkowymi (11) i z warunkami brzegowymi postaci (13) na części S_1 brzegu oraz postaci (23) na części $S_2 = \partial\Omega \setminus \overline{S}_1$. Wówczas funkcję $u(\mathbf{x}, t)$ można wyznaczyć ze wzoru (14), przy czym gęstość potencjału opóźnionego warstwy pojedyńczej, $H(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, spełnia następujące związki całkowe: równanie (15) dla $(\xi, t) \in S_1 \times \overline{T}$ oraz równanie (24) dla $(\xi, t) \in S_2 \times T$. □

Dowód:

Postać (14) reprezentacji całkowej funkcji $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int}\, \Omega \times T$, jest niezależna od rodzaju warunków brzegowych (por. dowód tw. 2). Jak pokazano w dowodach twierdzeń 2 i 4, z postaci (14) funkcji $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \text{Int}\, \Omega \times T$ i z własności potencjału WS na brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω wynikają związki (15) i (24). W szczególności gdy dla $(\xi, t) \in \overline{S}_1 \times T$, określona jest funkcja $u_b(\xi, t)$, a dla $(\xi, t) \in S_2 \times T$ — funkcja $u_n(\xi, t)$; wówczas gęstość $H(\xi, t)$ potencjału WS musi spełniać odpowiednio równanie (15) dla $(\xi, t) \in \overline{S}_1 \times T$ i równanie (24) dla $(\xi, t) \in S_2 \times T$. □

Można udowodnić, że jeśli istnieje rozwiązanie układu równań całkowych na gęstość $H(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, potencjału WS, tzn. układu składającego się z równań (15) dla $(\xi, t) \in \overline{S}_1 \times T$ i (24) dla $(\xi, t) \in S_2 \times T$, to jest ono jednoznaczne.

3. Równania całkowe dla zagadnień odwrotnych

Jak już wspomniano we wstępie, zajmiemy się tylko granicznymi zagadnieniami odwrotnymi, tzn. zagadnieniami, w których wyznacza się funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in (\Omega \setminus \partial\Omega^*) \times T$, na podstawie tzw. wewnętrznej odpowiedzi (w skrócie WO), którą jest funkcja opisująca przemieszczenia lub inne wielkości dla $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega^* \times T$, gdzie $\partial\Omega^*$ jest powierzchnią regularną, ograniczającą obszar $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$.

Przyjmiemy następującą definicję WO:

Definicja

Niech $\Omega \subset E^m$ będzie obszarem regularnym o brzegu $\partial\Omega$. Niech $\Omega^* \subset \Omega$ będzie obszarem regularnym o brzegu $\partial\Omega^*$. Niech $T = (0, t_0)$, $t_0 < +\infty$, będzie przedziałem czasowym.

a) Funkcja $u^*(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$, może opisywać WO przemieszczeniową (WOP), eśli $u^*(\mathbf{x}^*, t)$ jest klasy $C^{2,2}$ na $\partial\Omega^* \times T$.

b) Funkcja $g^*(\mathbf{x}^*, t)$, $(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$, może opisywać WO typu gradientowego lub odkształceniowego (WOO), jeśli $g^*(\mathbf{x}^*, t)$ jest klasy $C^{1,2}$ na $\partial\Omega^* \times T$. Poszukiwana funkcja $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, będąca rozwiązaniem równania (1), musi wówczas spełniać warunek

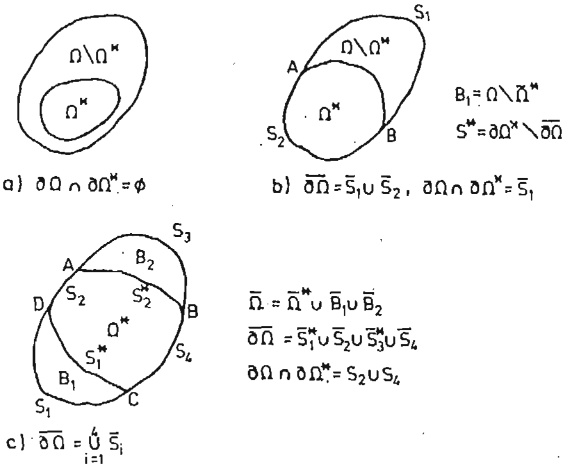
$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \to \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n(\mathbf{x})} = g^*(\mathbf{x}^*, t), \qquad t \in T, \tag{25}$$

gdzie $\mathbf{n}(\mathbf{x}^*)$ jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega^*$.

c) Funkcja $v^*(\mathbf{x}^*, t)$, $(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$, może opisywać *WO* prędkościową (*WOV*), jeśli $v^*(\mathbf{x}^*, t)$ jest klasy $C^{2,1}$ na $\partial\Omega^* \times T$. □

W zbiorze $\partial\Omega^* \times \mathrm{T}$ dopuszcza się istnienie hiperpowierzchni na których *WO* doznają skoku.

Obszar $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$ może być taki, że $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Na rys. 1 przedstawiono trzy najbardziej charakterystyczne przypadki zbiorów Ω^* i Ω. O funkcjach $u_0(\mathbf{x})$, $v_0(\mathbf{x})$ i $f(\mathbf{x}, t)$, występujących w sformułowanych niżej problemach, zakłada się, że są odpowiedniej klasy różniczkowalności.



Rys. 1

Problem 1

Niech Ω i Ω^* będą obszarami regularnymi takimi, że $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$. Niech dana będzie funkcja $u^*(x^*, t)$, $(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$ oraz funkcje $u_0(\mathbf{x})$ i $v_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, takie, że u^* opisuje *WOP*, przy czym

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} u^*(\mathbf{x}^*, t) = u_0(\mathbf{x}^*), \\ &\lim_{t\to 0} \frac{\partial u^*(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t} = v_0(\mathbf{x}^*), \qquad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*. \end{aligned} \tag{26}$$

Niech ponadto dana będzie funkcja $f(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, opisująca prawą stronę równania (1), oraz współczynnik $c = \mathrm{const}$.

Należy wyznaczyć taką funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in (\Omega \setminus \partial\Omega^*) \times T$, dla której

$$\lim_{(\Omega\setminus\partial\Omega^*)\ni \mathbf{x}\to\mathbf{x}^*\in\partial\Omega^*} u(\mathbf{x}, t) = u^*(\mathbf{x}^*, t), \qquad t \in T, \tag{27}$$

oraz spełnione są warunki początkowe (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje $u_b(\xi, t)$ i $u_n(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, stanowiące prawe strony związków (13) i (23). □

Załóżmy najpierw, że znana jest funkcja $u_b(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$. Wówczas na mocy twierdzenia 2 można przedstawić funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathrm{Int}\, \Omega \times T$, w postaci (14). W szczególności dla $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*$ mamy

$$u(\mathbf{x}^*, t) = WS(\mathbf{x}^*, t|H) + WV(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \qquad (\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T, \tag{28}$$

przy czym gęstość potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej wyznacza się na podstawie równania całkowego (15).

Jednakże funkcja $u_b(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, jest jedną z funkcji poszukiwanych. Jeśli funkcja $u(\mathbf{x}, t)$ ma być rozwiązaniem problemu (1), to na mocy związków (27) i (28) otrzymujemy w miejsce równania (15) następujące równanie całkowe na gęstość H potencjału WS:

$$WS(\mathbf{x}^*, t|H) = u^*(\mathbf{x}^*, t) - WV(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0),$$

lub wykorzystując (3),

$$c^2 \int_{\partial\Omega} V(\mathbf{x}^* - \xi, t) * H(\xi, t) dS(\xi) = u^*(\mathbf{x}^*, t) - WV(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \tag{29}$$

$(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$. Warto tu zwrócić uwagę na fakt, że wykorzystanie twierdzenia 3 w miejsce twierdzenia 2 nie zmienia typu równania całkowego na gęstość potencjału (por. wzór (19)). Równanie to w dalszym ciągu pozostaje równaniem I rodzaju.

Po wyznaczeniu funkcji $H(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$ z równania (29), funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \in \operatorname{Int} \Omega \times T$, wyznacza się ze związku (14), a $u_b(\xi, t)$ i $u_n(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, na podstawie związków (15) i (24).

Szczególnym przypadkiem problemu 1 jest zagadnienie, w którym brzeg $\partial\Omega^*$ obszaru $\Omega^* \subset \Omega$ ma część wspólną z brzegiem $\partial\Omega$ (rys. 1b). Wówczas równanie całkowe (29) ma dla $(\mathbf{x}^*, t) \in (\partial\Omega \cap \partial\Omega^*) \times T$ tę samą postać co równanie całkowe (15), a funkcja $u_b(\xi, t)$ jest dla $(\xi, t) \in (\partial\Omega \cap \partial\Omega^*) \times T$ równa funkcji $u^*(\mathbf{x}^*, t)$.

Problem 2

Niech Ω i Ω^* będą obszarami regularnymi takimi, że $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$. Niech dana będzie funkcja $g^*(\mathbf{x}^*, t)$, $(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$, oraz funkcje $u_0(\mathbf{x})$ i $v_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, takie, że g^* opisuje WOO, przy czym

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} g^*(\mathbf{x}^*, t) &= \left.\frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}, \\ \lim_{t\to 0} \frac{\partial g^*(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t} &= \left.\frac{\partial v_0(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}, \qquad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*. \end{aligned} \tag{30}$$

Niech dana będzie funkcja $f(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, opisująca prawą stronę równania (1), oraz współczynnik $c = \text{const}$.

Należy wyznaczyć taką funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, dla której spełnione są warunki (25) oraz (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje $u_b(\xi, t)$ i $u_n(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, stanowiące prawe strony związków (13) i (23). □

Rozważmy najpierw sytuację, w której $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = \emptyset$ (rys. 1a). Załóżmy, że znana jest funkcja $u_b(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$. Funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \operatorname{Int} \Omega \times T$, można przedstawić w postaci (14). Różniczkując ten wzór otrzymamy

$$\nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla WS(\mathbf{x}, t|H) + \nabla WV(\mathbf{x}, t|f, u_0, v_0), \qquad (\mathbf{x}, t) \in \operatorname{Int}\Omega \times T,$$

skąd dla $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*$ można — wobec (25) — otrzymać związek

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) \cdot [\nabla u(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = g^*(\mathbf{x}^*, t) = \frac{\partial WS}{\partial n(\mathbf{x}^*)}(\mathbf{x}^*, t|H) + \\ + \frac{\partial WV}{\partial n(\mathbf{x}^*)}(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \ (\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T, \end{aligned} \tag{31}$$

przy czym gęstość H potencjału WS wyznacza się na podstawie równania całkowego (15).

Jednakże funkcja $u_b(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, jest jedną z funkcji poszukiwanych. Jeśli więc funkcja $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, ma być rozwiązaniem problemu 2, to gęstość H musi być wyznaczona na podstawie równania całkowego (31). Równanie to możemy przepisać w postaci

$$c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\mathbf{x}^* - \xi, t)}{\partial n(\mathbf{x}^*)} * H(\xi, t) dS(\xi) = g^*(\mathbf{x}^*, t) - \frac{\partial WV}{\partial n(\mathbf{x}^*)}(\mathbf{x}^*, t | f, u_0, v_0), \tag{32}$$

$(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$. Rozważmy teraz sytuację, gdy $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = S_2 \neq \emptyset$ (rys. 1b). Wówczas dla $\mathbf{x}^* = \xi \in S_2$ pochodna normalna potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej doznaje skoku (por. (8)). Zatem dla $\mathbf{x}^* = \xi \in S_2$ w miejsce równania (32) mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H(\xi, t) + c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\xi - \zeta, t)}{\partial n(\xi)} * H(\xi, t) dS(\zeta) = \\ = g^*(\xi, t) - \frac{\partial WV}{\partial n(\xi)}(\xi, t | f, u_0, v_0), \; (\xi, t) \in S_2 \times T, \end{aligned} \tag{33}$$

a dla $(\mathbf{x}^*, t) \in (\partial\Omega^* \setminus S_2) \times T$ — równanie (32). Tak więc w przypadku, gdy $\partial\Omega^* \cap \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, układ równań całkowych na gęstość H potencjału WS składa się z dwóch równań, z których jedno jest I rodzaju, a drugie — II rodzaju.

Po wyznaczeniu funkcji $H(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathrm{Int}\, \Omega \times T$, wyznacza się ze związku (14), zaś $u_b(\xi, t)$, $u_n(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, na podstawie związków (15) i (24). Jeśli $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = S_2 \neq \emptyset$, wówczas dla $\mathbf{x}^* = \xi \in S_2$ $u_n(\xi, t) = g^*(\xi, t)$ i po znalezieniu gęstości H funkcję $u_n(\xi, t)$ wyznacza się tylko dla $(\xi, t) \in (\partial\Omega \setminus S_2) \times T$.

Problem 3

Niech Ω i Ω^* będą obszarami regularnymi, takimi, że $\Omega^* \subset \Omega \subset E^m$. Niech dana będzie funkcja $v^*(\mathbf{x}^*, t)$, $(\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T$, oraz funkcja $u_0(\mathbf{x})$ i $v_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, takie, że v^* opisuje WOV, przy czym

$$\lim_{t \to 0} v^*(\mathbf{x}^*, t) = v_0(\mathbf{x}^*), \qquad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*. \tag{34}$$

Niech dana będzie funkcja $f(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, opisująca prawą stronę równania (1), oraz współczynnik $c = \mathrm{const}$.

Należy wyznaczyć taką funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, dla której spełnione będą warunki (11) oraz warunek

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \to \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = v^*(\mathbf{x}^*, t), \qquad t \in T. \tag{35}$$

Ponadto należy wyznaczyć funkcje $u_b(\xi, t)$ i $u_n(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, stanowiące prawe strony związków (13) i (23). □

Załóżmy, że znana jest funkcja $u_b(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$. Funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathrm{Int}\Omega \times T$, można przedstawić w postaci (14). Różniczkując ten wzór po czasie otrzymujemy

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial WS}{\partial t}(\mathbf{x}, t | H) + \frac{\partial WV}{\partial t}(\mathbf{x}, t | f, u_0, v_0), \qquad (\mathbf{x}, t) \in \mathrm{Int}\Omega \times T,$$

skąd dla $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*$ można — wobec (35) — otrzymać związek

$$v^*(\mathbf{x}^*, t) = \frac{\partial WS}{\partial t}(\mathbf{x}^*, t|H) + \frac{\partial WV}{\partial t}(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \quad (\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T, \tag{36}$$

przy czym gęstość H potencjału WS wyznacza się na podstawie równania całkowego (15).

Jednakże funkcja $u_b(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, jest jedną z funkcji poszukiwanych. Jeśli więc funkcja $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times T$, ma być rozwiązaniem problemu 3, to gęstość H musi być *wyznaczona na podstawie równania (36), które możemy przepisać w postaci*

$$\begin{aligned} c^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V(\mathbf{x}^* - \xi, t)}{\partial t} * H(\xi, t) dS(\xi) = v^*(\mathbf{x}^*, t) - \\ - \frac{\partial WV}{\partial t}(\mathbf{x}^*, t|f, u_0, v_0), \quad (\mathbf{x}^*, t) \in \partial\Omega^* \times T. \end{aligned} \tag{37}$$

Przechodząc w (37) z chwilą t do zera otrzymujemy związek (34). Przejście to wynika z własności potencjału objętościowego WV (por. [7], s. 247 i 249 - 251; w monografii tej wprowadzono inne niż w przedstawionej pracy oznaczenia). Całkując natomiast (37) od 0 do t, wykorzystując (14) i przechodząc z t do zera otrzymujemy $(11)_1$.

Po wyznaczeniu funkcji $H(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, funkcję $u(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathrm{Int}\Omega \times T$, wyznacza się ze związku (14), a $u_b(\xi, t)$ i $u_n(\xi, t)$, $(\xi, t) \in \partial\Omega \times T$, na podstawie związków (15) i (24).

W sposób podobny jak wyżej można także sformułować problemy odwrotne, w których na różnych częściach powierzchni $\partial\Omega^*$ dane są różnego typu WO. Tego rodzaju problemy prowadzą do układów równań całkowych na płatach otwartych, przy czym istnienie i jednoznaczność rozwiązań tych równań jest sprawą otwartą. Dla przykładu jeśli $\overline{\partial\Omega^*} = \overline{S_1^*} \cup \overline{S_2^*}$ i $\partial\Omega^* \cap \partial\Omega = \emptyset$, przy czym na S_1^* dana jest WOP, a na S_2^* — WOO, to w celu *wyznaczenia gęstości H potencjału WS trzeba rozwiązać układ równań całkowych, na* które składają się równanie (29) dla $(\mathbf{x}^*, t) \in S_1^* \times T$ oraz równanie (32) dla $(\mathbf{x}^*, t) \in S_2^* \times T$.

W następnej części pracy rozważymy pewne jednowymiarowe przypadki zagadnień odwrotnych. Ponieważ wówczas $\mathbf{x} \in E^1$, więc w miejsce $\mathbf{x}$ będziemy pisać x. Również oś Ox_1, orientującą przestrzeń E^1, oznaczymy Ox.

4. Zagadnienia jednowymiarowe

W przypadku zagadnień jednowymiarowych, gdy $x \in E^1$, obszary Ω i Ω^* są odcinkami lub półprostymi, a ich brzegi $\partial\Omega$ i $\partial\Omega^*$ — zbiorami punktów izolowanych. Potencjały WS i WV oraz całki powierzchniowe, występujące w równaniach całkowych (33), (32) i innych przyjmują szczególnie prostą postać. Jeśli $\Omega = \{x \in E^1 : 0 < x < l\} \equiv (0,l) \subset E^1$, wówczas $\partial\Omega = \{x : x = 0 \vee x = l\} \equiv \{0,l\}$, a wspomniane wyżej potencjały i całki przyjmują postacie następujące:

$$WS(x, t|H) = \frac{c}{2}\left[\eta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) * H(0, t) + \eta\left(t - \frac{|x-l|}{c}\right) * H(l, t)\right], \quad (x, t) \in E^1 \times T, \tag{38}$$

$$WV(x, t|f, u_0, v_0) = \frac{1}{2c} \int\limits_0^l \left[v_0(y) + u_0(y) \frac{\partial}{\partial t} + f(y, t) \times \right] \eta \left(t - \frac{|x-y|}{c} \right) dy,$$

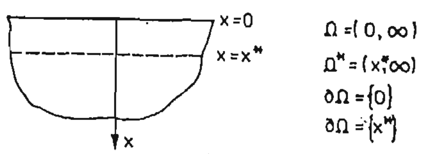
$$(x, t) \in E^1 \times T, \qquad (39)$$

$$c^2 \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial V(x^* - \xi, t)}{\partial n(x^*)} \times H(\xi, t) dS(\xi) = \frac{1}{2} n(x^*) \left[\delta \left(t - \frac{l - x^*}{c} \right) \times H(l, t) - \right.$$
$$\left. - \delta \left(t - \frac{x^*}{c} \right) * H(0, t) \right], \quad (x^*, t) \in \partial\Omega^* \times T. \qquad (40)$$

Tutaj $n(x^*)$ jest równe 1 lub -1. Gdy $\Omega = \{x \in E^1 : x > 0\} = (0, \infty) \subset E^1$, $\partial\Omega = \{0\}$, we wzorach (38) i (40) trzeba pominąć sploty zawierające $H(l, t)$, we wzorze zaś (39) — górną granicę całkowania zamienić na $+\infty$.

Problem 4

Niech $\Omega = \{x \in E^1 : x > 0\} = (0, \infty)$ oraz niech $\Omega^* = (x^*, \infty)$ $x^* > 0$ (rys. 2). Rozważmy dla takich obszarów problem 1, w którym dana jest funkcja $u^*(x^*, t)$, $t \in T$, opisująca WOP, funkcje $u_0(x)$, $v_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, spełniające warunki (26), oraz funkcja $f(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times T$; współczynnik $c = \text{const}$. Należy wyznaczyć funkcję $u(x, t)$, $(x, t) \in (\Omega \setminus \{x^*\}) \times T$, spełniającą warunek (27) oraz warunki początkowe (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje $u_b(0, t)$ oraz $u_n(0, t)$, $t \in T$, stanowiące w rozważanym przypadku prawe strony związków (13) i (23). □



Rys. 2

Wobec (38) równanie całkowe (29) przyjmuje tutaj postać następującą:

$$\frac{c}{2} \eta \left(t - \frac{x^*}{c} \right) \times H(0, t) = u^*(x^*, t) - WV(x^*, t|f. u_0, v_0), \quad t \in T. \qquad (41)$$

Równanie to łatwo rozwiązuje się w transformatach Laplace'a. Otrzymujemy

$$\bar{H}(0, s) = \frac{2s}{c} \exp \left(\frac{x^* s}{c} \right) [\bar{u}^*(x^*, s) - \overline{WV}(x^*, s|f, u_0, v_0)], \qquad (42)$$

gdzie nadkreślenie oznacza przetransformowaną postać funkcji; s — parametr transformacji.

Związek (14) ma w rozważanym przypadku postać następującą:

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \eta \left(t - \frac{x}{c} \right) \times H(0, t) + WV(x, t|f, u_0, v_0), \quad (x, t) \in \Omega \times T, \qquad (43)$$

Wstawiając prawą stronę związku (42) do przetransformowanego wzoru (43) i odwracając transformaty znajdujemy

$$u(x,t) = u^*\left(x^*, t-\frac{x-x^*}{c}\right)_+ - WV\left(x^*, t-\frac{x-x^*}{c}\middle| f, u_0, v_0\right)_+ + \\ + WV(x, t|f, u_0, v_0), \quad (x,t)\in\Omega\times T, \tag{44}$$

gdzie

$$U(x,t)_+ = \begin{cases} U(x,t) & \text{dla } t\geqslant 0,\\ 0 & \text{dla } t<0.\end{cases}$$

Funkcję $WV(x, t\,|\,f, u_0, v_0)$, $(x, t)\in\Omega\times T$, można przekształcić do postaci

$$WV(x,t|f,u_0,v_0) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct)+u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy + \\ + \frac{1}{2c}\int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)dyd\tau, \quad (x,t)\in\Omega\times T \tag{45}$$

znanej jako rozwiązanie d'Alemberta drgań struny, [8], s. 583. O funkcjach u_0, v_0 i f zakłada się przy tym, że są nieparzystymi funkcjami argumentu $x\in E^1$. Jak łatwo sprawdzić, funkcja $u(x, t)$, określona wzorem (44), spełnia warunki (11) i (27). Wynika to stąd, że dla $t = 0$ i $x-x^* < 0$ ma miejsce równość

$$u^*\left(x^*, \frac{x^*-x}{c}\right)_+ = WV\left(x^*, \frac{x^*-x}{c}\middle| f, u_0, v_0\right)_+,$$

związana z faktem, że dopóki zaburzenie nie dojdzie od brzegu do punktu x^*, dopóty wartość funkcji $u(x^*, t)$ w tym punkcie zależy tylko od warunków początkowych i funkcji opisującej wewnętrzne źródła zaburzeń (por. także [10]).

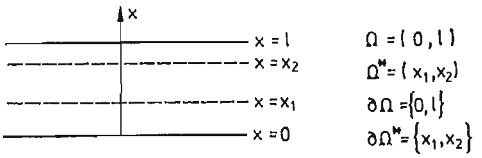
Wykorzystując związki (13) i (23) oraz fakt, że $WV(0, t\,|\,f, u_0, v_0) = 0$, znajdujemy

$$u_b(0,t) = u^*\left(x^*, t+\frac{x^*}{c}\right) - WV\left(x^*, t+\frac{x^*}{c}\middle| f, u_0, v_0\right), \quad t\in T,$$

$$u_n(0,t) = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial u^*(x^*,\tau)}{\partial\tau} - \frac{\partial WV(x^*, \tau|f,u_0,v_0)}{\partial\tau}\right]_{\tau=t+\frac{x^*}{c}} - \\ - \left.\frac{\partial WV(x,t|f,u_0,v_0)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad t\in T. \tag{46}$$

Problem 5

Niech $\Omega = (0, l)$ oraz niech $\Omega^* = \{x\in E^1 : 0 < x_1 < x < x_2 < l\}$, (rys. 3). Rozważmy dla takich obszarów problem 1, tzn. problem, w którym dana jest funkcja $u^*(x^*, t)$, $(x^*, t)\in\partial\Omega^*\times T$, opisująca WOP, funkcje $u_0(x)$ i $v_0(x)$, $x\in\bar{\Omega}$, spełniające warunki (26) oraz funkcja $f(x, t)$, $(x, t)\in\Omega\times T$ i współczynnik c = const. Wyznaczyć należy funkcję $u(x, t)$, $(x, t)\in(\Omega\setminus\partial\Omega^*)\times T$, spełniającą warunek (27), oraz warunki początkowe (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje $u_b(\xi, t)$ oraz $u_n(\xi, t)$, $(\xi, t)\in\partial\Omega\times T$, stanowiące w rozważanym przypadku prawe strony związków (13) i (23). □



Rys. 3

Wobec (38) równanie całkowe (29) przyjmie tutaj postać układu równań na funkcje $H(0, t)$ i $H(l, t)$, $t \in T$:

$$\begin{aligned}\eta\left(t-\frac{x_i}{c}\right) * H(0,t)+\eta\left(t-\frac{l-x_i}{c}\right) * H(l,t) &= \\ = \frac{2}{c}\left[u^*(x_i,t)-WV(x_i,t|f,u_0,v_0)\right],\end{aligned} \tag{47}$$

$i = 1, 2$. Układ równań całkowych (47) bez trudu rozwiązuje się w transformatach Laplace'a. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{H}(0,s) = \frac{s}{c\sinh\left(\frac{L}{c}s\right)}&\left\{[\bar{u}^*(x_1,s)-\overline{WV}(x_1,s|f,u_0,v_0)]\exp\left(\frac{x_2}{c}s\right)-\right.\\ &\left.-[\bar{u}^*(x_2,s)-\overline{WV}(x_2,s|f,u_0,v_0)]\exp\left(\frac{x_1}{c}s\right)\right\},\end{aligned} \tag{48$_1$}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}(l,s) = -\frac{s}{c\sinh\left(\frac{L}{c}s\right)}&\left\{[\bar{u}^*(x_1,s)-\overline{WV}(x_1,s|f,u_0,v_0)]\exp\left(\frac{l-x_2}{c}s\right)-\right.\\ &\left.-[\bar{u}^*(x_2,s)-\overline{WV}(x_2,s|f,u_0,v_0)]\exp\left(\frac{l-x_1}{c}s\right)\right\},\end{aligned} \tag{48$_2$}$$

gdzie $L = x_2 - x_1$. Związek (14) ma w tym przypadku postać

$$\begin{aligned}u(x,t) = \frac{c}{2}\left[\eta\left(t-\frac{x}{c}\right) * H(0,t)+\eta\left(t-\frac{l-x}{c}\right) * H(l,t)\right]+\\ +WV(x,t|f,u_0,v_0), \quad (x,t)\in\Omega\times T.\end{aligned} \tag{49}$$

Wstawiając prawe strony wzorów (48) do przetransformowanego wzoru (49) i wykorzystując związki z tablicy B.2 z monografii [9] do odwrócenia transformat otrzymujemy

$$\begin{aligned}u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[&u^*\left(x_1, t+\frac{x_1-x-2Ln}{c}\right)_+ + u^*\left(x_2, t-\frac{x_2-x+2Ln}{c}\right)_+ -\\ &-WV\left(x_1, t+\frac{x_1-x-2Ln}{c}\Big|f,u_0,v_0\right)_+ - WV\left(x_2, t-\frac{x_2-x+2Ln}{c}\Big|f,u_0,v_0\right)_+\Bigg]-\\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[u^*\left(x_1, t-\frac{x_1-x+2Ln}{c}\right)_+ + u^*\left(x_2, t+\frac{x_2-x+2Ln}{c}\right)_+ -\end{aligned} \tag{50}$$

$$-WV\left(x_1, t-\frac{x_1-x+2Ln}{c}\middle| f, u_0, v_0\right)_+ -WV\left(x_2, t+\frac{x_2-x-2Ln}{c}\middle| f, u_0, v_0\right)_+\Bigg]+$$
$$+WV(x, t|f, u_0, v_0), \quad (x, t)\in \Omega\times T.$$

Funkcję WV można przekształcić do postaci (45) przy założeniu, że $u_0(x) = -u_0(-x)$, $u_0(x+2l) = u_0(x)$, $v_0(x) = -v_0(-x)$, $v_0(x+2l) = v_0(x)$, $f(x, t) = -f(-x, t)$, $f(x+2l, t) = f(x, t)$; $(x, t)\in E^1\times T$.

Kładąc we wzorze (50) $x = 0$ lub $x = l$ otrzymujemy związki (4.7) z pracy [10], opisujące funkcję $u_b(\xi, t)$, $(\xi, t)\in\partial\Omega\times T$. Cytowane wzory otrzymano w pracy [10] na drodze odmiennej od przedstawionej tutaj. Wyznaczenie wzorów opisujących funkcję $u_n(\xi, t)$, $(\xi, t)\in\partial\Omega\times T$, nie przedstawia większych trudności, dlatego ich tutaj nie będziemy przytaczać.

Problem 6

Niech $\Omega = (0, \infty)$ oraz niech $\Omega^* = (x^*, \infty)$, $x^* > 0$ (rys. 2). Rozważmy dla takich obszarów problem 3, tzn. problem, w którym dana jest funkcja $v^*(x^*, t)$, $t\in T$, opisująca WOV, $u_0(x)$; $v_0(x)$, $x\in\bar{\Omega}$, spełniająca warunek (34), oraz funkcja $f(x, t)$, $(x, t)\in\Omega\times T$ i współczynnik c = const. Wyznaczyć należy funkcję $u(x, t)$, $(x, t)\in\Omega\times T$, spełniającą warunek (35) oraz warunki początkowe (11). Ponadto należy wyznaczyć funkcje $u_b(0, t)$ oraz $u_n(0, t)$, $t\in T$, stanowiące w rozważanym przypadku prawe strony związków (13) i (23). □

Wobec (38) równanie całkowe (37) przyjmie postać następującą:

$$\frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\eta\left(t-\frac{x^*}{c}\right)\times H(0, t)\right] = v^*(x^*, t)-\frac{\partial WV}{\partial t}(x^*, t|f, u_0, v_0), \qquad t\in T, \tag{51}$$

Równanie to rozwiązujemy w transformatach Laplace'a. Otrzymujemy

$$\bar{H}(0, s) = \frac{2s}{c}\exp\left(\frac{x^*s}{c}\right)\left[\frac{1}{s}\bar{v}^*(x^*, s)-\overline{WV}(x^*, s|f, u_0, v_0)\right]. \tag{52}$$

Z porównania związków (52) i (42) widać, że mają one analogiczną budowę. Postępując dalej tak jak w problemie 4 otrzymujemy ostatecznie

$$u(x, t) = \int\limits_0^{t-\frac{x-x^*}{c}} v^*(x^*, \tau)d\tau\eta\left(t-\frac{x-x^*}{c}\right)-WV\left(x^*, t-\frac{x-x^*}{c}\middle| f, u_0, v_0\right)+ \tag{53}$$
$$+WV(x, t|f, u_0, v_0), \quad (x, t)\in\Omega\times T,$$

Związki opisujące funkcje $u_b(0, t)$ i $u_n(0, t)$, $t\in T$, wyznacza się podobnie jak w problemie 4.

5. Uwagi końcowe

Przedstawiona w pracy metoda rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych dla równania falowego, bazująca na całkowym sformułowaniu problemu, pozwala bez trudu sformułować równania całkowe lub układ równań całkowych na gęstość potencjału opóźnionego warstwy pojedynczej bez względu na rodzaj WO i wymiar zagadnienia. W przypadku zagadnień jednowymiarowych równania te przyjmują bardzo prostą postać, pozwalającą na otrzymanie rozwiązań ścisłych. Fakt ten jest wart podkreślenia, gdyż graniczne zagadnienia odwrotne teorii przewodnictwa cieplnego, którym głównie poświęcano uwagę w ostatnich latach, nie doczekały się jeszcze rozwiązań ścisłych.

Do budowania równań całkowych dla zagadnień odwrotnych rozpatrywanych w pracy wykorzystano reprezentacje całkowe rozwiązań zagadnień prostych, zawierające potencjał opóźniony warstwy pojedynczej. Jak pokazano w problemie 1, wykorzystanie reprezentacji całkowych zawierających potencjał opóźniony warstwy podwójnej nie zmienia typu równania całkowego na gęstość potencjału. Budowanie równań całkowych dla problemów 1 - 3 i ich jednowymiarowych egzemplifikacji w oparciu o twierdzenie 3 nie nastręcza większych trudności i dlatego w pracy nie poświęcono im uwagi.

Interesujący jest fakt, że całki powierzchniowe ze splotów można w przypadku zagadnień trój- i dwuwymiarowych sprowadzić do całek potrójnych. Wynika to z postaci rozwiązania podstawowego równania falowego, (2). W przypadku gdy $f(\mathbf{x}, t) = 0$, $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \times T$, oraz zerowych warunków początkowych fakt ten znacznie upraszcza zagadnienie rozwiązania problemu odwrotnego.

Gdy obszar $\Omega \subset E^m$, $m = 2, 3$, ma złożony kształt, wówczas przy rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych można posłużyć się metodą elementów brzegowych, często wykorzystywaną do rozwiązywania zagadnień prostych, [16 - 19], gdyż punktem wyjścia dla tej metody jest właśnie sprowadzenie rozważanego problemu do układu równań całkowych, zawierającego całki powierzchniowe.

Literatura

1. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
2. A. C. ERINGEN, E. S. SUHUBI, *Elastodynamics*, vol. II — Linear Theory, Academic Press, New York 1975.
3. K. GRYSA, *Zagadnienia odwrotne w teorii nieustalonego przewodnictwa cieplnego i w dynamicznej teorii naprężeń cieplnych*, w przygotowaniu.
4. M. E. GURTIN, *The linear theory of elasticity*, w: Encyclopedia of Physics, vol. VIa/2, Springer-Verlag, Berlin 1972.
5. P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, *Boundary element methods in engineering science*, McGraw-Hill Book Co. (U. K.) Ltd., London 1981.
6. A. PISKOREK, *Równania całkowe*, WNT, Warszawa 1971.
7. H. MARCINKOWSKA, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1972.
8. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, 1972.
9. A. H. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszawa 1969.
10. K. GRYSA, *O zagadnieniu odwrotnym dla równania falowego*, Mech. Teoret. Stos., **20**, 1 - 2 (1982).
11. M. M. LAVRENT'EV, *Ob odnoj obratnoj zadače dla volnovogo uravnenia*, DAN SSSR, **157**, 3 (1964).
12. W. G. ROMANOV, *Nekotoryje obratnyje zadači dla uravnenia giperboličeskogo tipa*, Nauka, Nowosybirsk 1972.
13. A. S. BLAGOVEŠČENSKIJ, *Obratnaja zadača dla volnovogo uravnenia s neizvestnym istočnikom*, w: Problemy matematičeskoj fiziki, vyp. 4, Izd. LGU, 1970.
14. R. BURRIDGE, *The Gelfand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi integral equations of inverse scattering theory in the context of inverse impulse-response problems*, Wave Motion, 2 (1980).
15. M. M. LAVRENT'EV, K. G. REZNICKAJA, V. G. JACHNO, *Odnomernyje obratnyje zadači matematičeskoj fiziki*, Nauka, Nowosybirsk 1982.

16. R. P. SHAW, *Boundary integral equation methods applied to wave problems*, w: Developments in BEMs-1 ed. P. K. Banarjee and R. Butterfield, AS Publ. Ltd., London 1979.
17. W. J. MANSUR, C. A. BREBBIA, *Numerical implementation of the boundary element method for two dimensional transient scalar wave propagation problems*, Appl. Math. Modelling, **6** (1982) 299 - 306.
18. D. M. MISLJENOVIČ, *Boundary element method and wave equation*, Appl. Math. Modelling, **6** (1982) 205 - 208.
19. D. M. MISLJENOVIČ, *The boundary element method in shock waves analysis*, Appl. Math. Modelling, **6** (1982) 312 - 315.

Резюме

ГРАНИЧНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В статьи представлены многомерные граничные обратные задачи для волнового уравнения. Интегральные репрезентации решений начально-краеывх задач выведены на основе теории потенциала. Для обратных задач сформулированы интегральные уравнения в которых неизвестной функцией является плотность потенциала простого слоя. Употребляя эту интегральную формулировку найдены точные решения трех одномерных граничных обратных задач.

Praca zostala zlożona w Redakcji dnia 1 lutego 1984 roku

Summary

BOUNDARY INVERSE PROBLEMS FOR WAVE EQUATION

The multidimensional boundary inverse problems for the wave equation are considered. On the basis of the potential theory the integral representations for the solutions of the initial-boundary problems are derived. Next, the integral equations for the inverse problems are formulated, in which density of the simple layer potential is an uknown function.

The exact solutions for three one-dimensional inverse problems are found by means of the integral formulation.