MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 23 (1985)

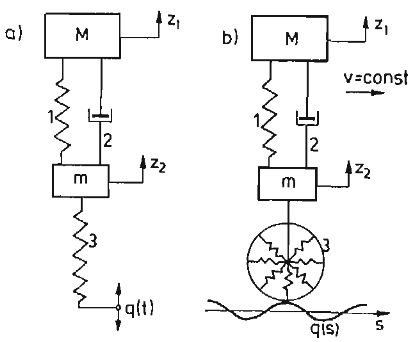
DRGANIA UKŁADU Z NIESYMETRYCZNĄ CHARAKTERYSTYKĄ SPRĘŻYSTOŚCI PRZY PARAMETRYCZNYCH I ZEWNĘTRZNYM WYMUSZENIU

KAZIMIERZ SZABELSKI
WALDEMAR SAMODULSKI

Politechnika Lubelska

1. Wstęp

Przeprowadźmy badania analityczne drgań układu należącego do takiej klasy nieliniowych układów mechanicznych, które zawierają elementy o charakterystykach sprężystości typu kwadratowego. Przyjmijmy ponadto, że układ charakteryzuje się również okresowo zmienną sztywnością, poddany jest działaniu kinematycznego wymuszenia zewnętrznego oraz przedstawić go można w postaci dwumasowego modelu płaskiego z liniowym tłumieniem (rys. 1a).



Rys. 1

Rys. 1b przykładowo ilustruje model fizyczny takiego układu w przypadku pionowych drgań ogumionego pojazdu. W przypadku tym masa uresorowana M połączona jest z masą nieresorowaną elementem pneumatycznym (1) o charakterystyce sprężystości w postaci funkcji drugiego stopnia [6] oraz amortyzatorem (2) którego charakterystykę aproksymowano funkcją liniową. Element sprężysty (3) przedstawia koło którego sztywność promieniowa ogumienia na obwodzie zewnętrznego zarysu opony jest zmienna na skutek niejednorodności jej budowy powstałej w trakcie procesu technologicznego [5], [7]. Zmianę tej sztywności wokół pewnej wartości średniej aproksymujemy funkcją harmoniczną w postaci dwóch fal [7].

Ze względu na adekwatność modelu — z pewnym przybliżeniem wynikającym między innymi z założenia słabego sprzężenia drgań tylnej i przedniej osi samochodu — możemy traktować go jako odpowiadający układowi przedniego lub tylnego zawieszenia pojazdu. W dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na analizie drgań tego typu układów (rys. 1a)

2. Matematyczny model drgań

Układ równań różniczkowych ruchu przyjmuje postać

$$\begin{aligned} M\ddot{z}_1+h(\dot{z}_1-\dot{z}_2)+k(z_1-z_2)+k_1(z_1-z_2)^2 &= 0 \\ m\ddot{z}_2-h(\dot{z}_1-\dot{z}_2)-k(z_1-z_2)-k_1(z_1-z_2)^2 &= c(t)\,[q(t)-z_2] \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie:

z_1, z_2 — współrzędne uogólnione,

$k_1 k_1$ — współczynniki sztywności,

h — współczynnik tłumienia,

$c(t)$ — zmienny współczynnik sztywności elementu (3),

$q(t)$ — funkcja przemieszczenia.

Przyjmijmy okresowo zmienną sztywność elementu (3) w postaci

$$c(t) = c_1-c_0\cos 2\omega t$$

oraz

$$q(t) = q_0\cos(\Omega t-\varphi),$$

gdzie:

c_1 — średnia wartość współczynnika sztywności,

c_0 — amplituda modulacji sztywności,

ω — częstość kołowa wymuszenia parametrycznego,

Ω — częstość kołowa wymuszenia zewnętrznego,

φ — kąt przesunięcia fazowego.

Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{c_0}{c_1} = \mu; \qquad \frac{k_1}{k} = \mu x; \qquad h = \mu h_1$$

$$q_0\cos\varphi = \mu Q_1; \qquad q_0\sin\varphi = \mu P_1$$

oraz pomijając niektóre wyrazy ze względu na realne założenie, że amplituda modulacji sztywności jest znacznie mniejsza od podwojonej średniej wartości współczynnika sztywności

$$c_0 \ll 2c_1$$

otrzymujemy układ nieliniowych równań różniczkowych z których jedno jest równaniem niejednorodnym i zawiera okresowo zmienny współczynnik

$$\begin{aligned} M\ddot{z}_1+\mu h_1(\dot{z}_1-\dot{z}_2)+k(z_1-z_2)+\mu xk(z_1-z_2)^2 &= 0 \\ m\ddot{z}_2-\mu h_1(\dot{z}_1-\dot{z}_2)-k(z_1-z_2)-\mu xk(z_1-z_2)^2 &+ \\ +c_1(1-\mu\cos 2\omega t)z_2 &= \mu c_1(Q_1\cos\Omega t+P_1\sin\Omega t) \end{aligned} \tag{2}$$

Podstawiając do układu równań (2) $\mu = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} M\ddot{z}_1 + k(z_1 - z_2) &= 0, \\ m\ddot{z}_2 - k(z_1 - z_2) + c_1 z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Przyjmując rozwiązania równań (3) w postaci

$$z_1 = a\cos pt \qquad z_2 = b\cos pt$$

znajdujemy — przy założeniu, że a i b są różne od zera — kwadraty częstości kołowych drgań własnych układu liniowego w postaci

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k}{M} + \frac{k+c_1}{m} \mp \sqrt{\left(\frac{k}{M} + \frac{k+c_1}{m}\right)^2 - \frac{4kc_1}{Mm}}\,\right] \tag{4}$$

Zakładając małe tłumienie [4], wprowadźmy współrzędne quasi-normalne dla których przy $\mu = 0$ nastąpi rozprzężenie układu równań różniczkowych. W tym celu dokonajmy liniowej transformacji współrzędnych w postaci

$$\begin{aligned} z_1 &= \beta_1 y_2 - \beta_2 y_1, \\ z_2 &= \psi(y_1 - y_2), \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie:

$$\beta_1 = \frac{m\gamma_1}{M(\gamma_1 - \gamma_2)}; \quad \beta_2 = \frac{m\gamma_2}{M(\gamma_1 - \gamma_2)}; \quad \psi = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

$$\gamma_1 = \frac{k - Mp_1^2}{k}; \quad \gamma_2 = \frac{k - Mp_2^2}{k}$$

Wprowadzając czas bezwymiarowy

$$\tau = \omega t$$

oraz wykorzystując zależność (5), z równań (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_1'' + \lambda_1^2 y_1 &= \mu[-x\overline{M}\lambda_1^2(\varepsilon_1 y_2 - \varepsilon_2 y_1)^2 - \delta_1\lambda_1(\varepsilon_1 y_2' - \varepsilon_2 y_1') + \\ &\quad + \varrho_1\lambda_1^2(y_1 - y_2)\cos 2\tau + \overline{Q}_1\lambda_1^2\cos\overline{\Omega}\tau + \overline{P}_1\lambda_1^2\sin\overline{\Omega}\tau \\ y_2'' + \lambda_1^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 y_2 &= \mu\left[-\chi\overline{M}\lambda_1^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2(\varepsilon_1 y_2 - \varepsilon_2 y_1)^2 - \delta_1\lambda_1\frac{p_2}{p_1}(\varepsilon_1 y_2' - \varepsilon_2 y_1') + \right. \\ &\quad \left. + \varrho_2\lambda_1^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2(y_1 - y_2)\cos 2\tau + \overline{Q}_2\lambda_1^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\cos\overline{\Omega}\tau + \overline{P}_2\lambda_1^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\sin\overline{\Omega}\tau\right] \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie:

$$y_i'' = \frac{d^2 y_i}{d\tau^2}\ (i = 1, 2); \qquad \frac{M}{m} = \overline{M}, \qquad \lambda_1^2 = \frac{p_1^2}{\omega^2}$$

$$\delta_1 = \frac{Mp_1 h_1}{mk}; \quad \varrho_1 = \frac{\gamma_1 c_1 \psi}{mp_1^2}; \quad \varepsilon_1 = \beta_2 + \psi$$

$$\overline{Q}_1 = \frac{\gamma_1 c_1 Q_1}{mp_1^2}; \quad \overline{P}_1 = \frac{\gamma_1 c_1 P_1}{mp_1^2}; \quad \overline{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega}$$

oraz

$$\delta_2 = \frac{Mp_2h_1}{mk}; \quad \varrho_2 = \frac{\gamma_2 c_1 \psi}{mp_2^2}; \quad \varepsilon_2 = \beta_2+\psi$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{\gamma_2 c_1 Q_1}{mp_1^2}; \quad \bar{P}_2 = \frac{\gamma_2 c_1 P_1}{mp_2^2}$$

W drugim przypadku gdy $\lambda_2^2 = \frac{p_2^2}{\omega^2}$ znajdujemy

$$\begin{aligned} y_1''+\lambda_2^2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 y_1 = \mu\Big[& -x\bar{M}\lambda_2^2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2(\varepsilon_1 y_2-\varepsilon_2 y_1)^2+ \\ & -\delta_1\lambda_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)(\varepsilon_1 y_2'-\varepsilon_2 y_1')+\varrho_1\lambda_2^2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2(y_1-y_2)\cos 2\tau+ \\ & +\bar{Q}_1\lambda_2^2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\cos\bar{\Omega}\tau+\bar{P}_1\lambda_2^2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\sin\bar{\Omega}\tau\Big] \\ y_2''+\lambda_2^2 y_2 = \mu[& -\chi\bar{M}\lambda_2^2(\varepsilon_1 y_2-\varepsilon_2 y_1)^2-\delta_2\lambda_2(\varepsilon_1 y_2'-\varepsilon_2 y_1')+ \\ & +\varrho_2\lambda_2^2(y_1-y_2)\cos 2\tau+\bar{Q}_2\lambda_2^2\cos\bar{\Omega}\tau+\bar{P}_2\lambda_2^2\sin\bar{\Omega}\tau] \end{aligned} \tag{7}$$

3. Metoda rozwiązań

W badaniach drgań parametrycznych układów nieliniowych z symetrycznymi charakterystykami sprężystości zazwyczaj stosuje się metodę bilansu harmonicznych [2], [3].

Rozwiążmy układu równań (6) i (7) w oparciu o perturbacyjną metodę małego parametru [1]. Dzięki temu wyznaczymy poszukiwane wielkości, rozwiązując układ rekurencyjnych równań różniczkowych liniowych.

Zbadajmy drgania układu odpowiadające głównym rezonansom parametrycznym. W celu znalezienia rozwiązań okresowych układów równań (6), (7) przedstawmy $y_1(\tau)$ i $y_2(\tau)$ w postaci szeregów potęgowych wyrażonych w funkcji małego parametru

$$\begin{aligned} y_1(\tau) &= y_1^{(0)}(\tau)+\mu y_1^{(1)}(\tau)+\mu^2 y_1^{(2)}(\tau)+ \\ y_2(\tau) &= y_2^{(0)}(\tau)+\mu y_2^{(1)}(\tau)+\mu^2 y_2^{(2)}(\tau)+\ \dots \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2\ \dots)$ są funkcjami okresowymi. Rozwiązania okresowe równań (6) możliwe są dla pewnych wartości parametru λ_1^2, który również przedstawimy w postaci szeregu potęgowego

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{p_1}{\omega}\right)^2 = 1+\mu\alpha_1+\mu^2\alpha_2+\ \dots \tag{9}$$

gdzie $\alpha_i (i = 1, 2 \dots)$ są stałymi współczynnikami, które wyznaczymy z warunku okresowości unikając w rozwiązaniach wyrazów sekularnych.

W przypadku układu równań (7) parametr λ_2^2 wyrazimy w postaci

$$\lambda_2^2 = \left(\frac{p_2}{\omega}\right)^2 = 1+\mu\alpha_1+\mu\alpha_2+\ \dots \tag{10}$$

Podstawiając szeregi (8) i (9) oraz (8) i (10) odpowiednio do równań (6) i (7) oraz wprowadzając oznaczenia

$$\frac{p_2}{p_1} = \nu; \qquad \frac{p_1}{p_2} = \nu_1$$

po przyrównaniu do zera członów przy μ^i otrzymujemy układy rekurencyjnych równań różniczkowych liniowych. W celu uniknięcia rezonansów wewnętrznych, wyłączmy przypadek szczególny gdy $\nu = \frac{p_2}{p_1}$ jest liczbą całkowitą.

4. Analiza drgań okresowych układu bez wymuszenia zewnętrznego

Rozpatrzmy drgania okresowe układu opisane równaniami (6) i (7) w przypadku gdy $\overline{P}_1 = \overline{Q}_1 = \overline{P}_2 = \overline{Q}_2 = 0$. Oznacza to, że na układ nie działa wymuszenie zewnętrzne. Na przykładzie modelu przedstawionego na rys. 1b równoważne jest to z założeniem, że ogumione koło toczy się po idealnie równej nawierzchni.

Rozpatrując układ równań (6) zbadajmy drgania okresowe dla których zgodnie z (9) przy $\mu = 0$ częstość ω jest równa pierwszej częstości drgań własnych p_1. Przyjmując $y_2^{(0)} = 0$ otrzymujemy

$$y_1''^{(0)} + y_1^{(0)} = 0 \tag{11}$$

$$y_1''^{(1)} + y_1^{(1)} = -\alpha_1 y_1^{(0)} - x\overline{M}\varepsilon_2^2 y_1^{(0)2} + \delta_1 \varepsilon_2 y_1'^{(0)} + \varrho_1 y_1^{(0)} \cos 2\tau \tag{12}$$

$$\begin{aligned} y_1''^{(2)} + y_1^{(2)} = {} & -\alpha_2 y_1^{(0)} - \alpha_1 y_1^{(1)} - x\overline{M}[\varepsilon_2^2(\alpha_1 y_1^{(0)2} + 2y_1^{(0)} y_1^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(1)} y_1^{(0)}] + \\ & - \delta_1 \left[\varepsilon_1 y_2'^{(1)} - \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_1'^{(0)} + y_1'^{(1)}\right)\right] + \varrho_1 (\alpha_1 y_1^{(0)} + y_1^{(1)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau \end{aligned} \tag{13}$$

. . . .

. . . .

$$y_2''^{(1)} + \nu^2 y_2^{(1)} = -x\overline{M}\varepsilon_2^2 \nu^2 y_1^{(0)2} + \delta_2 \varepsilon_2 \nu y_1'^{(0)} + \varrho_2 \nu^2 y_1^{(0)} \cos 2\tau \tag{14}$$

$$\begin{aligned} y_2''^{(2)} + \nu^2 y_2^{(2)} = {} & -\alpha_1 \nu^2 y_2^{(1)} - x\overline{M}\nu^2[\varepsilon_2^2(\alpha_1 y_1^{(0)2} + 2y_1^{(0)} y_1^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(1)} y_1^{(0)}] + \\ & - \delta_2 \nu \left[\varepsilon_1 y_2'^{(1)} - \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_1'^{(0)} + y_1'^{(1)}\right)\right] + \varrho_2 \nu^2 (\alpha_1 y_1^{(0)} + y_1^{(1)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau \end{aligned} \tag{15}$$

. . . .

. . . .

Założenie trywialnego rozwiązania $y_2^{(0)} = 0$ wynika z równania

$$y_2''^{(0)} + \nu^2 y_2 = 0,$$

Przy wcześniejszym założeniu, że obie częstości drgań własnych p_1, p_2 są niewspółmierne (ν nie jest liczbą całkowitą), gdyby $y_2^{(0)} \neq 0$, współrzędna „nierezonansowa" $y_2(\tau)$ nie zmieniałaby się z taką samą częstością jak współrzędna „rezonansowa" $y_1(\tau)$. W takich przypadkach rozwiązanie niezaburzone $y_2^{(0)}(\tau)$ stanowiłoby człon zakłócający okresowość funkcji $y_2(\tau)$ a tym samym — z uwagi na równania (5) — również drgań opisanych przez współrzędne uogólnione.

Podstawiając do równania (12)

$$y_1^{(0)} = a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau$$

z warunków okresowości rozwiązań otrzymujemy

$$\alpha_1 a_1 - \frac{1}{2}\varrho_1 a_1 - \delta_1 \varepsilon_2 b_1 = 0,$$

$$\delta_1 \varepsilon_2 a_1 + \alpha_1 b_1 + \frac{1}{2}\varrho_1 b_1 = 0,$$

skąd przy $a_1 \neq 0$ i $b_1 \neq 0$ znajdziemy

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\varrho_1^2 - 4\delta_1^2\varepsilon_2^2},$$

$$a_1^2 - b_1^2 = \frac{2\alpha_1}{\varrho_1}A_1^2; \quad a_1 b_1 = -\frac{\delta_1\varepsilon_2}{\varrho_1}A_1^2, \tag{16}$$

gdzie

$$A_1^2 = a_1^2 + b_1^2$$

Po przekształceniach równanie (12) przyjmuje postać

$$y_1''^{(1)} + y_1^{(1)} = -\frac{1}{2}x\overline{M}\varepsilon_2^2 A_1^2 - \frac{1}{2}x\overline{M}\varepsilon_2^2(a_1^2 - b_1^2)\cos 2\tau +$$

$$-x\overline{M}\varepsilon_2^2 a_1 b_1 \sin 2\tau + \frac{1}{2}\varrho_1(a_1\cos 3\tau + b_1 \sin 3\tau).$$

Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest funkcja

$$y_1^{(1)} = -\frac{1}{2}x\overline{M}\varepsilon_2^2 A_1^2 + \frac{1}{6}x M\varepsilon_2^2(a_1^2 - b_1^2)\cos 2\tau +$$

$$+\frac{1}{3}x\overline{M}\varepsilon_2^2 a_1 b_1 \sin 2\tau - \frac{1}{16}\varrho_1(a_1\cos 3\tau + b_1\sin 3\tau) \tag{17}$$

natomiast równania (14) funkcja

$$y_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x\overline{M}\varepsilon_2^2 A_1^2 + \frac{\nu}{\nu^2-1}\left(\frac{1}{2}\varrho_2\nu a_1 + \delta_2\varepsilon_2 b_1\right)\cos\tau +$$

$$-\frac{\nu}{\nu^2-1}\left(\frac{1}{2}\varrho_2\nu b_1 + \delta_2\varepsilon_2 a_1\right)\sin\tau - \frac{x\overline{M}\varepsilon_2^2\nu^2}{2(\nu^2-4)}(a_1^2 - b_1^2)\cos 2\tau +$$

$$-\frac{\nu}{\nu^2-4}x\overline{M}\varepsilon_2^2 a_1 b_1 \sin 2\tau + \frac{\varrho_2 v^2}{2(\nu^2-9)}(a_1\cos 3\tau + b_1 \sin 3\tau)$$

Podstawiając zależności (17) i (18) do (15) z warunku zapewnienia rozwiązań okresowych otrzymujemy

$$\alpha_2 a_1 = -x\overline{M}^2\left\{\varepsilon_2^4\left[-A_1^2 a_1 + \frac{1}{6}(a_1^2 - b_1^2)a_1 + \frac{1}{3}a_1 b_1^2\right] +\right.$$

$$\left.+\varepsilon_1\varepsilon_2^3\left[A_1^2 a_1 + \frac{\nu^2}{2(\nu^2-4)}(a_1^2 - b_1^2)a_1 + \frac{\nu^2}{\nu^2-4}a_1 b_1^2\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\delta_1\varepsilon_2\alpha_1 b_1+\frac{\delta_1\varepsilon_1\nu}{\nu^2-1}\left(\frac{1}{2}\varrho_2\nu b_1+\delta_2\varepsilon_2 a_1\right)+$$

$$-\frac{\varrho_1\nu}{2(\nu^2-1)}\left(\frac{1}{2}\varrho_2\nu a_1+\delta_2\varepsilon_2 b_1\right)-\frac{\varrho_1\varrho_2\nu^2}{4(\nu^2-9)}a_1+\frac{1}{2}\varrho_1\alpha_1 a_1-\frac{1}{32}\varrho_1^2\alpha_1$$

oraz

$$\alpha_2 b_1 = -x^2\overline{M}^2\left\{\varepsilon_2^4\left[-A_1^2 b_1-\frac{1}{6}(a_1^2-b_1^2)b_1+\frac{1}{3}a_1^2 b_1\right]+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_1\varepsilon_2^3\left[A_1^2 b_1-\frac{\nu^2}{2(\nu^2-4)}(a_1^2-b_1^2)b_1+\frac{\nu^2}{\nu^2-4}a_1^2 b_1\right]\right\}+$$

$$-\frac{1}{2}\delta_1\varepsilon_2\alpha_1 a_1+\frac{\delta_1\varepsilon_1\nu}{\nu^2-1}\left(\frac{1}{2}\varrho_2\nu a_1+\delta_2\varepsilon_2 b_1\right)+$$

$$-\frac{\varrho_1\nu}{2(\nu^2-1)}\left(\frac{1}{2}\varrho_2\nu b_1+\delta_2\varepsilon_2 a_1\right)-\frac{\varrho_1\varrho_2\nu^2}{4(\nu^2-9)}b_1-\frac{1}{2}\varrho_1\alpha_1 b_1-\frac{1}{32}\varrho_1^2 b_1$$

Z powyższych zależności znajdujemy

$$\alpha_2 = x^2\overline{M}^2 A_1^2\left[\varepsilon_2^4\frac{3\varrho_1^2-2(\alpha_1^2+\delta_1^2\varepsilon_2^2)}{3\varrho_1}-\varepsilon_1\varepsilon_2^3\frac{(\nu^2-4)\varrho_1^2+2\nu^2(\alpha_1^2+\delta_1^2\varepsilon_2^2)}{(\nu^2-4)\varrho_1^2}\right]+$$
$$+\frac{\delta_1\delta_2\varepsilon_2\nu(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\nu^2-1}-\frac{\delta_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2\varrho_2\nu^2}{(\nu^2-1)\varrho_1}-\frac{\varrho_1\varrho_2\nu^2(\nu^2-5)}{2(\nu^2-1)(\nu^2-9)}+\alpha_1^2-\frac{1}{32}\varrho_1^2 \tag{19}$$

Podstawiając znalezione wyrażenia do (9) otrzymujemy

$$\lambda_1^{2(c)} = 1+\frac{1}{2}\mu\sqrt{\varrho_1^2-4\delta_1^2\varepsilon_2^2}+\alpha_2\mu^2+\ldots$$
$$\lambda_1^{2(s)} = 1-\frac{1}{2}\mu\sqrt{\varrho_1^2-4\delta_1^2\varepsilon_2^2}+\alpha_2\mu^2+\ldots \tag{20}$$

Zbadajmy następnie drgania okresowe opisane układem równań (7). W tym celu w równaniach tych wykorzystajmy szeregi (8) i (9) przy uwzględnieniu rozwinięcia

$$\lambda_2 = 1+\mu\frac{\alpha_1}{2}+\ldots$$

Po przyrównaniu do zera poszczególnych wyrazów występujących przy μ^i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ oraz analogicznym jak dla układu równań (6) założeniu $y_1^{(0)} = 0$ wynikającym z równania

$$y_1''^{(0)}+\nu_1^2 y_1^{(0)} = 0$$

otrzymujemy

$$y''^{(1)}+\nu_1^2 y_1^{(1)} = -x\overline{M}\varepsilon_1^2\nu_1^2 y_2^{(0)2}-\delta_1\varepsilon_1\nu_1 y'^{(0)}-\varrho_1\nu_1^2 y_2^{(0)}\cos 2\tau \tag{21}$$

$$y_1''^{(2)}+\nu_1^2 y_1^{(2)} = -\nu_1^2\alpha_1 y_1^{(1)}-x\overline{M}\nu_1^2[\varepsilon_1^2(\alpha_1 y_2^{(0)2}+2y_2^{(0)}y_2^{(1)})+$$
$$-2\varepsilon_1\varepsilon_2 y_2^{(0)}y_1^{(1)}]-\delta_1\nu_1\left[\varepsilon_1\left(\frac{\alpha_1}{2}y_2'^{(0)}+y_2'^{(1)}\right)-\varepsilon_2 y_1'^{(1)}\right]+ \tag{22}$$
$$+\varrho_1\nu_1^2(y_1^{(1)}-\alpha_1 y_2^{(0)}-y_2^{(1)})\cos 2\tau$$

. . . .

. . . .

$$\ddot{y}_2^{(0)} + y_2^{(0)} = 0 \tag{23}$$

$$\ddot{y}_2^{(1)} + y_2^{(1)} = -\alpha_1 y_2^{(0)} - x\overline{M}\varepsilon_1^2 y_2^{(0)2} - \delta_2 \varepsilon_1 \dot{y}_2^{(0)} - \varrho_2 y_2^{(0)} \cos 2\tau \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2^{(2)} + y_2^{(2)} = & -\alpha_2 y_2^{(0)} - \alpha_1 y_2^{(1)} - x\overline{M}[\varepsilon_1^2(\alpha_1 y_2^{(0)2} + 2y_2^{(0)} y_2^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(0)} y_1^{(1)}] + \\ & -\delta_2 \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\alpha_1}{2} \dot{y}_2^{(0)} + \dot{y}_2^{(1)}\right) - \varepsilon_2 \dot{y}_1^{(1)}\right] + \varrho_2 (y_1^{(1)} - \alpha_1 y_2^{(0)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau \end{aligned} \tag{25}$$

. . . .

. . . .

Postępując analogicznie jak w przypadku poprzednim znajdujemy

$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varrho_2^2 - 4\delta_2^2 \varepsilon_1^2} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} y_2^{(1)} = & -\frac{1}{2} x\overline{M}\varepsilon_1^2 A_2^2 + \frac{1}{6} x\overline{M}\varepsilon_1^2 (a_2^2 - b_2^2) \cos 2\tau + \\ & + \frac{1}{3} x\overline{M}\varepsilon_1^2 a_2 b_2 \sin 2\tau + \frac{1}{16} \varrho_2 (a_2 \cos 3\tau + b_2 \sin 3\tau) \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} = & -\frac{1}{2} x\overline{M}\varepsilon_1^2 A_2^2 - \frac{\nu_1}{\nu_1^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_1 \nu_1 a_2 + \delta_1 \varepsilon_1 b_2\right) \cos \tau + \\ & + \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \varrho_1 \nu_1 b_2 + \delta_1 \varepsilon_1 a_2\right) \sin \tau - \frac{x\overline{M}\varepsilon_1^2 \nu_1^2}{2(\nu_1^2 - 4)} (a_2^2 - b_2^2) \cos 2\tau + \\ & - \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - 4} \chi\overline{M}\varepsilon_1^2 a_2 b_2 \sin 2\tau - \frac{\varrho_1 \nu_1^2}{2(\nu_1^2 - 9)} (a_2 \cos 3\tau + b_2 \sin 3\tau) \end{aligned} \tag{28}$$

oraz

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & A_2^2 x^2 \overline{M}^2 \left[\varepsilon_1^4 \frac{3\varrho_2^2 - 2(\alpha_1^2 + \delta_2^2 \varepsilon_1^2)}{3\varrho_2^2} - \frac{(\nu_1^2 - 4)\varrho_2^2 + 2\nu_1^2(\alpha_1^2 + \delta_2^2 \varepsilon_1^2)}{(\nu_1^2 - 4)\varrho_2} \varepsilon_1^3 \varepsilon_2\right] + \\ & + \frac{\delta_1 \delta_2 \varepsilon_1 \nu_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\nu_1^2 - 1} - \frac{\delta_2^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varrho_1 \nu_1^2}{(\nu_1^2 - 1)\varrho_2} - \frac{\varrho_1 \varrho_2 \nu_1^2 (\nu_1^2 - 5)}{2(\nu_1^2 - 1)(\nu_1^2 - 9)} + \alpha_1^2 - \frac{1}{32} \varrho_2^2 \end{aligned} \tag{29}$$

Powyższe zależności wykorzystujemy w równaniach

$$\begin{aligned} \lambda_2^{2(c)} &= 1 - \frac{1}{2} \mu \sqrt{\varrho_2^2 - 4\delta_2^2 \varepsilon_1^2} + \alpha_2 \cdot \mu^2 + \dots \\ \lambda_2^{2(s)} &= 1 + \frac{1}{2} \mu \sqrt{\varrho_2^2 - 4\delta_2^2 \varepsilon_1^2} + \alpha_2 \cdot \mu^2 + \dots \end{aligned} \tag{30}$$

5. Analiza drgań okresowych układu z wymuszeniem zewnętrznym

Zbadajmy drgania układu z parametrycznym oraz jednoczesnym zewnętrznym wymuszeniem drgań. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do takich przypadków, dla których częstość wzbudzenia parametrycznego jest równa częstości wymuszenia zewnętrznego ($\omega = \Omega$). Założenie to zasadniczo rzutuje na rozważane rozwiązania. Podstawowa bowiem częstość drgań parametrycznych rozpatrywanego układu — bez wymuszenia zewnętrznego — w przypadkach rezonansów głównych jest równa ω.

Jeśli rozpatrujemy drgania układu z ogumionym kołem (rys. 1b), to ze względu na związki

$$\omega = \frac{v}{R}; \quad \Omega = \frac{2\pi v}{l}$$

gdzie: v — prędkość jazdy, R — promień koła, l — długość fali nierówności drogi; założenie $\omega = \Omega$, odpowiada jeździe, po drodze której długość fali nierówności określa zależność

$$l = 2\pi \cdot R.$$

Podstawiając szeregi (8) i (9) do układu równań (6) przy założeniu $y_2^{(0)} = \acute{y}_2^{(0)} = 0$, otrzymujemy

$$y_1''^{(0)} + y_1^{(0)} = 0, \tag{31}$$

$$y_1''^{(1)} + y_1^{(1)} = -\alpha_1 y_1^{(0)} - x\overline{M}\varepsilon_2^2 y_1^{(0)2} + \delta_1 \varepsilon_2 y_1'^{(0)} + \varrho_1 y_1^{(0)} \cos 2\tau + \overline{Q}_1 \cos\tau + \overline{P}_1 \sin\tau, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} y_1''^{(2)} + y_1^{(2)} = & -\alpha_2 y_1^{(0)} - \alpha_1 y_1^{(1)} - x\overline{M}[\varepsilon_2^2(\alpha_1 y_1^{(0)2} + 2y_1^{(0)} y_1^{(1)}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_2^{(1)} y_1^{(0)}] + \\ & - \delta_1 \left[\varepsilon_1 y_2'^{(1)} - \varepsilon_2 \left(y_1'^{(1)} + \frac{\alpha_1}{2} y_1'^{(0)}\right)\right] + \varrho_1 (y_1^{(1)} + \alpha_1 y_1^{(0)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau + \\ & + \alpha_1 \overline{Q}_1 \cos\tau + \alpha_1 \overline{P}_1 \sin\tau, \end{aligned} \tag{33}$$

. . . .

. . . .

$$\begin{aligned} y_2''^{(1)} + \nu^2 y_2^{(1)} = & -x\overline{M}\varepsilon_2^2 \nu^2 y_1^{(0)2} + \delta_2 \varepsilon_2 \nu + \varrho_2 \nu^2 y_1^{(0)} \cos 2\tau + \\ & + \nu^2 \overline{Q}_2 \cos\tau + \nu^2 \overline{P}_2 \sin\tau, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} y_2''^{(2)} + \nu_2 y_2^{(2)} = & -\nu^2 \alpha_1 y_2^{(1)} - x\overline{M}\nu^2 [\varepsilon_2^2 (\alpha_1 y_1^{(0)2} + 2y_1^{(0)} y_1^{(1)}) + \\ & - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 y_1^{(0)} y_2^{(1)}] - \delta_2 \nu \left[\varepsilon_1 y_2'^{(1)} - \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha_1}{2} y_1'^{(0)} + y_1'^{(1)}\right)\right] + \\ & + \varrho_2 \nu^2 (y_1^{(1)} + \alpha_1 y_1^{(0)} - y_2^{(1)}) \cos 2\tau + \alpha_1 \nu^2 \overline{Q}_2 \cos\tau + \alpha_1 \nu^2 \overline{P}_2 \sin\tau \end{aligned} \tag{35}$$

. . . .

Podstawiając do równania (32)

$$y_1^{(0)} = a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau$$

po przekształceniach znajdujemy

$$a_1 \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{4}\varrho_1^2 + \delta_1^2 \varepsilon_2^2\right) = \overline{Q}_1 \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\varrho_1\right) + \overline{P}_1 \delta_1 \varepsilon_2$$

$$b_1 \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{4}\varrho_1^2 + \delta_1^2 \varepsilon_2^2\right) = \overline{P}_1 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\varrho_1\right) - \overline{Q}_1 \delta_1 \varepsilon_2$$

Z powyższych równań dla przypadku $\overline{P}_1 = \overline{Q}_1$ co odpowiada przyjęciu w funkcji przemieszczenia $q(t)$ wartości kąta przesunięcia fazowego $\varphi = \pi/4$ oraz $A_1 \neq 0$ otrzymujemy

$$\alpha_{1_{1,2}} = \pm \sqrt{\frac{\overline{Q}_1^2}{A_1^2} + \frac{1}{4}(\varrho_1^2 - 4\delta_1^2 \varepsilon_2^2) \pm \frac{\overline{Q}_1}{A_1} \sqrt{\varrho_1(\varrho_1 + 2\delta_1 \varepsilon_2) + \frac{\overline{Q}_1^2}{A_1^2}}} \tag{36}$$

Rozwiązaniem szczególnym równania (32) jest funkcja

$$y_1^{(1)} = -\frac{1}{2}x\overline{M}\varepsilon_2^2A_1^2+\frac{1}{6}x\overline{M}\varepsilon_2^2(a_1^2-b_1^2)\cos 2\tau+ \tag{37}$$
$$+\frac{1}{3}x\overline{M}\varepsilon_2^2a_1b_1\sin 2\tau-\frac{1}{16}\varrho_1(a_1\cos 3\tau+b_1\sin 3\tau)$$

natomiast równania (34)

$$y_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x\overline{M}\varepsilon_2^2A_1^2+\frac{\nu}{\nu^2-1}\left(\frac{1}{2}\varrho_2\nu a_1+\delta_2\varepsilon_2b_1+\nu\overline{Q}_2\right)\cos\tau+$$
$$-\frac{\nu}{\nu^2-1}\left(\frac{1}{2}\varrho_2\nu b_1+\delta_2\varepsilon_2a_1-\nu\overline{P}_1\right)\sin\tau-\frac{x\overline{M}\varepsilon_2^2\nu^2}{2(\nu^2-4)}(a_1^2-b_1^2)\cos 2\tau+ \tag{38}$$
$$-\frac{x\overline{M}\varepsilon_2^2\nu^2}{\nu^2-4}a_1b_1\sin 2\tau+\frac{\varrho_2\nu^2}{2(\nu^2-9)}(a_1\cos 3\tau+b_1\sin 3\tau)$$

Wykorzystując zależności:

$$a_1^2-b_1^2 = \frac{2(\alpha_1A_1^2-\overline{Q}_1a_1-\overline{P}_1b_1}{\varrho_1}$$
$$a_1b_1 = \frac{\overline{P}_1a_1-\overline{Q}_1b_1-\delta_1\varepsilon_2A_1^2}{\varrho_1}$$

po przekształceniach znajdujemy

$$\begin{aligned}\alpha_2 = {} & \chi^2\overline{M}^2\varepsilon_2^4\Big\{A_1^2-\frac{2}{3\varrho_1^2}[\overline{Q}_1^2+\overline{P}_1^2-2(\alpha_1\overline{Q}_1a_1+\\ & +\alpha_1\overline{P}_1b_1+\delta_1\varepsilon_2\overline{P}_1a_1-\delta_1\varepsilon_2\overline{Q}_1b_1)+A_1^2(\alpha_1^2+\delta_1^2\varepsilon_2^2)]\Big\}+\\ & -x^2\overline{M}^2\varepsilon_1\varepsilon_2^3\Big\{A_1^2+\frac{2\nu^2}{(\nu^2-4)\varrho_1^2}[(\overline{P}_1^2+\overline{Q}_1^2)-2(\alpha_1\overline{Q}_1a_1+\\ & +\alpha_1\overline{P}_1b_1+\overline{P}_1\delta_1\varepsilon_2a_1-\overline{Q}_1\delta_1\varepsilon_2b_1)+A_1^2(\alpha_1^2+\delta_1^2\varepsilon_2^2)]\Big\}+\\ & +\frac{(\delta_1\varepsilon_1\varrho_2\nu^2-\delta_2\varepsilon_2\varrho_1\nu)}{(\nu^2-1)\varrho_1}\left(\overline{P}_1\frac{a_1}{A_1^2}-\overline{Q}_1\frac{b_1}{A_1^2}-\delta_1\varepsilon_2\right)+\\ & +\frac{\delta_1\varepsilon_1v^2}{\nu^2-1}\left(\overline{Q}_2\frac{b_1}{A_1^2}-\overline{P}_2\frac{a_1}{A_1^2}\right)-\frac{\varrho_1\nu^2\left(\overline{P}_2\frac{b_1}{A_1^2}-\overline{Q}_2\frac{a_1}{A_1^2}\right)}{2(\nu^2-1)}+\\ & +\frac{\delta_1\varepsilon_1\delta_2\varepsilon_2\nu}{\nu^2-1}-\varrho_1\varrho_2\nu^2\frac{\nu^2-5}{2(\nu^2-1)(\nu^2-9)}+\alpha_1^2-\frac{1}{32}\varrho_1^2\end{aligned} \tag{39}$$

Podstawiając szeregi (8) i (10) do układu równań (7) przy $y_1^{(0)} = \acute{y}_1^{(0)} = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1^{(1)}+\nu_1^2y_1^{(1)} = {} & -\nu_1^2x\overline{M}\varepsilon_1^2y_2^{(0)2}-\delta_1\varepsilon_1\nu_1\acute{y}_2^{(0)}-\varrho_1v_1^2y_2^{(0)}\cos 2\tau+\\ & +\nu_1^2\overline{Q}_1\cos\tau+\nu_1^2\overline{P}_1\sin\tau\end{aligned} \tag{40}$$

$$\ddot{y}_1^{(2)}+\nu_1^2 y_1^{(2)} = -\nu_1^2 \alpha_1 y_1^{(1)} - \chi\overline{M}\nu_1^2 \,[\varepsilon_1^2(\alpha_1 y_2^{(0)2}+2y_2^{(0)}y_1^{(1)})-2\varepsilon_1\varepsilon_2 y_2^{(0)}y_1^{(1)}]+$$

$$-\delta_1\nu_1\left[\varepsilon_1\left(\frac{\alpha_1}{2}\dot{y}_2^{(0)}+\dot{y}_2^{(1)}\right)-\varepsilon_2\dot{y}_1^{(1)}\right]+\varrho_1\nu_1^2(y_1^{(1)}-y_2^{(1)}-\alpha_1 y_2^{(0)})\cos 2\tau+ \tag{41}$$

$$+\alpha_1\nu_1^2\overline{Q}_1\cos\tau+\alpha_1\nu_1^2\overline{P}_1\sin\tau$$

. . . .

. . . .

$$\ddot{y}_2^{(0)}+y_2^{(0)} = 0 \tag{42}$$

$$\ddot{y}_2^{(1)}+y_2^{(1)} = -\alpha_1 y_2^{(0)} - x\overline{M}\varepsilon_1^2 y_2^{(0)2} - \delta_2\varepsilon_1\dot{y}_2^{(0)} - \varrho_2 y_1^2\cos 2\tau+$$
$$+\overline{Q}_2\cos\tau+\overline{P}_2\sin\tau \tag{43}$$

$$\ddot{y}_2^{(2)}+y_2^{(2)} = -\alpha_2 y_2^{(0)}-\alpha_1 y_2^{(1)}-x\overline{M}[\varepsilon_1^2(\alpha_1 y_2^{(0)2}+2y_2^{(0)}y_2^{(1)})-2\varepsilon_1\varepsilon_2 y_2^{(0)}y_2^{(1)}]+$$

$$-\delta_1\nu_1\left[\varepsilon_1\left(\frac{\alpha_1}{2}\dot{y}_2^{(0)}+\dot{y}_2^{(1)}\right)-\varepsilon_2\dot{y}_1^{(1)}\right]+\varrho_2(y_1^{(1)}-y_2^{(1)}-\alpha_1 y_2^{(0)})\cos 2\tau+ \tag{44}$$

$$+\alpha_1\overline{Q}_2\cos\tau+\alpha_1\overline{P}_2\sin\tau$$

. . . .

. . . .

Postępując analogicznie jak w przypadku poprzednim przy założeniu, że $\overline{P}_2 = \overline{Q}_2$ znajdujemy

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\overline{Q}_2^2}{A_2^2}+\frac{1}{4}(\varrho_2^2-4\delta_2^2\varepsilon_1^2)\pm\frac{\overline{Q}_2}{A_2}\sqrt{\varrho_2(\varrho_2+2\delta_2\varepsilon_1)+\frac{\overline{Q}_2^2}{A_2^2}}} \tag{45}$$

$$y_2^{(1)} = -\frac{1}{2}\chi\overline{M}\varepsilon_1^2 A_2^2+\frac{1}{6}\chi\overline{M}\varepsilon_2^2(a_1^2-b_2^2)\cos 2\tau+$$
$$+\frac{1}{3}\chi\overline{M}\varepsilon_1^2 a_2 b_2\sin 2\tau+\frac{1}{16}\varrho_2(a_2\cos 3\tau+b_2\sin 3\tau) \tag{46}$$

Wykorzystując zależności

$$a_2^2-b_2^2 = \frac{2(\overline{Q}_2 a_2+\overline{P}_2 b_2-\alpha_1 A_2^2)}{\varrho_2}$$

$$a_2 b_2 = \frac{\overline{Q}_2 b_2-\overline{P}_2 a_2-\delta_2\varepsilon_1 A_2^2}{\varrho_2}$$

otrzymujemy również

$$\alpha_2 = x^2\overline{M}^2\varepsilon_1^4\left\{A_2^2-\frac{2}{3\varrho_2^2}[\overline{Q}_2^2+\overline{P}_2^2-2(\alpha_1\overline{Q}_2 a_2+\alpha_1\overline{P}_2 b_2+\delta_2\varepsilon_1\overline{Q}_2 b_2+\right.$$

$$\left.-\delta_2\varepsilon_1\overline{P}_2 a_2)+A_2^2(\alpha_1^2+\delta_2^2\varepsilon_1^2)]\right\}-\varepsilon_1^3\varepsilon_2 x^2\overline{M}^2\left\{A_2^2+\frac{2\nu_1^2}{(\nu_1^2-4)\varrho_2^2}[\overline{Q}_2^2+P_2^2+\right.$$

$$\left.-2(\alpha_1\overline{Q}_2 a_2+\alpha_1\overline{P}_2 b_2+\delta_2\varepsilon_1\overline{Q}_2 b_2-\delta_2\varepsilon_1\overline{P}_2 a_2)+A_2^2(\alpha_1^2+\delta_2^2\varepsilon_1^2)]\right\}+$$

$$+\frac{\delta_2\varepsilon_2\varrho_1\nu_1^2-\delta_1\varepsilon_1\varrho_2\nu_1}{(\nu_1^2-1)\varrho_2}\left(\bar{Q}_2\frac{b_2}{A_2^2}-\bar{P}_2\frac{a_2}{A_2^2}-\delta_2\varepsilon_1\right)+$$

$$+\frac{\delta_2\varepsilon_2\nu_1^2}{\nu_1^2-1}\left(\bar{P}_1\frac{a_2}{A_2^2}-\bar{Q}_1\frac{b_2}{A_2^2}\right)-\frac{\varrho_2\nu_1^2\left(\bar{P}_1\frac{b_2}{A_2^2}-\bar{Q}_1\frac{a_2}{A_2^2}\right)}{2(\nu_1^2-1)}+$$

$$+\frac{\delta_2\varepsilon_2\delta_1\varepsilon_1\nu_1}{\nu_1^2-1}-\varrho_1\varrho_2\nu_1^2\frac{\nu_1^2-5}{2(\nu_1^2-1)(\nu_1^2-9)}+\alpha_1^2-\frac{1}{32}\varrho_2^2$$

6. Przykład liczbowy i badania analogowe

Badania analityczne zilustrowano przykładem liczbowym przyjmując następujące dane:

$$M = 200\ [\mathrm{kg}],\quad k = 60000\ [\mathrm{N/m}],\quad n = 100\left[\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}\right],$$

$$m = 100\ [\mathrm{kg}],\quad c_1 = 150000\ [\mathrm{N/m}],\quad ux = 0{,}4\ [1/\mathrm{m}],$$

$$q_0 = 0{,}01\ [\mathrm{m}].$$

Na podstawie (4) obliczono

$$p_1 = 14{,}3182\ [1/\mathrm{s}],\quad p_2 = 46{,}8507\ [1/\mathrm{s}]$$

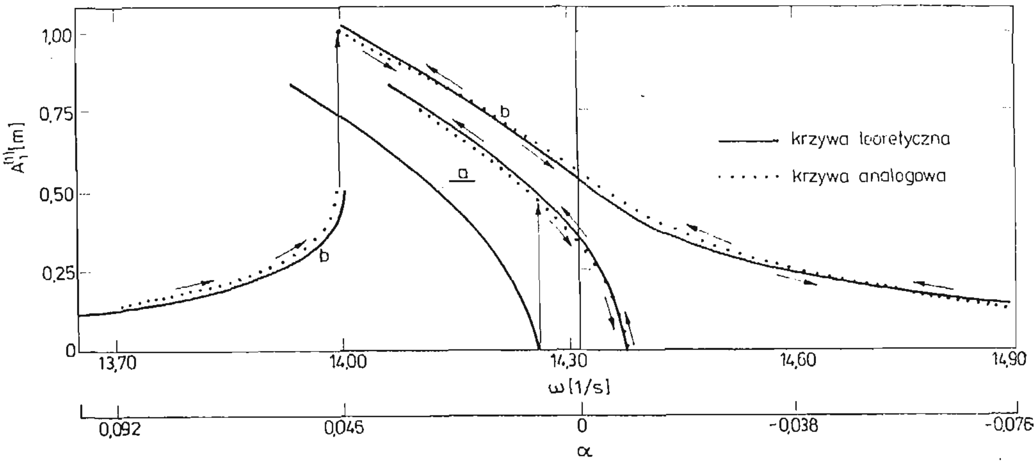
Wykorzystując wyniki analityczne oraz zależności (5) sporządzono wykresy amplitud $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$ odpowiadające współrzędnym z_1 i z_2 oraz wartości bezwzględnych przemieszczeń środków drgań $|X_{z_1}|$ i $|X_{z_2}|$ obu mas w przypadkach braku i występowaniu wymuszenia zewnętrznego. Wielkości te przedstawiono w funkcji rozstrojenia częstości wymuszenia parametrycznego α zgodnie z zależnością

$$\lambda^2 = \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 = 1+\alpha$$

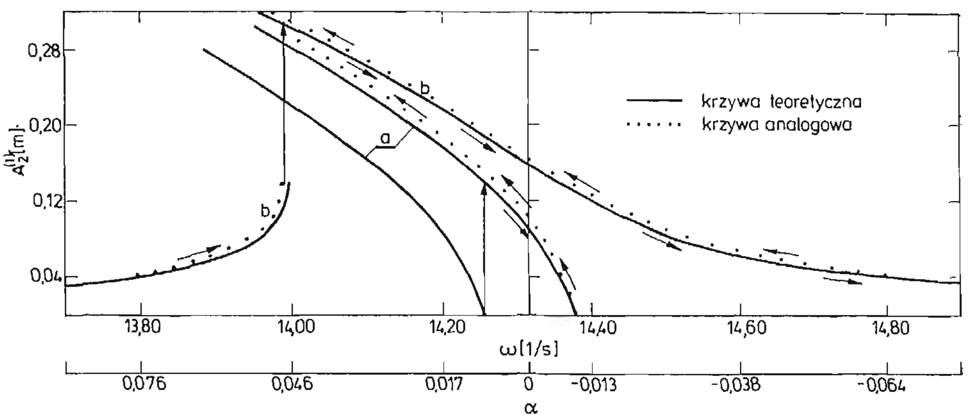
W celu sprawdzenia poprawności badań analitycznych przeprowadzono badania analogowe na maszynie MEDA 43H. Badaniom analogowym poddano układy równań różniczkowych wyrażonych we współrzędnych uogólnionych z_1 i z_2, przy automatycznej zmianie ω — częstości wymuszenia parametrycznego. Pisak rejestrował graniczne wartości wychyleń kreśląc obwiednię amplitud. W celu określenia przedziałów dwuznaczności rozwiązań rejestrację analogową przeprowadzono przy zwiększaniu, a następnie zmniejszaniu wartości ω. Z tego też względu symulacja analogowa spełniła również rolę badań stateczności rozwiązań.

Wyniki badań analogowych przedstawiono łącznie z wynikami badań analitycznych, nanosząc na osiach odciętych wartości ω oraz odpowiadających im wartości rozstrojenia częstości α.

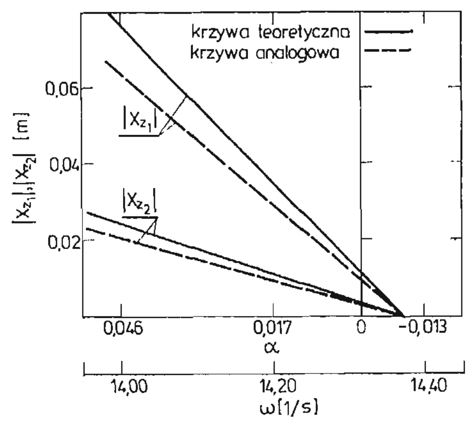
Na rysunkach przedstawiających wykresy amplitud w funkcji częstości, literami „a" oznaczono krzywe odpowiadające amplitudom drgań układu bez wymuszenia zewnętrznego, natomiast literami „b" — krzywe dotyczące amplitud drgań układu z wymuszeniem



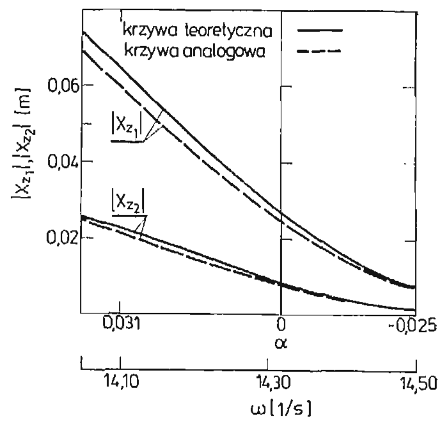
Rys. 2



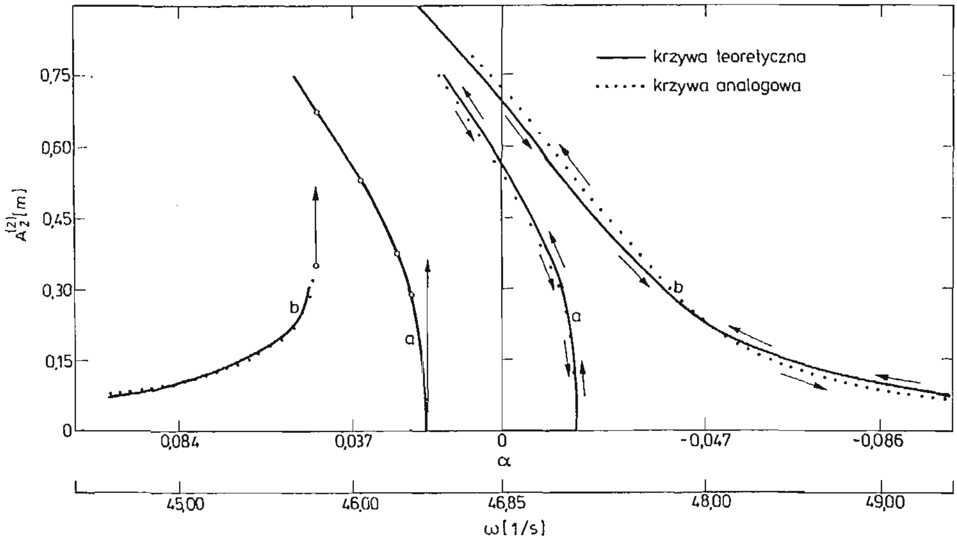
Rys. 3



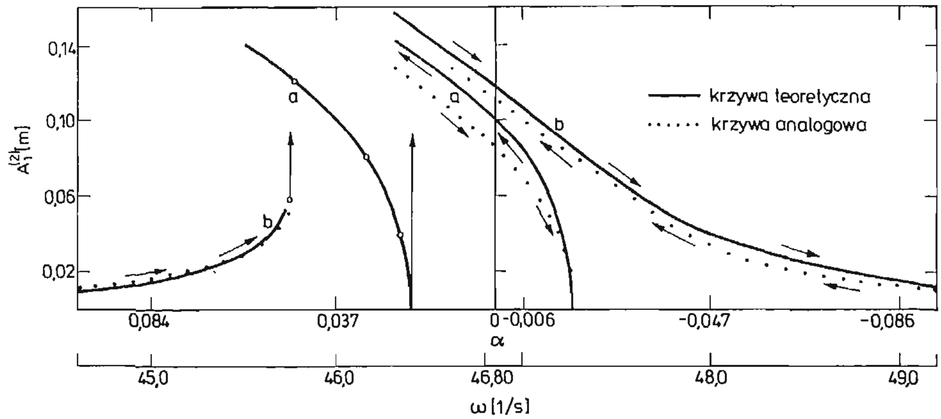
Rys. 4



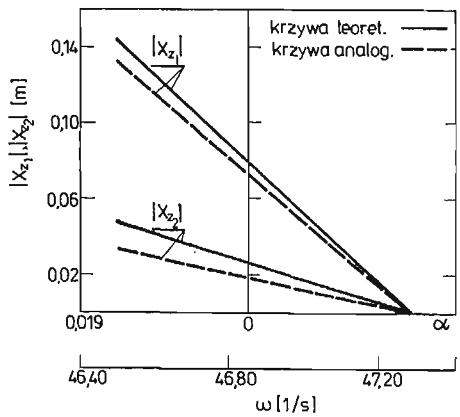
Rys. 5



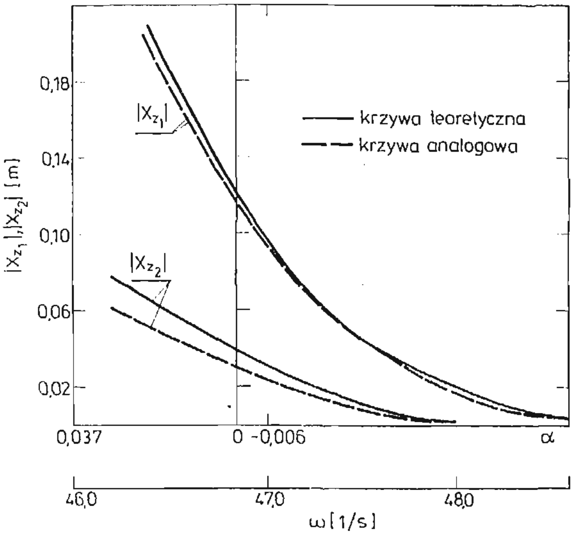
Rys. 6



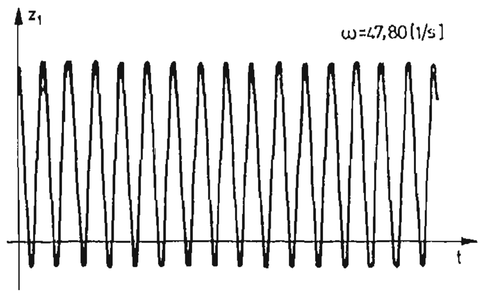
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

zewnętrznym. Wyniki badań dla przypadku rezonansu względem częstości drgań własnych p_1 przedstawiają rysunki 2, 3, 4 i 5.

Wyniki badań dla przypadku rezonansu względem drugiej częstości drgań własnych p_2 przedstawiają rysunki 6, 7, 8 i 9.

Rys. 10 przedstawia przykładowo przebieg czasowy drgań zarejestrowany w trakcie badań analogowych. Ilustruje on przesunięcie środka drgań.

7. Analiza wyników badań i wnioski końcowe

Przebiegi krzywych amplitudowych otrzymanych na drodze rozważań analitycznych oraz symulacji analogowej świadczą o dobrej zgodności wyników obu rodzajów badań, a tym samym o poprawności dociekań analitycznych. Jedynie dla amplitud drgań masy M przy samym wymuszeniu parametrycznym i rezonansie względem p_2 rozbieżność tych wyników wynosi około 12%.

Krzywe amplitudowe dla układu z nieliniową sprężystością typu kwadratowego odchylają się w stronę mniejszych częstości wymuszenia drgań, tak jak w przypadkach miękkiej charakterystyki sprężystości z nieliniowością sześcienną. Największe amplitudy drgań statecznych stwierdzono dla dolnej masy m przy rezonansie względem drugiej częstości drgań własnych p_2, zarówno w przypadku samego wzbudzenia parametrycznego, jak również jednocześnie działającego z nim wymuszenia kinematycznego. Szerokość obszaru niestateczności parametrycznej w przypadku rezonansu względem drugiej częstości drgań własnych p_2, jest około 7,2 razy większa od szerokości obszaru dla rezonansu względem częstości p_1. Porównując prawe gałęzie krzywych amplitudowych „a" i „b" — odpowiadających rozwiązaniom statecznym — należy stwierdzić znaczny wpływ wzbudzenia parametrycznego na wartości amplitud drgań.

Unaocznia się to tendencją do zbliżania się obu tych krzywych wraz ze zmniejszaniem częstości ω począwszy od prawej granicy obszaru niestateczności parametrycznej. Na przykład, dla rezonansu względem drugiej częstości p_2, amplituda drgań, przy $\alpha = 0$ masy m w przypadku działania samego wymuszenia parametrycznego stanowi około 82% wartości amplitudy przy jednoczesnym działaniu obu rodzajów wymuszeń, natomiast dla masy M udział ten wynosi około 80%.

Podczas symulacji analogowej — spełniającej również rolę badań stateczności — nie stwierdzono drgań odpowiadających lewym gałęziom „a" teoretycznych krzywych amplitudowych. Świadczy to o tym, że drgania przedstawione tymi krzywymi są niestateczne. Ponieważ badania analogowe przeprowadzono przy ciągłym zwiększaniu, a następnie zmniejszaniu wartości ω, w rezultacie otrzymano obwiednie amplitud drgań statecznych.

Na rysunkach, wzdłuż krzywych amplitudowych oznaczono strzałkami kierunki ruchu pisaka, a tym samym zmian wartości amplitud wraz ze zmianą częstości ω. Stwierdzono przy tym przeskoki amplitud występujące w miejscach zaznaczonych strzałkami pionowymi. Rezultaty te potwierdzają znaną w teorii drgań zasadę zrywania amplitud wzdłuż pionowych stycznych do krzywych amplitudowych.

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach (rys. 4, 5, 8, 9) bezwzględne wartości przesunięć rosną wraz ze zmniejszaniem częstości ω. Dla rezonansów względem p_1 i p_2 bezwzględne wartości przesunięć dla masy M są większe od masy dolnej m.

Literatura cytowana w tekście

1. J. J. STOKER, *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, New York, 1950.
2. Ch. HAYASHI, *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*, WNT Warszawa 1968.
3. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Uogólnienie metody bilansu harmonicznych do wyznaczania parametrycznych rezonansów kombinowanych*, Prace I.P.P.T. PAN 1977.
4. S. P. STRIEŁKOW, *Wwiedienije w teoriju kolebanij*, Nauka, Moskwa 1964.
5. M. MITSCHKE, *Dynamika samochodowa*, WKŁ, Warszawa 1977.
6. W. WOJNO, *Zawieszenia pneumatyczne w pojazdach drogowych.*
7. H. SPUS, *Badanie wpływu niejednorodności opony na drgania pojazdów*, *Postęp w badaniach pojazdów samochodowych*, Wydawnictwo PAN, Kraków 1976.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГОСТИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ И ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В работе исследуются колебания системы при двух степенях свободы с нелинейной упругостью квадратичного типа, а также с линейным затуханием при параметрическом возбуждении действующим совместно с кинематическим воздействием.

Аналитичесские исследования проведены с использованием пертурбационного метода.

Правильность результатов аналитических исследований, а также исследования устойчивости проведены путем аналоговой имитации.

Summary

THE VIBRATIONS OF THE SYSTEM WITH NONSYMMETRICAL CHARACTERISTICS OF THE ELASTICITY UNDER THE PARAMETRIC EXCITATION AND EXTERNAL EXERTION

In this work the vibrations were considered of the system of two degrees of freedom with nonlinear quadratic type elasticity and linear damping under the parametric excitation and simultaneous kinematic exertion.

Analytical examinations were proceeded by the method of perturbation. The correctness of the results of analytical considerations and stability examination were proved by means of an analogue simulation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 października 1983 roku