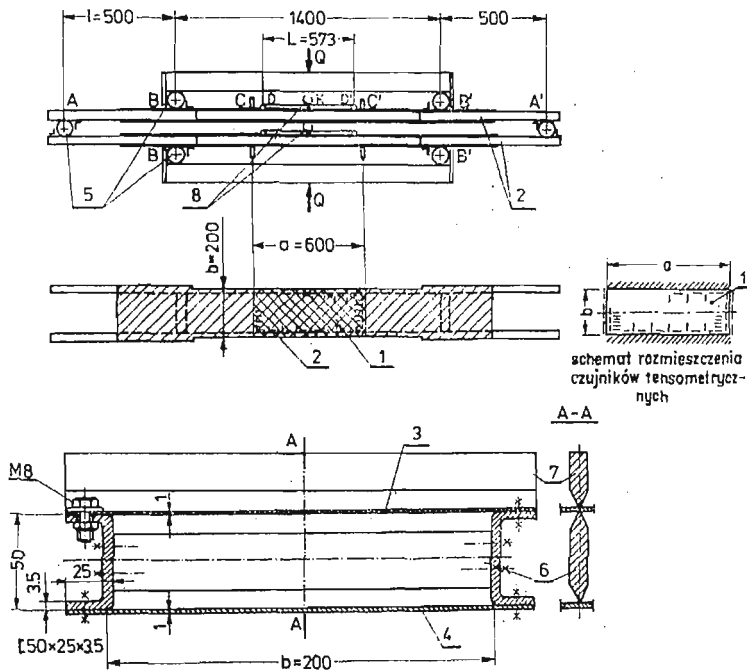


**BADANIA DOŚWIADCZALNE STANU ZAKRYTYCZNEGO
RÓWNOMIERNIE ŚCISKANEJ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ,
BĘDĄCEJ ELEMENTEM ZGINANEGO DŹWIGARA**

ANDRZEJ ŻELIGOWSKI (ŁÓDŹ)

Politechnika Łódzka
Instytut Mechaniki Stosowanej

Celem badań była weryfikacja doświadczalna wzorów otrzymanych w pracy [1] dotyczącej analizy stanów naprężenia i odkształcenia równomiernie ściskanej płyty prostokątnej o dwóch brzegach równoległych do kierunku ściskania — utwierdzonych i pozostałych brzegach (poprzecznych) swobodnie podpartych. Badaniu poddano płytę 1 będącą elementem specjalnie skonstruowanego dźwigara skrzynkowego 2 poddanego czystemu zginaniu. Przekrój poprzeczny dźwigara pokazany jest na rys. 1. Dźwigar utworzony



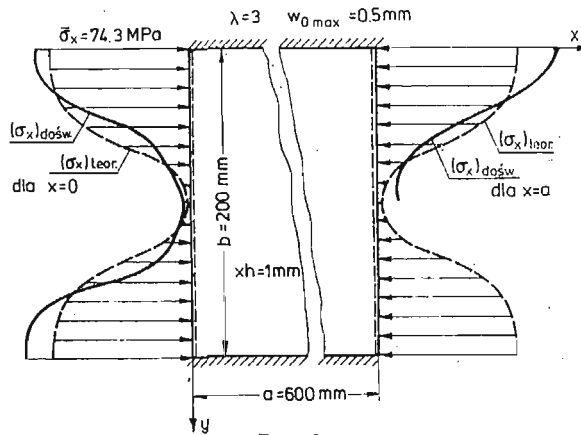
Rys. 1.

został z dwóch ceowników $[50 \times 25 \times 3,5 \text{ mm}]$ połączonych dwoma cienkimi pasami 3,4. Pasy dźwigara wykonano z jednomilimetrowej blachy. Brzegi dłuższe pasów przykręcono do półek ceowników dużą ilością śrub M8, co powodowało utwierdzenie tych brzegów do znacznie sztywniejszych od blachy ceowników. Zamiast przepon, które bywają w dźwigarach, zastosowano pryzmy 6 i 7 realizujące przegubowe podparcie poprzecznych brzegów badanych płyt.

Wykonano dwa identyczne dźwigary przedzielone w punktach A, A' rolkami 5 i obciążono je w sposób pokazany na rys. 1. W każdym z dźwigarów badano jedną z płyt ściskanego pasa.

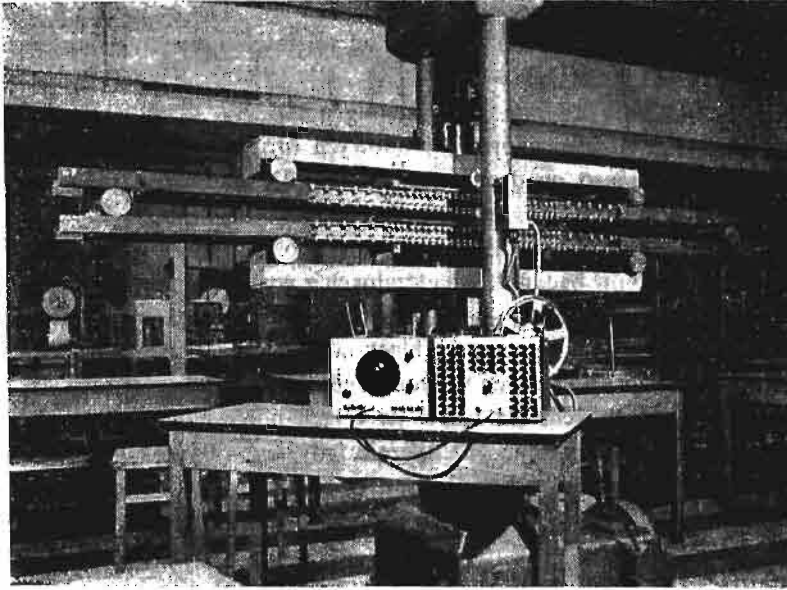
1. Rezultaty wynikające z pomiarów tensometrycznych

Stanowisko pomiarowe (rys. 1) umieszczono w maszynie wytrzymałościowej o napędzie mechanicznym firmy VEB Thüringen Industrierwerk Ravenstein i zakresie obciążenia 0 - 9, 81 kN; następnie omówiony model obciążono siłami Q wywołującymi na odcinkach BB' czyste zginanie dźwigarów i powodującymi w każdym dźwigarze ściskanie jednego z pasów. Częścią ściskanego pasa była badana płyta 1. Naprężenia w płycie określono poprzez pomiar odkształceń (w 98 punktach) dokonywany tensometrami oporowymi. Schemat rozmieszczenia czujników tensometrycznych znajduje się na rys. 1. Pomiary odkształceń zawsze przeprowadzane były równocześnie dla dwóch zewnętrznych przeciwnych powierzchni płyt, co umożliwiało oddzielenie naprężeń stanu błonowego od naprężeń stanu zgięciowego. Fotografia stanowiska znajduje się na rys. 3. Dźwigary obciążano

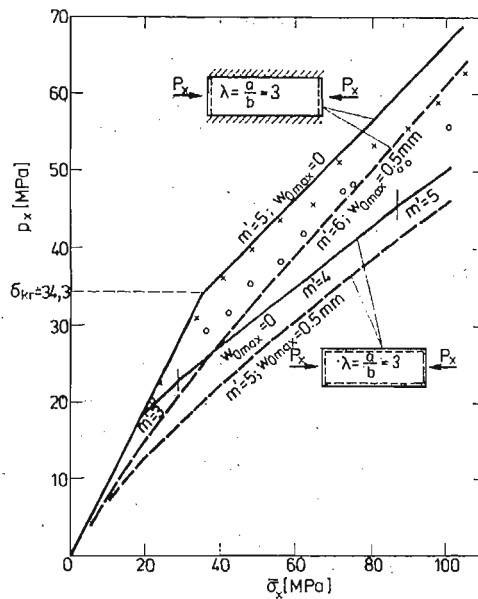


Rys. 2.

zmieniając wartości sił Q co 0,49 kN od 1,67 kN do 7,06 kN. Każdorazowo odczytywano wskazania tensometrów, co pozwoliło na wyznaczenie naprężeń błonowych przy brzegach płyt $\bar{\sigma}_x = (\sigma_x)_{y=0} = (\sigma_x)_{y=b}, (\sigma_x)_{x=0}, (\sigma_x)_{x=a}$. Z otrzymanego rozkładu naprężeń określono wartość średnich naprężeń ściskających p_x . Na rys. 2 wykres wykonany linią ciągłą przedstawia rozkład naprężeń w środkowej powierzchni płyty otrzymany z doświadczeń, a linią przerywaną rozkład tychże naprężeń otrzymany teoretycznie wg pracy [1]. Wykres dotyczy stanu naprężenia, w którym przy brzegu płyty naprężenia $\bar{\sigma}_x = 74,3 \text{ MPa}$. Na rys. 4



Rys. 3.



Rys. 4.

wykonane są wykresy określające zależności średnich naprężeń ściskających p_x od naprężeń na brzegu σ_x . Linie ciągłe dotyczą płyt nie mających ugięć wstępnych $w_0 = 0$. Punkty naniesione na wykres oznaczone kółeczkami wynikają z doświadczeń. Punkty te znajdują się w bliskim sąsiedztwie górnej linii kreskowanej uzyskanej z obliczeń teoretycznych [1]

dla płyt mających ugięcie wstępne $w_{0,max} = h/2 = 0,5$ mm. Dla $\sigma_x < 100$ wartość naprężenia p_x otrzymana z doświadczenia różni się od wartości otrzymanej wg pracy [1]:

- gdy $w_0 = 0$ maksymalnie o $\sim 17\%$
- gdy $w_{0,max} = 0,5h = 0,5$ mm maksymalnie o 10% .

Pokazany na rys. 2 rozkład naprężeń błonowych $(\sigma_{xb})_{x=0}$ wynikający z doświadczeń jest zbliżony do uzyskanego na drodze analitycznej [1] dla płyty, której maksymalne ugięcie wstępne wynosi $w_0^* = 0,5$. Maksymalny błąd wynosi $\Delta\sigma_x \sim 27\%$. W badanym modelu ugięcia wstępne płyty były rzędu połowy grubości płyty, a więc otrzymano zadowalającą zgodność wyników badań doświadczalnych z wynikami uzyskanymi analitycznie. W praktycznych obliczeniach czyni się czasem uproszczenie zwiększające bezpieczeństwo, przyjmując, że płyty będące elementami blachownic są na całym obwodzie podparte przegubowo. Uproszczenie to robi się wówczas, gdy brak jest wyczerpujących rozwiązań przypadków bardziej złożonych. Na rys. 4 (w celach porównawczych) zamieszczone są wykresy zależności $p_x(\bar{\sigma}_x)$ uzyskane analitycznie, gdy $w_0 = 0$ oraz gdy $w_{0,max} = h/2 = 0,5$ mm dla płyt różniących się od analizowanych tym, że wszystkie jej brzegi podparte są przegubowo.

2. Wyniki uzyskane z pomiarów ugięć dźwigara

Równoległe z opisanymi w punkcie 1 badaniami bazującymi na pomiarach tensometrycznych prowadzone były badania oparte na określeniu ugięć dźwigara dokonywanych za pomocą czujników zegarowych 8 (rys. 1). Mierzono ugięcie f_k środkowego fragmentu DD' dźwigara mieszczącego się w obrębie badanej płyty. Dźwigar na odcinku pomiarowym poddany był czystemu zginaniu momentem $M = Q \cdot l/2$. Przyjęto, że $E_{ceownika} = E_{pasów} = E = 2,06 \cdot 10^5$ MPa.

Moment bezwładności pracującej części przekroju poprzecznego dźwigara wynika ze znanego wzoru na strzałkę ugięcia

$$f_k = \frac{ML^2}{8EJ} \Rightarrow J = \frac{ML^2}{8Ef_k} = \frac{(Ql/2)L^2}{8Ef_k} = \frac{lL^2}{16E} \left(\frac{Q}{f_k} \right). \quad (1) \quad (2)$$

W omawianym przypadku $l = 0,50$ m, $L = DD' = 0,573$ m. Wartości siły obciążającej Q oraz odpowiadające jej strzałki ugięcia dźwigara zestawiono w tablicy 1.

Jeżeli $w_0 = 0$, to przed utratą stateczności ściskanego pasa, wychodząc z elementarnych wzorów wytrzymałościowych, teoretycznie w obydwu pasach dźwigara stan naprężenia jest jednorodny i wówczas $Q/f_k = \text{const}$, a zatem $J = \text{const}$.

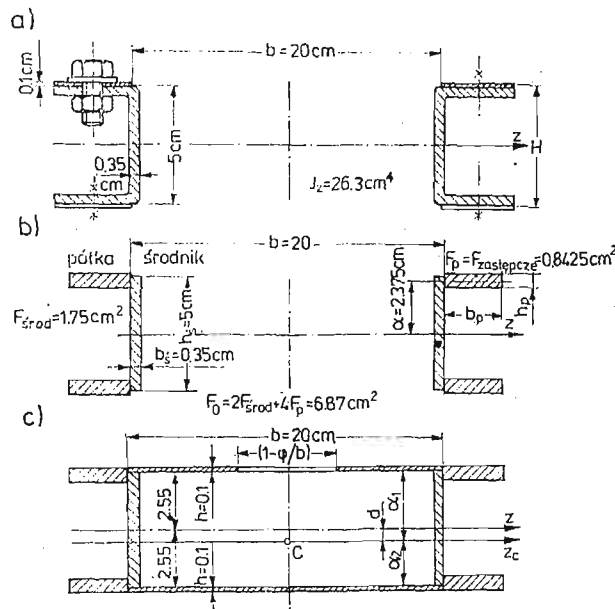
Moment bezwładności przekroju poprzecznego dźwigara znajdującego się w stanie dokrytycznym określony został w sposób następujący:

$$J_z = \bar{J}_z + 2[bh^3/12 + bh(H/2)^2] \approx \bar{J}_z + bhH^2/2; \quad (3)$$

tu \bar{J}_z jest to moment bezwładności przekroju poprzecznego badanego dźwigara, z którego wycięto symetrycznie, z obu przeciwległych pasów płyty zawarte między ceownikami i przymami (rys. 5a). Moment bezwładności \bar{J}_z określony został doświadczalnie na dźwigarach pozbawionych płyt $a \times b$ przy wykorzystaniu wzoru analogicznego do (2).

Tablica 1. Badania doświadczalne stanu zakrytycznego równomiernie ściskanej płyty prostokątnej, będącej elementem zginanego dźwigara

Q	kN	1,67	2,65	3,14	3,63	4,12	4,61	5,10	5,59	6,08	6,57	7,06
f_k Ugięcie dźwigara pozbawionego pasów	mm	—	—	—	0,69	0,78	0,875	1,00	1,05	1,12	1,25	—
f_k Ugięcie dźwigara	mm	0,16	0,255	0,305	0,36	0,415	0,47	0,525	0,58	0,64	0,695	0,75



Rys. 5.

Okazało się, że $\bar{J}_z = 26,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$. Podstawiając do wzoru (3): $\bar{J}_z = 26,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$, $b = 0,2 \text{ m}$, $h = 0,001 \text{ m}$, $H = 0,051 \text{ m}$ otrzymano $J_z = 52,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$.

W chwili utraty stateczności naprężenia we wszystkich punktach przekrojów poprzecznych obydwu pasów teoretycznie są jednakowe (w rzeczywistości — w przybliżeniu jednakowe) i wynoszą

$$\sigma_x = M \cdot H / (2J_z) = QlH / (4J_z) \quad (4)$$

gdzie wymiar l widoczny jest na rys. 1; $l = 500 \text{ mm} = 0,5 \text{ m}$. Ze ściskanego pasa zginanego dźwigara wydzielić można myślowo płytę o wymiarach $a \times b \times h = 0,6 \times 0,2 \times 0,001 \text{ m}$, dla której $\lambda = a/b = 3$.

Z zależności podanych w pracy [1] wynika, że w stanie krytycznym powinno powstać 5 półfal ($m = 5$) powierzchni ugięcia. Zgodnie z pracą [1] $k_m = 7,36$, a więc naprężenia krytyczne powodujące lokalną utratę stateczności ściskanego pasa

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right) k_m = \frac{\pi^2 \cdot 2,06 \cdot 10^5}{12(1-0,3^2)} \cdot \left(\frac{0,001}{0,2}\right)^2 \cdot 7,36 = 34,3 \text{ MPa.}$$

Siła Q wywołująca ten stan nazywana będzie siłą krytyczną. Wynika ona ze wzoru (4)

$$Q_{kr} = 4\sigma_{kr}J_z/(lH) = 4 \cdot 34,3 \cdot 52,3 \cdot 10^{-8}/(0,5 \cdot 0,051) = 2,81 \text{ kN.}$$

Jeżeli pas dźwigara skrzynkowego pracuje w stanie zakrytycznym, to iloraz Q/f_k wraz ze wzrostem obciążenia maleje, a więc maleje również i J_{zc} określone wzorem (2). Wynika to stąd, że rozkład naprężeń w ściskanym pasie przestaje być wówczas równomierny (rys. 2). Pas ściskany pracując w stanie pofalowanym jest mniej sztywny od pasa rozciąganego. Chcąc w obliczeniach praktycznych korzystać ze wzoru (1), a przy określaniu naprężeń ze wzoru (4), należy przyjąć, że szerokość pracująca ściskanej płyty zawartej między ceownikami wynosi nie b , lecz φb (rys. 5c), gdzie φ jest współczynnikiem redukcyjnym.

Naprężenie $\bar{\sigma}_x$ przy brzegu badanej płyty wynosi

$$\bar{\sigma}_x = M\alpha_1/J_{zc} = Ql\alpha_1/(2J_{zc}) \quad (5)$$

gdzie α_1 — jest to odległość powierzchni środkowej pasa ściskanego od osi obojętnej z_c „pracującego przekroju” poprzecznego dźwigara (rys. 5c).

Z pracy dźwigara „wyłącza” się część ściskanego pasa o polu równym $\Delta F = (1-\varphi)bh$. Przekrój poprzeczny modelu obliczeniowego dźwigara pokazany jest na rys. 5c. Pole przekroju poprzecznego dźwigara wynosi

$$F_c = F_0 + \varphi bh + bh,$$

gdzie F_0 jest to pole przekroju poprzecznego dźwigara pozbawionego pasów (rys. 5b); $F_0 = 6,87 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Środek ciężkości przekroju zredukowanego, oznaczony punktem C na rys. 5c, leży poniżej osi z w odległości d od tej osi

$$d = (1-\varphi)bh(H/2)/F_c. \quad (6)$$

Moment bezwładności zastępczego przekroju dźwigara wynosi

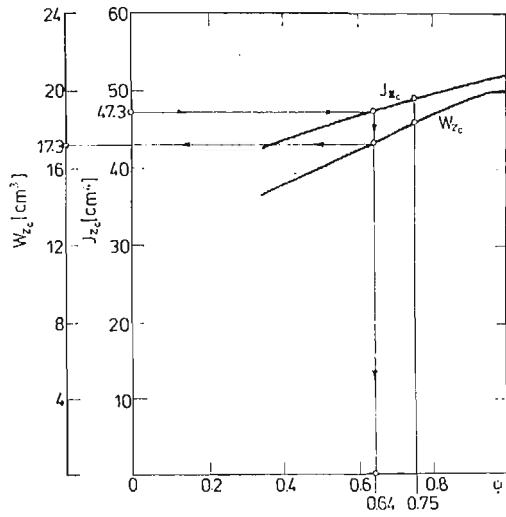
$$J_{zc} = (\bar{J}_z + F_0 d^2) + \left(\frac{\varphi bh^3}{12} + \varphi bh\alpha_1^2\right) + \left(\frac{bh^3}{12} + bh\alpha_2^2\right) \approx \bar{J}_z + F_0 d^2 + bh(\varphi\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \quad (7)$$

gdzie $\alpha_1 = H/2 + d$, $\alpha_2 = H/2 - d$. Wskaźnik wytrzymałości na zginanie $W_{zc} = J_{zc}/\alpha_1$, a więc

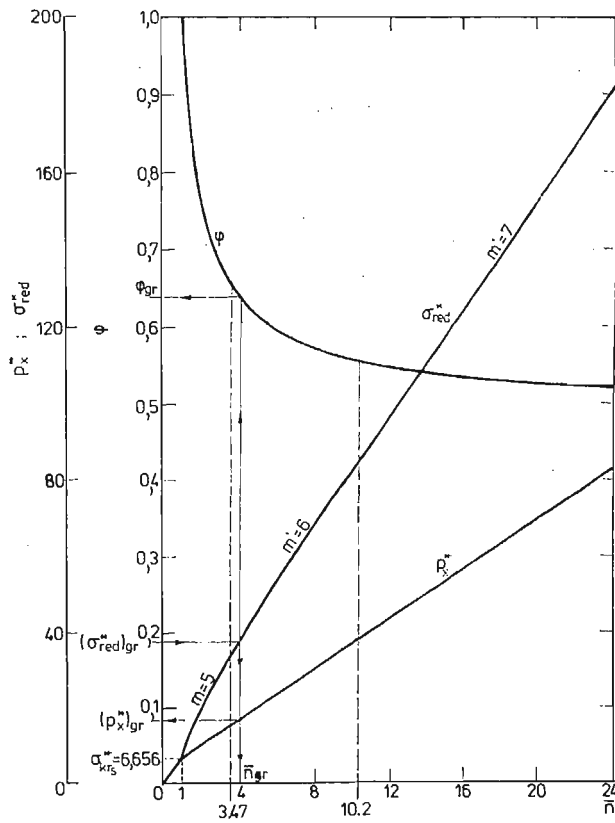
$$\bar{\sigma}_x = M/W_{zc} = Ql/(2W_{zc}) \quad (8)$$

Korzystając z powyższych wzorów po wstawieniu danych szczegółowych określono, jak zmienia się J_{zc} i W_{zc} w zależności od φ . Graficzny obraz funkcji $J_{zc}(\varphi)$ i $W_{zc}(\varphi)$ podany jest na rys. 6.

Jak zaznaczono, moment bezwładności całego przekroju poprzecznego dźwigara określony został doświadczalnie ze wzoru (2), do którego na f_k podstawiono strzałki ugięcia zmierzone doświadczalnie. Wyniki pomiarów zestawiono w tabelicy 1.



Rys. 6.



Rys. 7.

Po określeniu z doświadczeń momentu bezwładności J_{zc} znaleziono z wykresu (rys. 6) wartość współczynnika φ i wskaźnika na zginanie W_{zc} . Naprężenia $\bar{\sigma}_x$ obliczono ze wzoru (8) natomiast wartość średnich naprężeń ściskających wynika ze wzoru (9)

$$p_x = \varphi \bar{\sigma}_x \quad (9)$$

Zależności między p_x i $\bar{\sigma}_x$ wyznaczono dla 11 obciążeń dźwigara. Wyniki naniesiono na wykres znajdujący się na rys. 4 punkty zaznaczono gwiazdkami. Widać, że punkty te dla $\bar{\sigma}_x < 70$ MPa leżą nieco poniżej wykresu przedstawiającego zależności $p_x(\bar{\sigma}_x)$ $w_0 = 0$, otrzymaną analitycznie na podstawie wzorów pracy [1], natomiast dla $79 \text{ MPa} < \bar{\sigma}_x < 103 \text{ MPa}$ punkty oznaczone gwiazdkami leżą poniżej wykresu odpowiadającego rozwiązaniu analitycznemu [1], dla którego $w_{0\max} = 0,5h = 0,5 \text{ mm}$.

Bezwymiarowe naprężenie graniczne (czyli naprężenie, przy którym w płycie $\sigma_{\text{red max}} = \sigma_{\text{prop}} = 190 \text{ MPa}$) dla badanej płyty wynosi

$$(\sigma_{\text{red}}^*)_{\text{gr}} = \frac{\sigma_{\text{prop}}}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2 = \frac{190}{2,06 \cdot 10^5} \left(\frac{0,2}{0,001} \right)^2 = 37.$$

Z wykresu rys. 7 dla płyty bez ugięcia wstępnego można odczytać graniczne wartości \bar{n}_{gr} , φ_{gr} , oraz bezwymiarowe graniczne naprężenie $(p_x^*)_{\text{gr}} = 17$.

W omawianym przypadku $\bar{n}_{\text{gr}} = 4$, $\varphi_{\text{gr}} = 0,64$, $(p_x^*)_{\text{gr}} = 87,6 \text{ MPa} > \sigma_{\text{kr}} = 34,3 \text{ MPa}$ więc badana płyta może pracować w stanie zakrytycznym przy obciążeniu $p_x \leq (p_x^*)_{\text{gr}} = 87,6 \text{ MPa}$, stale będąc układem sprężystym, którego to obciążenia podczas doświadczeń nie przekroczone.

$$\lambda = 3,0$$

Z wykresów znajdujących się na rys. 4 widać, że podczas badań doświadczalnych średnie naprężenie w płytach wynosiło maksymalnie $(p_x)_{\text{max}} = 64 \text{ MPa}$, a więc stan graniczny w analizowanych płytach nie został przekroczony.

Literatura

1. T. GAŁKIEWICZ, A. ŻELIGOWSKI, *Stateczność i stan zakrytyczny konstrukcji cienkościennych**. Praca wykonana w ramach problemu 05.12 IPPT PAN 1974-78, Inst. Mechaniki Stosowanej PŁ.
2. T. KÁRMÁN, E. E. SECHLER, L. H. DONNELL, *The strength of thin-plates in compression*, Trans. ASME 54, 1932.
3. A. S. VOLMIR, *Ustoicivost deformiruiemych sistem*. Nauka, Moskwa 1967.
4. N. YAMAKI, *Postbuckling behaviour of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression*. Journal of App. Mech. 58, 1959.
5. H. SCHULTZ, *Zum Spannungszustand der elastisch eingespannten Rechteckplatte oberhalb der Beullast*. Schiff und Hafen 19, Nr 2, 1967.

*) Zagadnienie rozwiązano metodą Bubnova-Galerkina, aproksymując ugięcie płyty za pomocą funkcji $w = f(1 - \cos 2\pi y/b) \cdot \sin(m\pi x/a)$ przy uwzględnieniu możliwości skokowego narastania wraz z obciążeniem liczby półfal m . Naprężenia zredukowane określone zostały wg hipotezy Hubera $wm \times 196$ punktach.

Р е з ю м е

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАКРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ
РАВНОМЕРНЕ СЖИМАЕМОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ

Темой работы является частичная опытная верификация теоретических формул, касающихся сжатия в закритическом пределе прямоугольной пластинки с продольных краях укрепленных, а поперечных, которые шарнирно подпартых. Исследуется пластинку, которая является отрывком особо построенного модели ящичковой балки, испытанной чистому изгибу.

S u m m a r y

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF POSTCRITICAL STATE OF UNIFORMLY
COMPRESSED RECTANGULAR PLATE AS AN ELEMENT OF BENT

The aim of this paper is to present the experimental verification of the theoretical expressions derived for the post-buckling behaviour of the compressed rectangular plate clamped along longitudinal edges and simply supported along loaded sides. The compressed element of the flange of the box-girder loaded by pure bending is regarded as an experimental model.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1984 roku
