

## STATECZNOŚĆ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ TRÓJWARSTWOWEJ POWŁOKI W KSZTAŁCIE WYCINKA STOŻKA W UJĘCIU GEOMETRYCZNIE NIELINIOWYM

JAROSŁAW NOWINKA I JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

*Politechnika Poznańska*

W pracy wyznaczono górne i dolne obciążenia krytyczne oraz przeanalizowano przebieg utraty stateczności dla swobodnie podpartej otwartej trójwarstwowej powłoki stożkowej obciążonej siłami podłużnymi i równomiernym ciśnieniem poprzecznym. Założono, że w chwili wyboczenia warstwy nośne powłoki są sprężyste lub uplastycznione, podczas gdy rdzeń pozostaje sprężysty. Postawione zagadnienie sformułowano w ujęciu energetycznym, a do rozwiązania zastosowano metodę Ritz'a. Równania wyprowadzono w oparciu o związki fizyczne deformacyjnej teorii plastyczności Nadai'a-Hencky'ego, wykorzystując koncepcję wzrastającego obciążenia Shanley'a. Opracowano iteracyjny algorytm obliczeniowy, który umożliwia przeanalizowanie ścieżek równowagi dla powłok znajdujących się w sprężystym, sprężysto-plastycznym lub całkowicie plastycznym przedkrytycznym stanie naprężeń. Przedstawiono szereg przykładów liczbowych, których celem jest zbadanie wpływu podstawowych parametrów fizycznych i geometrycznych na przebieg utraty stateczności powłoki przy dużych ugięciach.

### 1. Wstęp

Cienkościenne powłoki wielowarstwowe znajdują zastosowanie w budowie nowoczesnych pojazdów powietrznych, wodnych i lądowych oraz w budownictwie. Najczęściej spotykane konstrukcje składają się z dwóch warstw nośnych połączonych ze sobą środkową warstwą wypełniającą. Stosunkowo cienkie warstwy nośne wykonywane są z materiałów o dużej sztywności (stal, stopy aluminium), natomiast warstwa środkowa może być zbudowana z blachy falistej lub z masy plastycznej, masy piankowo-gąbczastej, porowatego kauczuku, korka, itp. materiałów. Powłoki tego typu charakteryzują się dobrą izolacją akustyczną i termiczną. Mają takie istotne zalety, jak lekkość i możliwość przenoszenia stosunkowo dużych obciążeń. Dla spełnienia tych wymagań konstruktorowi obecnie nie wystarcza już analiza w zakresie sprężystym; istotna staje się znajomość faz przejścia od pojawienia się pierwszych odkształceń plastycznych, do chwili całkowitego wyczerpania nośności. Celem niniejszej pracy jest przeanalizowanie zagadnienia stateczności omawianej

powłoki przy dość ogólnych założeniach, dotyczących zarówno obciążenia, jak i parametrów materiałowych i geometrycznych.

Problemom sprężysto-plastycznej stateczności powłok trójwarstwowych poświęcono dotychczas niewielką liczbę opracowań. Wymienić należy prace dotyczące powłok walcowych [2 i 6], gdzie autorzy przyjmowali do analizy związki fizyczne teorii odkształceniowej. E. I. Grigoluk [3] wyprowadził związki dla analizy powłok mało wyniosłych; pojawiają się jednak trudności przy ich całkowaniu, gdy w powłoce w stanie przedkrytycznym panuje niejednorodny stan naprężeń (jak np. w powłoce stożkowej). W pracach [9 i 10] wyznaczono obciążenia krytyczne dla trójwarstwowej zamkniętej powłoki stożkowej; do rozwiązania zastosowano metodę ortogonalizacyjną oraz iteracyjną procedurę numeryczną, opierając się na związkach fizycznych zarówno teorii deformacyjnej, jak i przyrostowej teorii plastycznego płynięcia. Wymienić należy również pracę R. Struka [7], gdzie rozpatrzono podobne zagadnienie, lecz ograniczając się do zakresu sprężystego, oraz pracę J. Maciejewskiego i J. Zielnicy [5], gdzie rozpatrzono zagadnienie sprężysto-plastycznej stateczności jednowarstwowej powłoki stożkowej, a sformułowanie problemu i przyjęta metoda rozwiązania są podobne do stosowanych w rozważanym tutaj zagadnieniu.

W niniejszej pracy podjęto analizę stateczności trójwarstwowej powłoki o postaci wycinka stożkowego, swobodnie podpartej i poddanej działaniu sił podłużnych oraz poprzecznych. Rozważa się aktywny proces obciążenia (brak zewnętrznego lub wewnętrznego odciążenia). Przyjęto następujące założenia podstawowe: 1) warstwy nośne mają symetryczną budowę i równą grubość, wykonane są z materiału izotropowego, ściśliwego ze wzmocnieniem — uwzględnia się ich sztywność na zginanie oraz przyjmuje dla nich ważność hipotez Kirchhoffa-Love'a; 2) warstwa wypełniająca jest typu lekkiego o niewielkiej sztywności na rozciąganie i zginanie (pomijanej w obliczeniach); poddana obciążeniu nie uplastycznia się i przenosi wyłącznie ścinanie poprzeczne. Postawione zagadnienie zostanie rozwiązane metodą Ritza z wykorzystaniem związków geometrycznych teorii nieliniowej oraz związków fizycznych deformacyjnej teorii plastyczności.

## 2. Podstawowe zależności

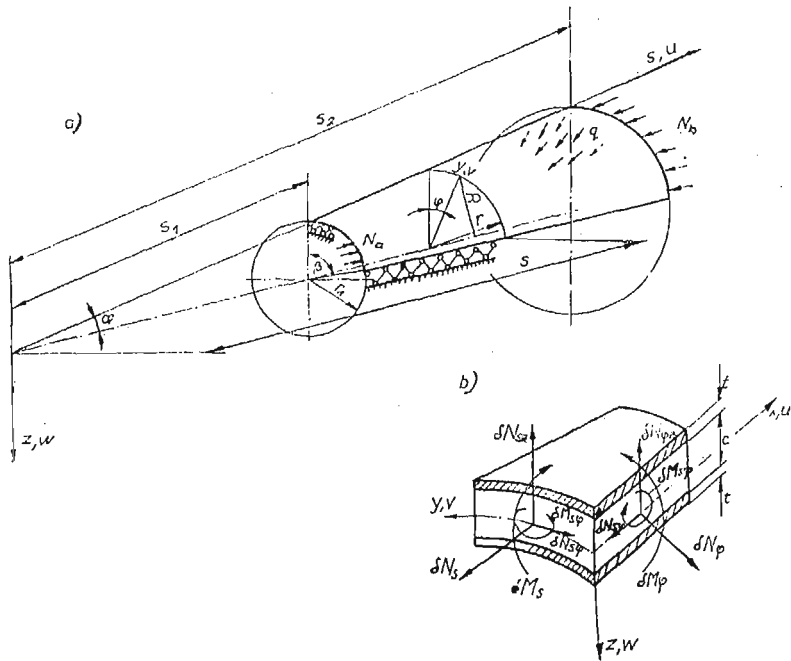
Przedmiotem analizy jest swobodnie podparta trójwarstwowa powłoka w kształcie wycinka stożka, składająca się z dwóch warstw nośnych o równej grubości oraz z warstwy wypełniającej (rys. 1). Zakładając stosowalność hipotezy Kirchhoffa-Love'a dla warstw nośnych, a także przyjmując, iż wariacja przemieszczeń wzdłuż grubości powłoki w warstwie wypełniającej jest liniowa, uzyskujemy następujące wzory na przemieszczenia  $u$  i  $v$  wywołane utratą stateczności odpowiednio w kierunku wzdłużnym i obwodowym na powierzchni odległej o  $z$  od powierzchni podstawowej powłoki (rys. 2);

a) warstwa nośna zewnętrzna,  $0,5c \leq z \leq 0,5c + t$

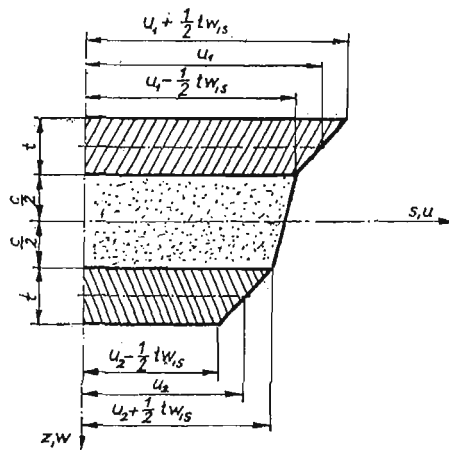
$$u = u^+ + \left(z - \frac{c+t}{2}\right) w_{,s}, \quad v = v^+ + \left(z - \frac{c+t}{2}\right) \frac{1}{r} w_{,\varphi}, \quad (2.1)$$

b) warstwa nośna wewnętrzna,  $-0,5c - t \leq z \leq -0,5c$

$$u = u^- + \left(z + \frac{c+t}{2}\right) w_{,s}, \quad v = v^- + \left(z + \frac{c+t}{2}\right) \frac{1}{r} w_{,\varphi}, \quad (2.2)$$



Rys. 1.



Rys. 2.

c) warstwa wypełniająca,  $-0,5c \leq z \leq 0,5c$

$$u = u_\alpha + \frac{z}{c}(2u_\beta - t w_s), \quad v = v_\alpha + \frac{z}{c}(2v_\beta - \frac{t}{r} w_\varphi). \quad (2.3)$$

W powyższych wzorach  $u^+$  i  $v^+$  oraz  $u^-$  i  $v^-$  są przemieszczeniami powierzchni środkowych odpowiednio zewnętrznej i wewnętrznej warstwy nośnej. Przyjęto  $w = w_1 = w_2 = w_3$ .

Wprowadzono tutaj również

$$u_\alpha = \frac{u^+ + u^-}{2}, \quad v_\alpha = \frac{v^+ + v^-}{2}, \quad u_\beta = \frac{u^+ - u^-}{2}, \quad v_\beta = \frac{v^+ - v^-}{2}. \quad (2.4)$$

Wariacje odkształceń oraz krzywizn w powłoce określimy następująco [4]:

a) warstwy nośne

$$\begin{aligned} \delta e_s^\pm &= u_{,s}^\pm + \left( z \mp \frac{c+t}{2} \right) w_{,ss} + \frac{1}{2} w_{,s}^2, \\ \delta e_\varphi^\pm &= \frac{1}{r} v_{,\varphi}^\pm + \left( z \mp \frac{c+t}{2} \right) \left( \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{s} w_{,s} \right) + A_0 \frac{u^\pm}{s} - \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2r^2} w^2, \\ \delta \gamma_{s\varphi}^\pm &= \frac{1}{r} u_{,\varphi}^\pm + v_{,s}^\pm + 2 \left( z \mp \frac{c+t}{2} \right) \left( \frac{1}{r} w_{,s\varphi} - \frac{1}{rs} w_{,\varphi} \right) - A_0 \frac{v^\pm}{s} + \frac{1}{r} w_{,s} w_{,\varphi}, \\ \delta \kappa_s^\pm &= w_{,ss}, \\ \delta \kappa_\varphi^\pm &= \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{\cos \alpha}{r^2} v_{,\varphi}^\pm, \\ \delta \kappa_{s\varphi}^\pm &= \frac{1}{r} w_{,s\varphi} - \frac{1}{rs} w_{,\varphi} + \frac{\cos \alpha}{4r} v_{,s}^\pm - \frac{5 \cos \alpha}{4rs} v^\pm + \frac{\cos \alpha}{4r^2} u_{,\varphi}^\pm, \end{aligned} \quad (2.5)$$

b) warstwa wypełniająca (przenosi wyłącznie ścinanie poprzeczne)

$$\begin{aligned} \delta \gamma_{sz} &= \frac{1}{c} (2v_\beta - (c+t)w_{,s}), \\ \delta \gamma_{\varphi z} &= \frac{1}{c} \left( 2v_\beta - (c+t) \frac{1}{r} w_{,\varphi} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Niewielkie różnice występujące między niniejszymi związkami a przyjętymi przez Goldenwajzera [4] leżą w granicach dokładności założeń teorii powłok. Niekiedy w różnych opracowaniach dotyczących teorii powłok podane są nieco inne wyrażenia dla zmiany krzywizn (np. wg Własowa). Celem zbadania wpływu dodatkowych składników na wyniki obliczeń wprowadzono współczynnik  $A_0$ , który w obliczeniach numerycznych przyjmie wartość 0 lub 1.

Dla przyjętego przypadku obciążenia siły zewnętrzne i naprężenia odpowiadające bezmomentowemu przedkrytycznemu stanowi naprężeń wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} N_s &= 2t\sigma_s = \frac{1}{2} q \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{s_1}{s} - s \right) - N_\alpha \frac{s_1}{s}, \\ N_\varphi &= 2t\sigma_\varphi = -q \operatorname{stg} \alpha, \quad T_s = T_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Zakładając stały stosunek obciążenia podłużnego do poprzecznego

$$\kappa = \frac{N_\alpha}{qs_1}, \quad (2.8)$$

zapewniamy proporcjonalny wzrost składowych tensora naprężenia przy zwiększaniu obciążenia zewnętrznego, co stanowi wymóg tzw. „prostego obciążenia” dla deformacyjnej

teorii plastyczności. Naprężenia wzdłużne, obwodowe, styczne oraz intensywność naprężeń przyjmą odpowiednio wartości:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= -\frac{qs}{4t} k_s \operatorname{tg} \alpha, & \sigma_\varphi &= -\frac{qs}{2t} \operatorname{tg} \alpha, & \tau_{s\varphi} &= 0, \\ \sigma_t &= (\sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 + 3\tau_{s\varphi}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{qs}{4t} \sqrt{\Omega} \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie

$$k_s = 1 - \left( \frac{s_1}{s} \right)^2 \left( 1 - \frac{2\kappa}{\operatorname{tg} \alpha} \right), \quad \Omega = k_s(k_s - 2) + 4.$$

Zakładamy liniową charakterystykę umocnienia materiału warstw nośnych w zakresie plastycznym, dla której moduł styczny  $E_k = \text{const}$ , natomiast moduł sieciowy

$$E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{qs\sqrt{\Omega}}}, & \text{dla } \sigma_{pl} \leq \sigma_t \leq \sigma_m, \\ E, & \text{dla } 0 \leq \sigma_t \leq \sigma_{pl}, \end{cases} \quad (2.10)$$

gdzie  $\sigma_m$  jest wytrzymałością doraźną, a  $k_1 = \frac{4t}{\operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_{pl}$ . W opisie  $E_c$  (2.10) wykorzystano warunek plastyczności H-M-H. W obliczeniach numerycznych jest on realizowany przez odpowiednie instrukcje logiczne.

Związki fizyczne dla warstw nośnych wg teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych Nadaia-Hencky'ego mają postać [8]

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1}{E_c} \sigma_s - \left( \frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\nu}{2E} \right) \sigma_\varphi, \\ \varepsilon_\varphi &= -\left( \frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\nu}{2E} \right) \sigma_s + \frac{1}{E_c} \sigma_\varphi, \\ \gamma_{s\varphi} &= \left( \frac{3}{E_c} - \frac{1-2\nu}{E} \right) \tau_{s\varphi}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Przyjmując  $E_c = E$  uzyskujemy z (2.11) związki fizyczne dla ciała liniowo-sprężystego.

Aby wyznaczyć wariacje naprężeń, należy dokonać wariacji wyrażeń (2.11), a następnie odwrócić je ze względu na  $\delta\sigma_{\alpha\beta}$ . Po wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy zależności

$$\begin{bmatrix} \delta\sigma_s \\ \delta\sigma_\varphi \\ \delta\tau_{s\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_s \\ \delta\varepsilon_\varphi \\ \delta\gamma_{s\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Elementy macierzy sztywności mają postać

$$\begin{aligned} F_1 = f_{11} &= \frac{t}{D_0} \left( k_2 \bar{S}_\varphi^2 + \frac{E_k}{E_c} \right), \\ F_2 = f_{12} = f_{21} &= \frac{t}{D_0} \left[ -k_2 \bar{S}_s \bar{S}_\varphi + \frac{1}{2} (k_0 - 2) \frac{E_k}{E_c} \right], \end{aligned}$$

$$F_4 = f_{22} = \frac{t}{D_0} \left( k_2 \bar{S}_s^2 + \frac{E_k}{E_c} \right),$$

$$F_3 = f_{33} = \frac{tE_c}{k_0},$$

gdzie

$$D_0 = \frac{1}{4E_c} \left[ 3 + \frac{1-2\nu}{E} E_k (k_0 - 1) \right] - \frac{1-2\nu}{E} k_2 \bar{S}_s \bar{S}_\varphi, \quad k_0 = 3 - \frac{1-2\nu}{E} E_c, \quad (2.14)$$

$$\bar{S}_s = \frac{1}{\sigma_i} \left( \sigma_s - \frac{1}{2} \sigma_\varphi \right) = (1 - k_s) / \sqrt{\Omega}, \quad \bar{S}_\varphi = \frac{1}{\sigma_i} \left( \sigma_\varphi - \frac{1}{2} \sigma_s \right) = \frac{k_s - 4}{2\sqrt{\Omega}}, \quad k_2 = 1 - \frac{E_k}{E_c}.$$

Siły i momenty w warstwach nośnych powstające w wyniku utraty stateczności uzyskuje się przez całkowanie wariacji naprężeń (2.12) wzdłuż grubości warstw nośnych

$$\delta N_{\alpha\beta}^{\pm} = \int_{\pm \frac{1}{2}c}^{\pm \frac{1}{2}c \pm t} \delta \sigma_{\alpha\beta}^{\pm} dz, \quad \delta M_{\alpha\beta}^{\pm} = \int_{\pm \frac{1}{2}c}^{\pm \frac{1}{2}c \pm t} \delta \sigma_{\alpha\beta}^{\pm} z dz. \quad (2.15)$$

Warstwa wypełniająca zgodnie z przyjętymi założeniami przenosi wyłącznie siły ścinające, stąd

$$\delta N_{sz} = G_3 \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} \delta \gamma_{sz} dz, \quad \delta N_{\varphi z} = G_3 \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} \delta \gamma_{\varphi z} dz, \quad (2.16)$$

gdzie  $G_3$  jest modułem odkształcenia postaciowego materiału warstwy wypełniającej.

### 3. Równanie stateczności

Układ równań stateczności powłoki stożkowej wyrażony w przemieszczeniach nie ma ścisłego rozwiązania. Przybliżone rozwiązanie metodą ortogonalizacyjną Galerkiną związane jest z pracochłonnymi obliczeniami, dlatego w niniejszej pracy zastosowano metodę Ritz'a. Opierając się na twierdzeniu, że równowadze układu odpowiada ekstremum jego energii potencjalnej  $W$ , otrzymujemy równanie równowagi powłoki w ujęciu wariacyjnym,

$$\delta W = \delta(U + L) = 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $U$  jest energią zgromadzoną w powłoce w trakcie jej odkształcenia,  $L$  zaś jest pracą sił zewnętrznych. Równanie (3.1) jest poprawne zarówno dla stanów przedkrytycznych, jak i pokrytycznych.

Do wzoru na energię  $W$ , zamiast ścisłych wyrażań na przemieszczenia, wprowadzimy funkcje aproksymujące zawierające współczynniki  $A_i$ , które dobiera się tak, aby możliwie najdokładniej odtwarzały przebieg rzeczywistych przemieszczeń.

Równanie

$$\delta W = \sum_{i=1}^k W_{,A_i} \delta A_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.2)$$

jest spełnione przy zupełnej dowolności wariacji  $\delta A_i$ , zatem

$$W_{,A_i} = 0. \quad (3.3)$$

Warunek równoczesnego spełnienia tych równań określa krytyczny układ obciążeń. Gdy równania te są liniowe i jednorodne, pozostaje do rozwiązania zagadnienie wartości własnych, jednak w naszym przypadku powstaje bardziej złożony układ równań nieliniowych i niejednorodnych.

Całkowitzą energię potencjalną powłoki  $W$  uzyskujemy, sumując jej wartości w warstwach nośnych:  $U^+$  (zewnątrznej),  $U^-$  (wewnętrznej), w warstwie wypełniającej  $U^w$  oraz pracę sił zewnętrznych  $L$ :

$$W = U^+ + U^- + U^w + L. \quad (3.4)$$

Poszczególne składniki energii mają postać

$$U^\pm = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta (\delta N_s^\pm \delta \varepsilon_s^\pm + \delta N_\varphi^\pm \delta \varepsilon_\varphi^\pm + \delta N_{s\varphi}^\pm \delta \gamma_{s\varphi}^\pm + \delta M_s^\pm \delta \kappa_s^\pm + \delta M_\varphi^\pm \delta \kappa_\varphi^\pm + 2\delta M_{s\varphi}^\pm \delta \kappa_{s\varphi}^\pm) r d\varphi ds, \quad (3.5)$$

$$U^w = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta (\delta N_{sz} \delta \gamma_{sz} + \delta N_{\varphi z} \delta \gamma_{\varphi z}) r d\varphi ds,$$

gdzie wariacje odkształceń uzyskane ze wzorów (2.5) dotyczą powierzchni środkowych odpowiednich warstw. Pracę sił zewnętrznych można w pewnym uproszczeniu ([8]) zapisać jako funkcję przemieszczenia  $w$ ,

$$L = - \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta q w r d\varphi ds - \frac{1}{2} N_a s_1 \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta w_{,s}^2 d\varphi ds. \quad (3.6)$$

Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń na wariacje sił i momentów (2.15) i (2.16) oraz odkształceń i krzywizn, wykorzystując oznaczenia (2.4), otrzymujemy następujące wyrażenie na energię potencjalną powłoki

$$W = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^\beta \left\{ 2f_{11} \left[ \left( u_{\alpha,s} + \frac{1}{2} w_{,s}^2 \right)^2 + u_{\beta,s}^2 \right] + 4f_{12} \left[ \left( u_{\alpha,s} + \frac{1}{2} w_{,s}^2 \right) \left( \frac{1}{r} v_{\alpha,\varphi} + A_0 \frac{u_\alpha}{s} - \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2r^2} w_{,\varphi}^2 \right) + \frac{1}{r} u_{\beta,s} v_{\beta,\varphi} + \frac{A_0}{s} u_{\beta,s} u_\beta \right] + 2f_{22} \left[ \left( \frac{1}{r} v_{\alpha,\varphi} + A_0 \frac{u_\alpha}{s} - \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2r^2} w_{,\varphi}^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{r} v_{\beta,\varphi} + A_0 \frac{u_\beta}{s} \right)^2 \right] + 2f_{33} \left[ \left( \frac{1}{r} u_{\alpha,\varphi} + v_{\alpha,s} - A_0 \frac{v_\alpha}{s} + \frac{1}{r} w_{,s} w_{,\varphi} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} u_{\beta,\varphi} + v_{\beta,s} - A_0 \frac{v_\beta}{s} \right)^2 \right] + 2 \left[ \left( \frac{c+t}{2} u_{\beta,s} + \frac{t^2}{12} w_{,ss} \right) \left( f_{11} w_{,ss} + f_{12} \left( \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) \right) + \left( \frac{c+t}{2} \left( \frac{1}{r} v_{\beta,\varphi} + A_0 \frac{u_\beta}{s} \right) + \frac{t^2}{12} \left( \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{s} w_{,s} \right) \right) \left( f_{12} w_{,ss} + f_{22} \left( \frac{1}{s} w_{,s} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) \right) \right] + \frac{\cos \alpha}{r^2} \left( \frac{c+t}{2} (f_{12} (2v_{\alpha,\varphi} u_{\beta,s} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2v_{\beta,r}u_{\alpha,s} + w_{,s}^2 v_{\beta,\varphi}) + f_{22} \left( \frac{4}{r} v_{\alpha,\varphi} v_{\beta,\varphi} + 2A_0 \frac{1}{s} (u_{\alpha} v_{\beta,\varphi} + u_{\beta} v_{\alpha,\varphi}) + 2v_{\beta,\varphi} \left( -\frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{2r^2} w_{,\varphi}^2 \right) \right) + \\
& \quad (3.7) \\
& + \frac{t^2}{6} \left( f_{12} v_{\alpha,\varphi} w_{,ss} + f_{22} v_{\alpha,\varphi} \left( \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{s} w_{,s} \right) \right) + 4f_{33} \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,s\varphi} - \frac{1}{rs} w_{,\varphi} \right) \left( \frac{c+t}{2} \left( \frac{1}{r} u_{\beta,\varphi} + \right. \right. \right. \\
& + v_{\beta,s} - A_0 \frac{v_{\beta}}{s} \left. \right) + \frac{t^2}{6} \left( \frac{1}{r} w_{,s\varphi} - \frac{1}{rs} w_{,\varphi} + \frac{\cos \alpha}{4r} v_{\alpha,s} - \frac{5 \cos \alpha}{4rs} v_{\alpha} + \frac{\cos \alpha}{4r^2} u_{\alpha,\varphi} \right) \left. \right] + \frac{c+t}{2} \left( \frac{\cos \alpha}{4r} \times \right. \\
& \times \left( \frac{1}{r} (u_{\alpha,\varphi} v_{\beta,s} + u_{\beta,\varphi} v_{\alpha,s}) + 2v_{\alpha,s} v_{\beta,s} - \frac{A_0}{s} (v_{\alpha,s} v_{\beta} + v_{\alpha} v_{\beta,s}) + \frac{1}{r} w_{,s} w_{,\varphi} v_{\beta,s} \right) - \frac{5 \cos \alpha}{4rs} \times \\
& \times \left( \frac{1}{r} (u_{\alpha,\varphi} v_{\beta} + v_{\beta,\varphi} v_{\alpha}) + v_{\alpha,s} v_{\beta} + v_{\beta,s} v_{\alpha} - \frac{2A_0}{s} v_{\alpha} v_{\beta} + \frac{1}{r} v_{\beta} w_{,s} w_{,\varphi} \right) + \frac{\cos \alpha}{4r^2} \left( \frac{2}{r} u_{\alpha,\varphi} u_{\beta,\varphi} + \right. \\
& v_{\alpha,s} u_{\beta,\varphi} + v_{\beta,s} u_{\alpha,\varphi} - \frac{A_0}{s} (v_{\alpha} u_{\beta,\varphi} + v_{\beta} u_{\alpha,\varphi}) + \frac{1}{r} w_{,s} w_{,\varphi} u_{\beta,\varphi} \left. \right) \left. \right] + 4 \frac{G_3}{c} \left[ \left( u_{\beta} - \frac{c+t}{2} w_{,s} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left( v_{\beta} - \frac{c+t}{2r} w_{,\varphi} \right)^2 \right] \Bigg] r d\varphi ds - \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{\beta} q w r d\varphi ds - \frac{1}{2} N_a s_1 \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{\beta} w_{,s}^2 d\varphi ds.
\end{aligned}$$

W celu rozwiązania zagadnienia przyjmujemy następujące funkcje aproksymujące przemieszczenia:

$$\begin{aligned}
w(s, \varphi) &= A_1 r^2 \sin k\psi \sin p\varphi, \\
u_{\alpha}(s, \varphi) &= A_2 r^2 \cos k\psi \sin p\varphi, \\
u_{\beta}(s, \varphi) &= A_3 r^2 \cos k\psi \sin p\varphi, \\
v_{\alpha}(s, \varphi) &= A_4 r^2 \sin k\psi \cos p\varphi, \\
v_{\beta}(s, \varphi) &= A_5 r^2 \sin k\psi \cos p\varphi,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
k &= \frac{m\pi}{l}, \quad l = s_2 - s_1, \quad \psi = s - s_1 \\
p &= \frac{n\pi}{\beta}, \quad r = s \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Funkcje (3.8) spełniają kinematyczne warunki swobodnego podparcia brzegów powłoki

$$\begin{aligned}
w \Big|_{\substack{s=s_1 \\ s=s_2}} &= 0, \quad u_{\alpha} \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad v_{\alpha} \Big|_{\substack{s=s_1 \\ s=s_2}} = 0 \\
w \Big|_{\varphi=0} &= 0, \quad u_{\beta} \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad v_{\beta} \Big|_{\substack{s=s_1 \\ s=s_2}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Podstawiając funkcje (3.8) do wyrażenia (3.7) oraz obliczając pochodne cząstkowe energii  $W$  względem parametrów  $A_i$  (3.3), otrzymujemy następujący wyjściowy układ nieliniowych równań algebraicznych

$$W_{,A_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \tag{3.11}$$



Układ ten możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
 (a_{11} + \tilde{a}_{11}) A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3 + a_{14} A_4 + a_{15} A_5 &= \\
 = b_{11} A_1^2 + b_{12} A_1^3 + b_{13} A_1 A_2 + b_{14} A_1 A_3 + b_{15} A_1 A_4 + b_{16} A_1 A_5 + b_{17}, \\
 a_{21} A_1 + a_{22} A_2 + a_{23} A_3 + a_{24} A_4 + a_{25} A_5 &= b_{21} A_1^2, \\
 a_{31} A_1 + a_{32} A_2 + a_{33} A_3 + a_{34} A_4 + a_{35} A_5 &= b_{31} A_1^2, \\
 a_{41} A_1 + a_{42} A_2 + a_{43} A_3 + a_{44} A_4 + a_{45} A_5 &= b_{41} A_1^2, \\
 a_{51} A_1 + a_{52} A_2 + a_{53} A_3 + a_{54} A_4 + a_{55} A_5 &= b_{51} A_1^2.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ze względu na skomplikowaną budowę równań zastosowano tutaj szereg oznaczeń skracających.

Obliczone analitycznie całki po współrzędnej oznaczono  $\beta$  następującymi symbolami:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^\beta \sin^2 p\varphi d\varphi, & J_2 &= \int_0^\beta \cos^2 p\varphi d\varphi, & J_3 &= \int_0^\beta \sin^3 p\varphi d\varphi, \\
 J_4 &= \int_0^\beta \sin p\varphi d\varphi, & J_5 &= \int_0^\beta \sin^4 p\varphi d\varphi, & J_6 &= \int_0^\beta \cos^4 p\varphi d\varphi, \\
 J_7 &= \int_0^\beta \sin^2 p\varphi \cos p\varphi d\varphi, & J_8 &= \int_0^\beta \sin p\varphi \cos^2 p\varphi d\varphi, & J_9 &= \int_0^\beta \sin^2 p\varphi \cos^2 p\varphi d\varphi.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Z kolei kombinacje funkcji zmiennej  $s$ , po której całkowanie zostanie zrealizowane numerycznie, zapisano w postaci

$$\begin{aligned}
 C_1 &= s \sin^2 k\varphi, & C_2 &= s^2 \sin^2 k\varphi, & C_3 &= s^3 \sin k\varphi, \\
 C_4 &= s^3 \sin^2 k\varphi, \dots & C_{14} &= s^4 \sin^2 k\varphi \cos k\varphi, \dots \\
 C_{31} &= s^4 \sin k\varphi \cos^2 k\varphi.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wprowadzono także zależność

$$V_{k,l}(s) = \int_{s_1}^{s_2} F_k(s) C_l(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots, 5, \quad l = 1, 2, \dots, 31, \tag{3.15}$$

gdzie  $F_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  są elementami macierzy sztywności (1.13) oraz  $F_5 = 1$ . Dodatkowo oznaczono

$$z_1 = \frac{c+t}{2}, \quad z_2 = \frac{t^2}{12}, \quad z_3 = 4 \frac{G_3}{c}. \tag{3.16}$$

Przy wykorzystaniu oznaczeń (3.13), (3.15), (3.16) poszczególne współczynniki  $a_{ij}$  i  $b_{ij}$  równań (3.12) mają postać

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 2 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha J_1 V_{4,4} + 2z_2 [J_1 (\sin^5 \alpha (4V_{1,1} + 16kV_{1,11} - 4k^2V_{1,4} - 8k^3V_{1,13} + \\
 &+ 16k^2V_{1,23} + k^4V_{1,8} + 8V_{2,1} + 20kV_{2,11} - 4k^2V_{2,4} - 2k^3V_{2,13} + 4k^2V_{2,23} + \\
 &+ 4V_{4,1} + 2kV_{4,11} + k^2V_{4,23}) + \sin^3 \alpha p^2 (-4V_{2,1} - 8kV_{2,11} + 2k^2V_{2,4} - 4V_{4,1} + \\
 &+ 2kV_{4,11}) + \sin \alpha p^4 V_{4,1}) + 4J_2 \sin^3 \alpha p^2 (V_{3,1} + 2kV_{3,11} + k^2V_{3,23})] + z_3 \sin^3 \alpha \times \\
 &\times z_1^2 [J_1 \sin^2 \alpha (4V_{5,4} + 4kV_{5,13} + k^2V_{5,25}) + J_2 p^2 V_{5,4}],
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= -N_a s_1 J_1 \sin^5 \alpha (4V_{5,2} + 4kV_{5,12} + k^2 V_{5,24}), \\
a_{12} &= a_{21} = \sin^4 \alpha \cos \alpha J_1 (-4V_{2,12} - 2A_0 V_{4,12} + 2kV_{2,6}) + \sin^2 \alpha \cos \alpha p J_2 z_2 (2V_{3,28} - \\
&\quad - 2kV_{3,29}), \dots \\
b_{11} &= 3 \sin^4 \alpha \cos \alpha [\sin^2 \alpha J_3 (4V_{2,7} + 4kV_{2,16} + k^2 V_{2,17}) + p^2 J_8 V_{4,7}], \quad [\text{cd.}] \\
b_{12} &= -\sin^5 \alpha [\sin^4 \alpha J_5 (16V_{1,10} + 32kV_{1,19} + 24k^2 V_{1,21} + k^4 V_{1,27}) + p^4 J_6 V_{4,10} + \\
&\quad + \sin^2 \alpha p^2 (8V_{2,10} + 8kV_{2,19} + 2k^2 V_{2,21} + 16kV_{3,19} + 4k^2 V_{3,21} + 16V_{3,10} + \\
&\quad + 8 \sin^4 \alpha J_5 k^3 V_{1,22})], \dots
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Powyżej zamieszczono jedynie kilka spośród współczynników  $a_{ij}$  i  $b_{ij}$  z uwagi na ich rozbudowaną strukturę.

Zapis kombinacji współczynników  $a_{ij}$  oraz  $b_{ij}$  przedstawimy przy pomocy funkcji  $\bar{g}$ ,

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}, r) = \sum_{i=2}^5 \left( \bar{x}_{1(i+r)} \left\{ \sum_{j=1}^4 (-1)^{i+j} \bar{y}_{(j+1)1} d_{ij} \right\} \right), \tag{3.18}$$

gdzie wyrażenia  $d_{ij}$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  są minorami wyznacznika  $W_1$ , powstałym w wyniku wykreślenia  $(i-1)$ -szej kolumny oraz  $j$ -tego wiersza:

$$W_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

Rozwiązując układ (3.12) względem parametru funkcji ugięcia  $A_1$ , otrzymujemy równanie stateczności w postaci

$$q = \frac{e_1 A_1 + e_2 A_1^2 + e_3 A_1^3}{e_1 \kappa A_1 + e_5}, \quad N_a = q s_1 \kappa, \tag{3.20}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
e_1 &= a_{11} + W_1^{-1} \bar{g}(a, a, 0), \\
e_2 &= -b_{11} - W_1^{-1} (\bar{g}(a, b, 0) + \bar{g}(b, a, 1)), \\
e_3 &= -b_{12} + W_1^{-1} \bar{g}(b, b, 1), \\
e_4 &= s_1^2 \sin^5 \alpha J_1 (4V_{5,2} + 4kV_{5,12} + k^2 V_{5,24}), \\
e_5 &= \sin^3 \alpha J_4 W_{5,3}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

#### 4. Obliczenia numeryczne i wnioski

Efektom działania programu obliczeń numerycznych jest uzyskanie wartości obciążenia poprzecznego  $q$  (oraz siły wzdłużnej  $N$ ) w funkcji ugięcia powłoki, według równania (3.20). Ze względu na uwikłaną postać tej zależności (obciążenie  $q$  tkwi m.in. w elementach lokalnej macierzy sztywności) obliczenia przeprowadzono iteracyjnie. Na każdym kroku obliczeniowym ścieżki równowagi przyjmowano pewną wartość początkową obciążenia  $q_x$ . Umożliwiło to wyznaczenie współczynników sztywności i otrzymanie równania o znanych współczynnikach,

$$q = q(x), \tag{4.1}$$

gdzie ugięcie reprezentuje parametr  $A_1$  (4.1). Ostatecznie jako  $q$  przyjmowano wartość spełniającą warunek,

$$|q - q_x| < \varepsilon_q, \quad (4.2)$$

gdzie  $\varepsilon_q$  oznacza założoną dokładność obliczeń. Kolejne przybliżenia wartości  $q$  ustalano w oparciu o metodę „regula falsi”. Uproszczony algorytm obliczeń przedstawiono na rys. 3, gdzie

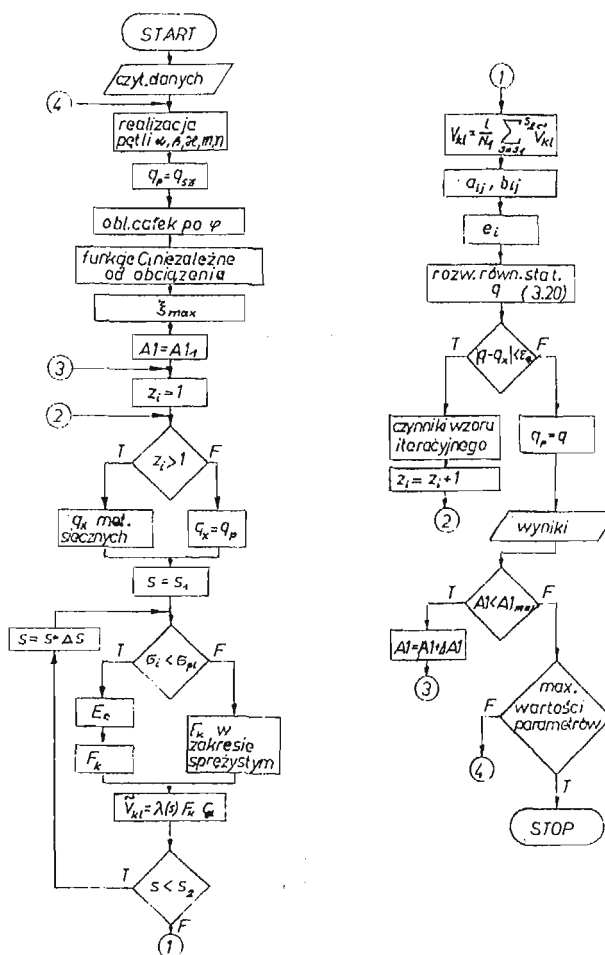
$N_1$  — ilość kroków całkowania,

$\lambda$  — współczynnik całkowania, zależny od przyjętej metody (stosowano metodę trapezów),

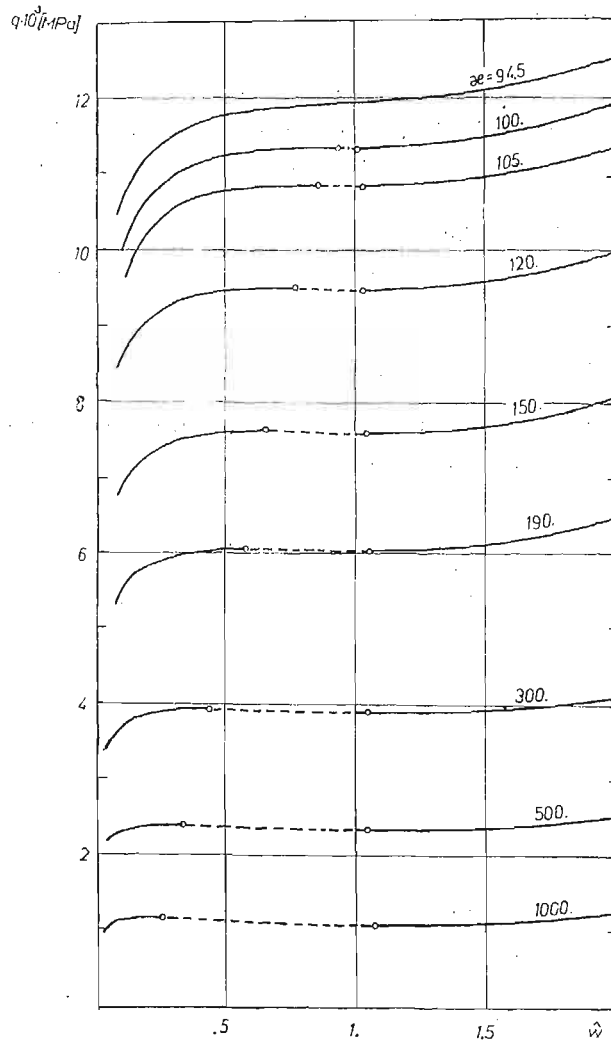
$\xi_{max}$  — parametr ugięcia,

$$\xi_{max} = \text{MAX} |s^2 \sin^2 \alpha \sin k\varphi|. \quad (4.3)$$

program napisano w języku FORTRAN, a obliczenia przeprowadzono na komputerach SM-1 oraz ODRA-1305. Jako dane podstawowe przyjęto:



Rys. 3.



Rys. 4.

a) stałe materiałowe

$E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa,  $E_k = 3 \cdot 10^4$  MPa,  $\sigma_{pl} = 240$  MPa,  $\nu = 0,3$ ,  $G_3 = 25$  MPa,

b) stałe geometryczne:

$r_s = 1,3$  m,  $L = 0,8$  m,  $t = 0,002$  m,  $c = 0,003$  m,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\beta = 0,5$ ,

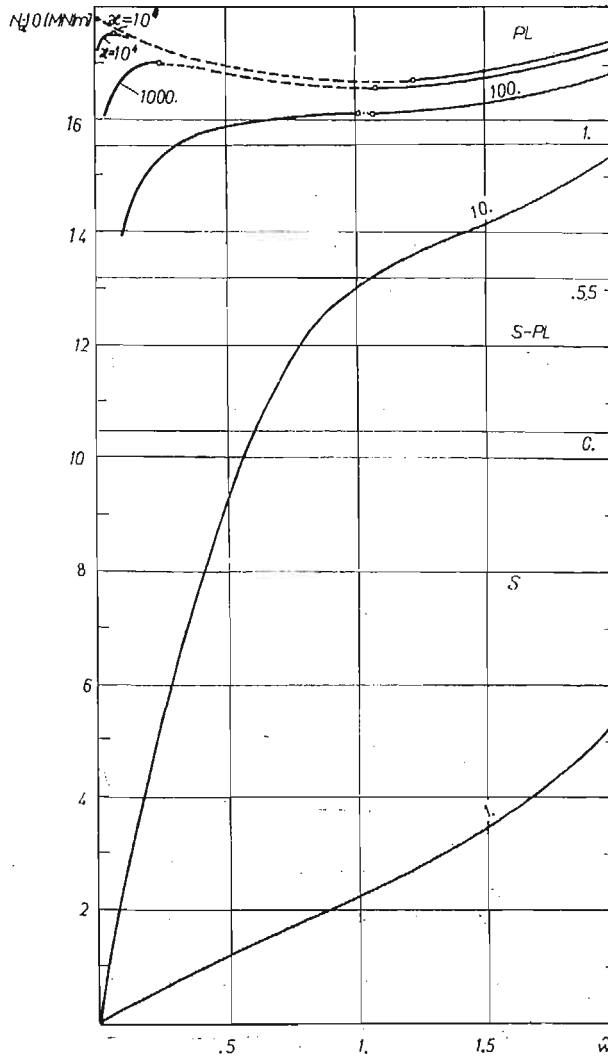
gdzie  $r_s$  — promień średni,

c) parametry:

$\kappa = 1000$ ,  $N_1 = 20$ ,  $m = n = 1$ ,  $A_0 = 1$ .

Podstawę analizy stanowią wykresy zależności obciążenia od względnego ugięcia powłoki  $w$ , odniesionego do jej całkowitej grubości

$$w = \frac{w_{\max}}{2t+c}, \quad w_{\max} = A_1 \xi_{\max}. \quad (4.4)$$



Rys. 5.

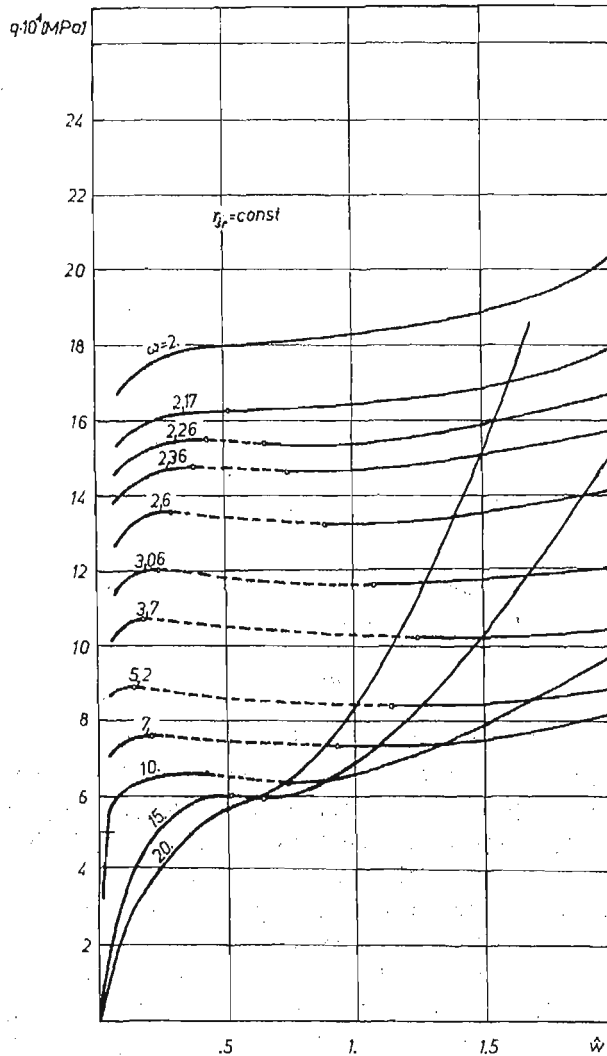
Obszar niestateczny zaznaczono na wykresach linią przerywaną. Początek tego obszaru stanowi górne obciążenie krytyczne  $q_+^*$ ; koniec — dolne obciążenie krytyczne  $q_-^*$ . Rysunki, na których w istotnej proporcji, oprócz obszaru plastycznego występuje obszar sprężysty lub sprężysto-plastyczny, zaopatrzone dodatkowo w linie opisane liczbami, oznaczającymi stopień uplastycznienia liczony wzdłuż tworzącej powłoki.

Stosunek obciążeń, wyrażony przez współczynnik  $\kappa$ , wywiera zasadniczy wpływ na postać wybożenia powłoki. Na rys. 4 przedstawiono krzywe obrazujące przebieg utraty stateczności dla różnych wartości  $\kappa$ . Dla małych wartości  $\kappa$  krzywe  $q(\hat{w})$  i  $N_a(\hat{w})$  wykazują jedynie przegięcie i każde obciążenie daje w tym przypadku stany stateczne. Powyżej pewnej wartości granicznej ( $\kappa \cong 95$ ), dla której  $q_+^* = q_-^*$ , pojawia się obszar niestateczny, który przy dalszym wzroście  $\kappa$  rozszerza się, a jego początek występuje przy coraz mniej-

szych ugięciach. Jednocześnie obciążenia krytyczne  $q^*$  maleją, a krytyczne siły wzdłużne rosną. Powyżej pewnej wartości ( $\kappa = 10^4$ ) ścieżki równowagi nie odbiegają istotnie od krzywej granicznej, odpowiadającej przypadkowi działania na powłokę jedynie siły wzdłużnej ( $\kappa = \infty$ ). Jak wynika z rys. 5, utrata stateczności następuje po całkowitym uplastycznieniu powłoki.

Rys. 6 przedstawia przebieg utraty stateczności powłoki przy różnym stosunku promienia średniego wycinka stożkowego do długości tworzącej  $\omega = \frac{2r_s}{l}$  ( $r_s = \text{const}$ ).

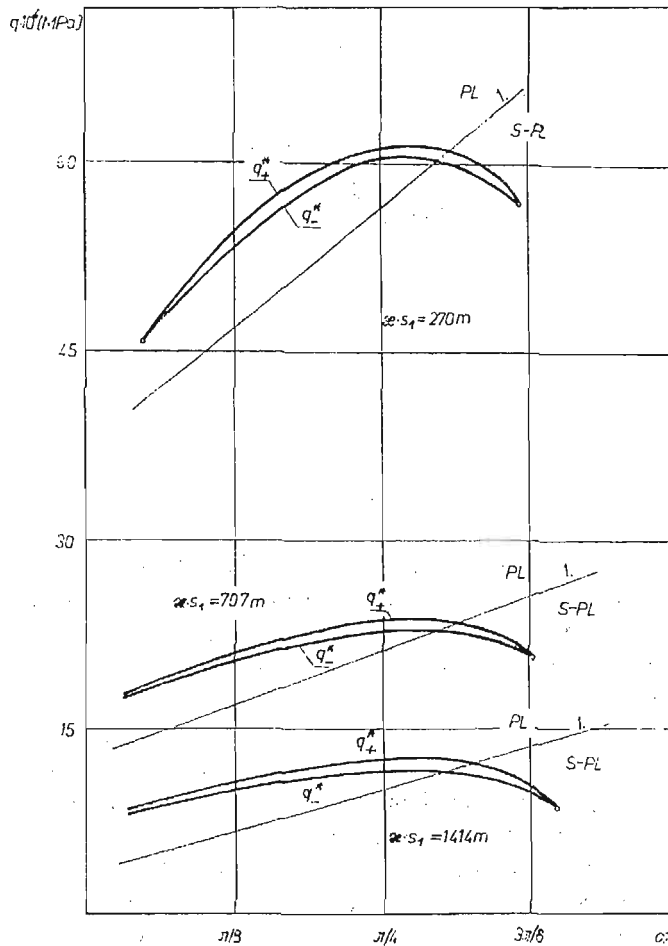
Charakterystyczną cechą rodziny krzywych  $q(\hat{w})$  jest tutaj występowanie dwóch krzywych granicznych: górnej i dolnej. Przy wzroście  $\omega$  obciążenia krytyczne  $q_+^*$  i  $q_-^*$  maleją, natomiast ich różnica, jak również przedział ugięć niestatecznych, najpierw nieliniowo wzrastają



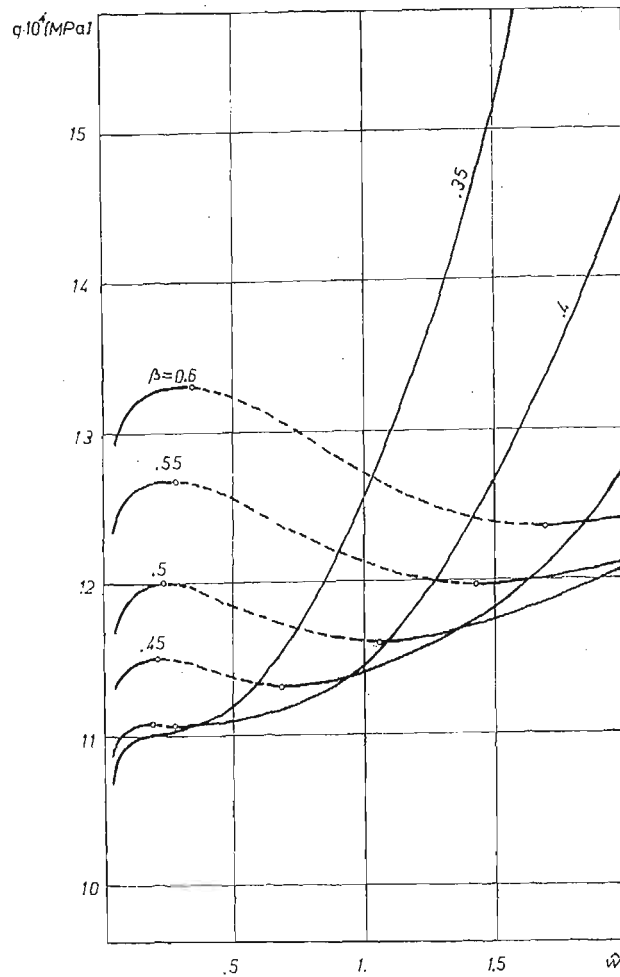
Rys. 6.

do określonej wartości maksymalnej, a potem maleją. Porównanie dwóch wariantów zmienności  $\omega$  (przy  $r_s = \text{const}$  i przy  $l = \text{const}$ ) dało analogiczne wartości  $\omega$ , odpowiadające krzywym granicznym, a także pozwoliło stwierdzić, iż powłoki o większych rozmiarach ulegały wyboczeniu przy niższych obciążeniach krytycznych.

Analiza przebiegu wyboczenia powłoki związana ze zmianą kąta  $\alpha$  (rys. 7) została przeprowadzona przy zachowaniu stałej wartości pola powierzchni bocznej powłok ( $r_s = \text{const}$ ,  $l = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ ). Ponieważ założenie takie powoduje odpowiednią zmianę wartości  $s_1$ , dla zachowania stałej wartości stosunku obciążeń w badaniu tego przypadku, zapewniono  $\kappa s_1 = \text{const}$ . Obliczenia przeprowadzono dla trzech wariantów, które zestawiono na wykresie 7. Występuje duże podobieństwo odpowiednich charakterystyk. Dla kątów  $\alpha$  bardzo małych lub bliskich  $\pi/2$  brak jest obszarów niestatecznych. Obciążenia krytyczne mają maksimum dla pewnych kątów pochylenia tworzącej, które przy wzroście iloczynu  $\kappa s_1$  nieznacznie przesuwają się w stronę większych wartości  $\alpha$ . Pomimo przebadania stosunkowo niewielkiego zakresu zmienności kąta  $\beta$  ( $20 \div 35^\circ$ ) zaobserwowano



Rys. 7.



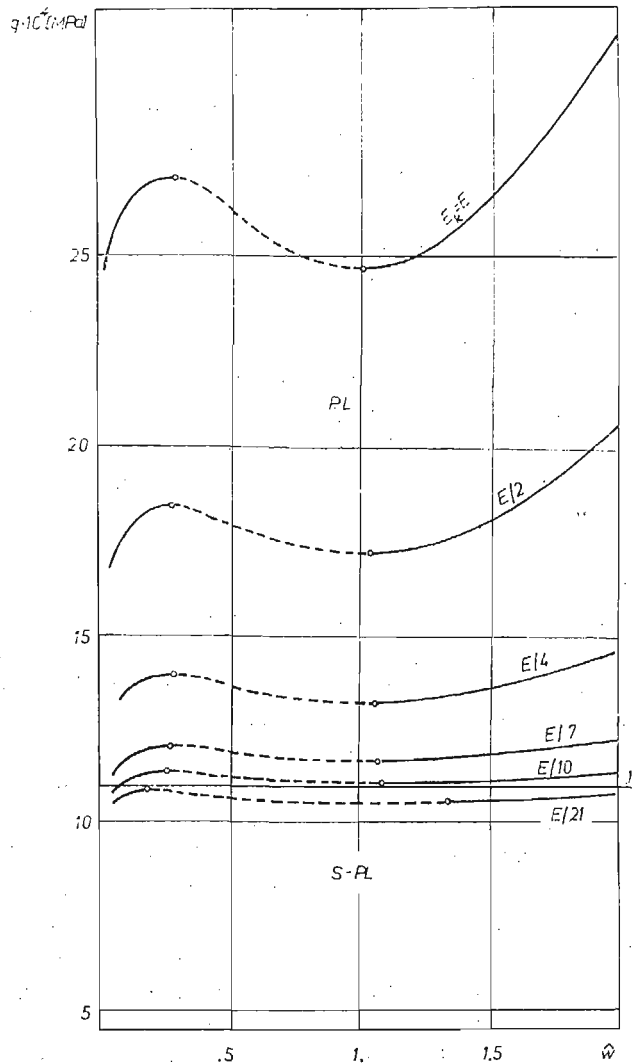
Rys. 8.

duże zróżnicowanie przebiegu funkcji  $q(\hat{w})$  (rys. 8). Dla małych wartości  $\beta$  występuje stan stateczny. Po przekroczeniu wartości granicznej ( $\beta \cong 22^\circ$ ) pojawiają się obszary niestateczne, które ze wzrostem  $\beta$  rozszerzają się, chociaż ich początek odpowiada coraz większym ugięciom. Jednocześnie rosną zarówno obciążenia krytyczne, jak i różnica pomiędzy górnym i dolnym obciążeniem krytycznym.

Na kolejnym wykresie (rys. 9) przedstawiono analizę wpływu modułu stycznego  $E_t$  na przebieg wyboczenia powłoki. Górna krzywa na wykresie odpowiada analizie powłoki sprężystej. Zmniejszając wartość modułu stycznego, obserwuje się spadek obciążeń krytycznych oraz rozszerzenie obszaru niestateczności.

Oprócz wyników przedstawionych na zamieszczonych wykresach, przebadano również wpływ innych parametrów na przebieg utraty stateczności powłoki. Stwierdzono liniowy wzrost obciążeń krytycznych w miarę zwiększania się grubości warstw nośnych w stosunku do całkowitej grubości powłoki lub przy wzroście granicy plastyczności. Uwzględnienie





Rys. 9.

sztynności ścinania warstwy wypełniającej doprowadziło do wzrostu obciążeń krytycznych rzędu 8% (porównano przypadki  $G_3 = 80$  MPa i  $G_3 = 0$ ). Wpływ zmian liczby Poissona w zakresie  $0,25 \leq \nu \leq 0,5$  okazał się znikomy. Również nieistotny okazał się wpływ dodatkowych członów w związkach geometrycznych (opatrzonych współczynnikiem  $A_0$ ) na wartości obciążeń krytycznych.

Przedstawiona w pracy metoda rozwiązania zagadnienia stateczności sprężysto-plastycznej trójwarstwowej powłoki jest metodą analityczno-numeryczną, gdzie komputer wykorzystano w końcowym etapie do iteracyjnego obliczania ścieżki równowagi, gdyż w odróżnieniu od analogicznego zagadnienia sprężystego uzyskanie rozwiązania w postaci zamkniętej jest niemożliwe — głównie z uwagi na nieliniowość geometryczną i niejednorodność

stanu naprężenia. Przyjęcie koncepcji Shanleya zapewniło stosunkowo prostą budowę związków wyjściowych, co byłoby niemożliwe przy uwzględnieniu procesów biernych (podejście Engessera-Kármána). Przedstawienie wyników pracy jest zwarte, a opracowany algorytm umożliwia stosunkowo łatwe wykorzystanie wyników w praktyce inżynierskiej i nie wymaga maszyn cyfrowych o dużej pamięci operacyjnej, jaka jest potrzebna na przykład w metodzie elementów skończonych (MES). Czas obliczeń nawet przy dużej liczbie iteracji nie jest wielki. Nadmienić tutaj należy, że zastosowanie metody elementów skończonych w zagadnieniach nieliniowych geometrycznie z uwzględnieniem odkształceń plastycznych dla powłok wielowarstwowych jest trudne i dotychczas istnieje niewiele prac zajmujących się tym problemem. Poza tym rozwiązania te są mało ogólne, gdyż w małym stopniu korzystają ze standardowego oprogramowania. W metodzie elementów skończonych dąży się ostatnio z jednej strony do opracowania efektywnych algorytmów (konieczność skracania czasu obliczeń, który z reguły w zagadnieniach nieliniowych jest znacznie dłuższy niż w liniowych), z drugiej zaś do podwyższenia dokładności obliczeń. Przy obliczaniu nieliniowych ścieżek równowagi istotną rolę spełnia przyjęcie odpowiedniego niezależnego parametru sterującego. W analizie liniowej jest to parametr obciążenia. Sterowanie obciążeniowe nie może być wogóle stosowane w otoczeniu punktów krytycznych, gdzie macierz styczna sztywności  $\mathbf{K}$  jest słabo uwarunkowana, a nawet osobliwa. Stosowanie z kolei sterowania nieobciążeniowego jest w metodzie elementów skończonych dość kłopotliwe, gdyż wymaga modyfikacji standardowych procedur. Istnieje tu ponadto problematyka dyskretyzacji konstrukcji i aproksymacji wewnątrz elementów skończonych. W problemach nieliniowych, a zwłaszcza przy badaniu stateczności, można popełniać dość duże błędy przez eliminację drugorzędnych stopni swobody. Wyniki niniejszej pracy mają charakter ogólny i mogą być również wykorzystane do testowania rozwiązań uzyskanych w oparciu o MES. Poprawność wyprowadzonych związków zbadano przez porównanie wyników z rezultatami uzyskanymi dla powłoki jednowarstwowej [5]. W tym celu przyjęto do obliczeń grubość warstwy nośnej równą połowie grubości powłoki jednowarstwowej, natomiast grubość warstwy środkowej równą zeru. Przyjęcie odpowiednich danych umożliwiło także sprowadzenie obliczeń do rozwiązania sprężystego. Uzyskane wyniki wykazały zgodność z pracą [7] poświęconą zagadnieniu wyboczenia analogicznej powłoki w zakresie czysto sprężystym.

Przeprowadzona analiza i obliczenia numeryczne mogą posłużyć, w projektowaniu powłok stożkowych, do doboru właściwych parametrów geometrycznych i fizycznych, w celu uniknięcia powstawania niestatecznych stanów pokrytycznych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. BUSHNELL, *Plastic buckling of various shells*, Journ. of Pressure Vessel Technology, Vol. 104, May, 1982.
2. S. GELLIN, *Effect of an axisymmetric imperfections on the plastic buckling of an axially compressed cylindrical shell*, Trans. ASME, 1, 46, 1979.
3. E. I. GRIGOLUK, *Buckling of sandwich constructions beyond the elastic limit*, Journ. Mech. Ph. Sol., 6, 1968.
4. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa, 1976.

5. J. MACIEJEWSKI, J. ZIELNICA, *Nieliniowe zagadnienie stateczności powłoki o postaci wycinka stożkowego w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozprawy Inżynierskie, **32**, 3, 1984.
6. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Об устойчивости за пределом упругости слоистых оболочек несимметрического сечения*, Мех. Тв. Тела, **4**, 1966.
7. R. STRUK, *Non-linear Stability Problem of an Open Conical Shell Under External Pressure and Axial Compression*, Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. XIX, No. 3, 1984.
8. А. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, М., 1967.
9. J. ZIELNICA, *Wyboczenie trójwarstwowej powłoki stożkowej poza zakresem sprężystym*, Rozprawy Inżynierskie, **29**, 3, 453 - 475, 1981.
10. J. ZIELNICA, *Elastic-Plastic Buckling of Sandwich Conical Shells Under Axial Compression and External Pressure*, Bull. Acad. Pol. Sci., Série des sciences techniques, Vol. XXIX, 11 - 12, pp. 239 - 251, 1981.

## Р е з ю м е

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

В работе определяются верхние и нижние критические нагрузки и анализируется потеря устойчивости для свободно опертой трехслойной конической оболочки нагруженной продольными усилиями и внешним давлением. Полагается, что во время потери устойчивости несущие слои упругие или пластические, а наполнитель остается упругим. Задача решена методом Ритца. Уравнения получены с использованием физических соотношений деформационной теории пластичности и концепции продольяющего нагружения Шенли-Работнова. Итерационный алгоритм решения позволяет анализировать пути равновесия для упругих, упруго-пластических или пластических оболочек. Представлены числовые примеры в которых рассмотрено влияние физических и геометрических параметров на потерю устойчивости при больших прогибах.

## S u m m a r y

## GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEM OF AN ELASTIC-PLASTIC OPEN SANDWICH CONICAL SHELL

In the paper the upper and lower critical loads are investigated, and also stability loss is analysed for an open sandwich conical shell loaded by longitudinal forces and uniformly distributed external pressure. It is assumed that the shell faces are elastic or plastic in the moment of buckling, and the core remains elastic. The problem is solved by the Ritz method. The equations are derived on the basis of deformation theory of plasticity using the concept of the growing load (Shanley). An iterative algorithm of calculation has been elaborated, which make it possible to analyse the shells in elastic, elastic-plastic or in totally plastic prebuckling state of stresses. The numerical examples show the influence of principal geometrical and physical shell's parameters on the stability loss at large deflections.

*Praca została złożona w Redakcji 29 października 1984*