MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3-4, 23 (1985)

STATECZNOŚĆ SPIRALNA SAMOLOTU W RUCHU PRZESTRZENNYM Z UWZGLĘDNIENIEM EFEKTÓW ELEMENTÓW WIRUJĄCYCH ZESPOŁU NAPĘDOWEGO*

JERZY MARYNIAK, WITOLD MOLICKI (WARSZAWA)

ITLIMS Politechnika Warszawska

1. Wyprowadzenie równań ruchu samolotu

Ruch samolotu w przestrzeni opisano stosując następujące układy odniesienia (rys. 1):

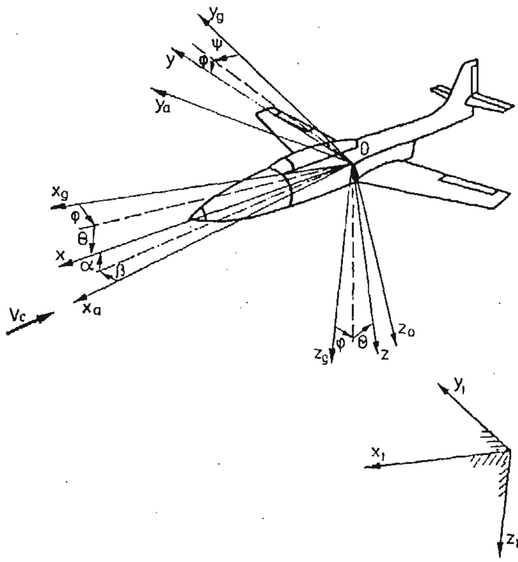
$OXYZ$ — układ „samolotowy" sztywno związany z poruszającym się samolotem,

$OX_aY_aZ_a$ — układ „prędkościowy" związany z kierunkiem przepływu,

$OX_gY_gZ_g$ — układ grawitacyjny związany z poruszającym się samolotem równoległy do układu $OX_1Y_1Z_1$.

$OX_1Y_1Z_1$ — nieruchomy układ grawitacyjny związany z ziemią.

Dodatkowo wprowadzono układ współrzędnych $CX_rY_rZ_r$ związany z silnikiem. Początek C układu umieszczony jest w środku masy zespołu turbina — sprężarka, oś X_r skierowana

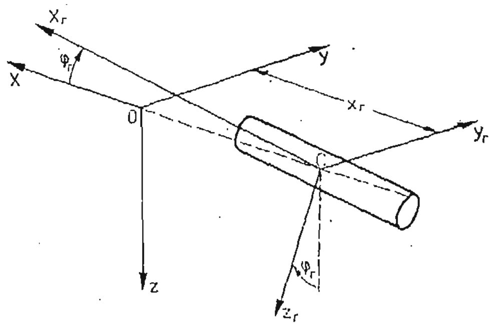


Rys. 1.

*) Praca przedstawiona na I Ogólnopolskiej Konferencji. *Mechanika w Lotnictwie.* Warszawa 19.I.1984.

jest wzdłuż osi obrotu zespołu ku przodowi płatowca, oś Z_r leży w płaszczyźnie symetrii samolotu i jest skierowana ku spodowi płatowca, zaś oś Y_r tworzy z dwoma poprzednimi prawoskrętny układ kartezjański (rys. 2). Przyjęto, że środek masy zespołu turbina-sprężarka leży w odległości x_r od początku układu $OXYZ$, a oś X_r tworzy z osią X kąt φ_r. Dla tak przyjętych układów współrzędnych macierz prędkości kątowej $\mathbf{\Omega}$ silnika w układzie $OXYZ$ ma postać:

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{col}[P+\omega_r\cos\varphi_r, Q, R-\omega_r\sin\varphi_r], \tag{1}$$



Rys. 2.

gdzie: ω_r — prędkość kątowa zespołu wirującego w układzie $CX_rY_rZ_r$,
P, Q, R — prędkości kątowe samolotu w układzie $OXYZ$.

Macierz prędkości liniowych środka masy zespołu wirującego w układzie $OXYZ$ ma postać:

$$\mathbf{V} = \mathrm{col}[U, V-Rx_r, W+Qx_r], \tag{2}$$

gdzie: U, V, W — prędkości środka masy samolotu w układzie $OXYZ$. Samolot potraktowano jako ciało o siedmiu stopniach swobody, bez uwzględniania drgań powierzchni sterowych. Jako siódmy stopień swobody przyjęto ruch obrotowy zespołu turbina-sprężarka wokół własnej osi.

Dynamiczne równania ruchu samolotu w przestrzeni wyprowadzono stosując równania Boltzmana-Hamela [2, 3]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\omega_\mu}\right)-\frac{\partial T^*}{\partial\pi_\mu}+\sum_{r=1}^{k}\sum_{\alpha=1}^{k}\gamma^r_{\alpha\mu}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_r}\omega_\alpha = Q^*_\mu, \tag{3}$$

gdzie: T^* — energia kinetyczna układu wyrażona w quasi-współrzędnych i quasi-prędkościach,
$\gamma^r_{\alpha\mu}$ — trójwskaźnikowe symbole Boltzmanna,
Q^*_μ — siły uogólnione wyrażone w quasi-współrzędnych i quasi-prędkościach.

Jako współrzędne uogólnione przyjęto:

$q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = z_1$ — odległości środka masy samolotu od początku układu współrzędnych $OX_1Y_1Z_1$,

$q_4 = \Phi$, $q_5 = \theta$, $q_6 = \Psi$ — kąty przechylenia, pochylenia i odchylenia samolotu mierzone od nieruchomego układu współrzędnych związanego z samolotem $OX_gY_gZ_g$ do ruchomego sztywno związanego z samolotem układu $OXYZ$,

$q_7 = \varphi_w$ — kąt obrotu zespołu wirującego turbina-sprężarka.

Przyjmując zależności (1 - 3) otrzymano [7] równania ruchu samolotu w locie przestrzennym uwzględniające oddziaływania elementów wirujących zespołu napędowego:

$$\dot{U}m+QWm-RVm+R^2m_rx_r+Q^2m_rx_r = X^*; \qquad \text{(a)}$$

$$\dot{V}m-\dot{R}m_rx_r-(PW-RU)m-PQm_rx_r = Y^*; \qquad \text{(b)}$$

$$\dot{W}m+\dot{Q}m_rx_r-(QU-PV)m-PRm_rx_r = Z^*; \qquad \text{(c)}$$

$$\begin{aligned}&\dot{P}(J_x+J_{xr}\cos^2\varphi_r+J_{zr}\sin^2\varphi_r)-\dot{R}[J_{xz}+(J_{xr}-J_{zr})\sin\varphi_r\cos\varphi_r]-\dot{Q}J_{xy}+\\&+\dot{n}\frac{\pi}{30}J_{xr}(\cos^3\varphi_r+\sin^2\varphi_r\cos\varphi_r)+(R^2-Q^2)J_{yz}-QR(J_y-J_z+J_{yr})+\\&-J_{zr}\cos^2\varphi_r-J_{xr}\sin^2\varphi_r+m_rx_r^2)-PQ[J_{xz}+(J_{xr}-J_{zr})\sin\varphi_r\cos\varphi_r]+\\&+PRJ_{xy}+Qn\frac{\pi}{30}J_{xr}(\sin^3\varphi_r+\cos^2\varphi_r\sin\varphi_r) = L^*; \qquad \text{(d)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\dot{Q}(Jy+Jy_r+2m_rx_r^2)+\dot{W}m_rx_r-\dot{P}J_{xy}-\dot{R}J_{yz}+(P^2-R^2)[J_{xz}+\\&+(Jx_r-Jz_r)\sin\varphi_r\cos\varphi_r]+PQJ_{yz}-RQJ_{xy}-PR[J_z-J_x-J_{xr}(\cos^2\varphi_r+\\&-\sin^2\varphi_r)-Jz_r(\sin^2\varphi_r-\cos^2\varphi_r)+m_rx_r^2]+(PV-QU)m_rx_r+\\&+nR\frac{\pi}{30}Jx_r(\cos^3\varphi_r+\sin^2\varphi_r\cos\varphi_r)+nP\frac{\pi}{30}Jx_r(\sin^3\varphi_r+\cos^2\varphi_r\sin\varphi_r) = M^*; \qquad \text{(e)}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\dot{R}(J_z+J_{zr}\cos^2\varphi_r+Jx_r\sin^2\varphi_r+m_rx_r)-\dot{P}[J_{xz}+(Jx_r-Jz_r)\sin\varphi_r\cos\varphi_r]+\\&-\dot{Q}J_{yz}-\dot{V}m_rx_r-\dot{n}\frac{\pi}{30}Jx_r(\sin^3\varphi_r+\cos^2\varphi_r\sin\varphi_r)+(Q^2-P^2)J_{xy}+\\&-PQ(J_x-J_y+J_{xr}\cos^2\varphi_r+I_{zr}\sin^2\varphi_r-J_{yr}-2m_rx_r^2)+QR[J_{xz}+\\&+(J_{xr}-I_{zr})\sin\varphi_r\cos\varphi_r]-PRJ_{yz}+(PW-UR)m_rx_r+\\&-Qn\frac{\pi}{30}J_{xr}(\cos^3\varphi_r+\sin^2\varphi_r\cos\varphi_r) = N^*; \qquad \text{(f)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\dot{n}J_{xr}(\sin^2\varphi_r+\cos^2\varphi_r)^2-\dot{R}J_{xr}(\sin\varphi_r+\cos^2\varphi_r\sin\varphi_r)+\\&+\dot{P}J_{xr}(\cos^3\varphi_r+\sin^2\varphi_r\cos\varphi_r) = n^*; \qquad \text{(g)}\end{aligned}$$

Dodatkowo uwzględniono:

— związki kinematyczne prędkości liniowych

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= U\cos\theta\cos\psi+V(\sin\phi\sin\theta\cos\psi-\cos\phi\sin\psi)+\\&+w(\cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi),\\ \dot{y}_1 &= U\cos\theta\sin\psi+V(\sin\phi\sin\theta\sin\psi+\cos\phi\cos\psi)+\\&+w(\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi),\\ \dot{z}_1 &= -U\sin\theta+V\sin\phi\cos\theta+w\cos\phi\cos\theta;\end{aligned} \qquad (5)$$

— związki kinematyczne prędkości kątowych

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= P+Q\sin\phi\,\mathrm{tg}\,\theta+R\cos\phi\,\mathrm{tg}\,\theta,\\ \dot{\theta} &= Q\cos\phi-R\sin\phi,\\ \dot{\psi} &= Q\sin\phi\sec\theta+R\cos\phi\sec\theta,\end{aligned} \qquad (6)$$

— zmianę kąta natarcia α, kąta ślizgu β, prędkości liniowej samolotu v_c, oraz gęstości powietrza ϱ:

$$\alpha = \arcsin\frac{w}{\sqrt{u^2+w^2}}; \quad \beta = \arcsin\frac{v}{V_c}; \quad V_c^2 = U^2+v^2+W^2; \tag{7}$$
$$\varrho = \varrho_0(1+z_1/44300)^{4,256} \quad \text{dla} \quad h = -z_1 \leqslant 11 \text{ km}.$$

Prawe strony równań (4) określono następująco [4, 5]

$$\begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{bmatrix} = \Lambda_{BW}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} L^* \\ M^* \\ N^* \end{bmatrix} = \Lambda_{BW}\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}; \quad n^* = -\frac{nJx_r}{\tau_2}; \tag{8}$$

gdzie X, Y, Z, L, M, N — oznaczają siły i momenty działające na samolot. Wyrażenia te wyprowadzone w układzie „prędkościowym" mają postać [8]:

$$\begin{aligned}
X &= -P_x+P_s\cos(\varphi_r+\alpha)-(P_{xH}+P_{xv})\cos\varepsilon-P_{zH}\sin\varepsilon-P_{yv}\sin(\beta_0+\delta)\cos\varepsilon-mg\sin\theta,\\
Y &= P_y+P_{sy}+P_{yv}\cos(\beta_0+\delta)-mV_A^2/R+Y_r+mg\cos\theta\sin\phi,\\
Z &= -P_z-P_s\sin(\varphi_r+\alpha)-P_{zH}\cos\varepsilon+(P_{xH}+P_{xv})\sin\varepsilon+mg\cos\theta\cos\phi,\\
L &= L_{\delta v}+L_{\delta L}+L_v+L_r+L_Q+L_T;\\
M &= M_{bH}-P'_{zH}X_{AH}+P'_{xH}Z_{AH}+P_{xv}\sin(\alpha-\varepsilon)z_{Av}+M_Q+M_T,\\
N &= N_{\delta v}+N_v+N_r+N_Q+N_T,
\end{aligned} \tag{9}$$

Λ_{BW} — oznacza macierz transformacji z układu „prędkościowego" do układu „samolotowego" i przedstawia się następująco:

$$\Lambda_{BW} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix}; \tag{10}$$

τ_2 — stała czasowa silnika turboodrzutowego σ mająca postać:

$$\tau_2 = \Bigg[(1.269-0,703\ \text{Ma})-(2,978-1,961\ \text{Ma})\left(\frac{n}{10^3\sqrt{T_H}}\right)+(1,82+$$
$$-1,333\ \text{Ma})\left(\frac{n}{10^3\sqrt{T_H}}\right)^2\Bigg]\left[1+0,3\left(\frac{Q(t-\tau_0)-Q_0}{Q_0}\right)^2\right]\frac{\sqrt{T_H}}{P_H}, \tag{11}$$

gdzie Q_0 — charakterystyka statyczna silnika $Q_0 = f(n)$:

$$Q_0 = \left[-57,1+387\left(\frac{n}{10^3\sqrt{T_H}}\right)-704\left(\frac{n}{10^3\sqrt{T_H}}\right)^2+475\left(\frac{n}{10^3\sqrt{T_H}}\right)^3\right]\times$$
$$\times\left[1+1,88\ \text{Ma}\left(\left(\frac{n}{10^3\sqrt{T_H}}\right)-0,9\right)\right]P_H\sqrt{T_H}, \tag{12}$$

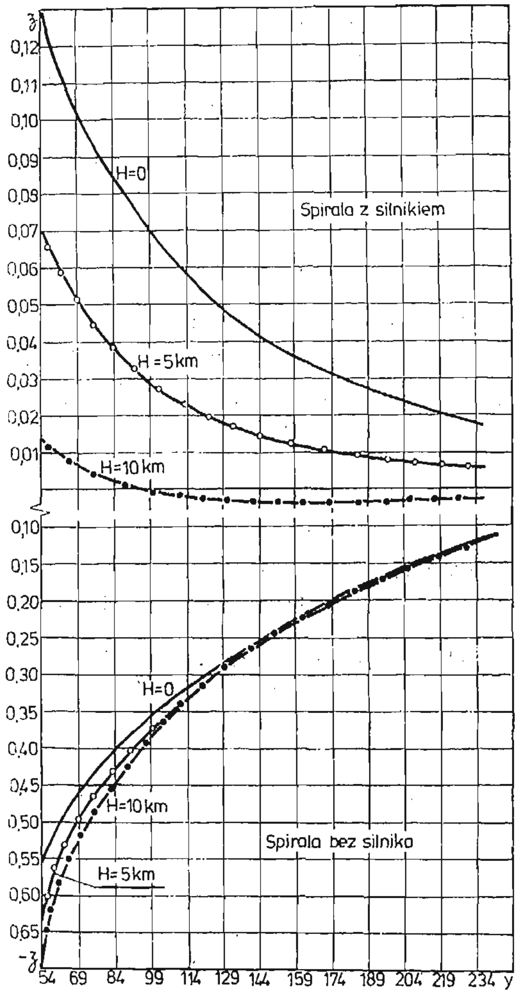
τ_0 — stała czasowa $\tau_0 = f(n)$,

$$\tau_0 = \frac{0,094-0,0196\left(\frac{n}{10^3\sqrt{T_H}}\right)+0,106\left(\frac{n}{10^3\sqrt{T_H}}\right)^2}{1+0,2\left(\frac{|Q_0(t-\tau_0)-Q_0|}{Q_0}\right)}\frac{\sqrt{T_H}}{P_H}, \tag{13}$$

P_h, T_h — ciśnienie i temperatura powietrza na wysokości H nad poziomem morza,
Ma — liczba Macha dla danej prędkości i wysokości lotu.

2. Badanie stateczności spiralnej samolotu w ruchu przestrzennym

Otrzymany układ równań (4÷7) zlinearyzowano stosując metodę małych zakłóceń wokół położenia równowagi. Otrzymano układ trzynastu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Układ ten poddano analizie modalnej w celu wnioskowania o jego stateczności. Wyniki obliczeń numerycznych dla postaci ruchu nazywanego spiralą przedstawiono



Rys. 3.

na rysunku 3 — zmiana współczynnika tłumienia ζ w funkcji prędkości. Jako samolot testowy do obliczeń przyjęto samolot TS-11 „ISKRA" wyposażony w silnik SO-3, ze względu na dostęp do niezbędnych danych. Obliczenia wykonano w pełnym zakresie prędkości lotu. oraz dla trzech wybranych wysokości lotu.

Uwzględnienie w modelu samolotu elementów wirujących zespołu napędowego w zdecydowany sposób zmieniło jakościowo i ilościowo rozwiązania równań ruchu przestrzennego samolotu, wpływając na pogorszenie stateczności ruchu „spiralnego".

Literatura

1. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, J. Wiley, New York 1972.
2. J. MARYNIAK, *Dynamiczna teoria obiektów ruchomych*. Prace naukowe—Mechanika nr. 32, Politechnika Warszawska, Warszawa 1975.
3. R. GUTOWSKI, *Mechanika Analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
4. I. W. OSTOSŁAWSKI, *Aerodinamika samoliota*. GIOP, Moskwa 1957.
5. W. FISZDON, *Mechanika Lotu*. t.1, 2, PWN, Łódź—Warszawa 1960.
6. F. LENORT, *Próba określenia modelu matematycznego silnika turboodrzutowego jako obiektu regulacji*. Prace ILOT nr 68, WNT, Warszawa 1972.
7. W. MOLICKI, *Modelowanie własności dynamicznych samolotu w locie przestrzennym z uwzględnieniem mas wirujących*. XXII Sympozjon Modelowanie w mechanice — zbiór referatów (s. 299 - 306) Gliwice — PTMTS 1983.
8. Z. GORAJ, *Obliczenia sterowności, równowagi i stateczności samolotu w zakresie poddźwiękowym*. Politechnika Warszawska — skrypt (w druku).

Резюме

СПИРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ САМОЛЕТА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ УЧИТЫВАЯ ЭФФЕКТА ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИЛОВОЙ УСТАНОВКИ

В работе обсуждено спиральную устойчивость самолёта в пространственном движении. Предложено динамическую модель самолёта с силовой установкой. Представлено результаты численных решении для спиральной устойчивости.

Summary

SPIRAL STABILITY OF AIRPLANE IN A SPACE MOTION WITH THE EFFECT OF POWER UNIT SPIN ELEMENTS

In the paper, the problem of spiral stability in a space motion in presented. Dynamic model of an airplane with power unit is proposed. Solution of the spiral stability motions have been obtained by means of a digital computer.

Praca została złożona 25 grudnia 1984 roku