MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 22 (1984)

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DLA PŁYT WARSTWOWYCH O WYŻSZEGO RZĘDU ROZKŁADZIE FUNKCJI RUCHU PO GRUBOŚCI PŁYTY

BOHDAN MICHALAK

Politechnika Łódzka

1. Wstęp

W analizie grubych płyt znacznie bliższe rzeczywistości jest przyjęcie, że przekrój poprzeczny jest niepłaski i nieprostopadły do powierzchni środkowej. Efekty te występują bardziej wyraźnie dla płyt warstwowych i to o stosunkowo niedużym stosunku grubości do rozpiętości [6]. Rozkład po grubości struktury można wybrać dowolnego rzędu, przyjęcie zbyt małego rzędu rozkładu da niewystarczającą dokładność, natomiast rozkład zbyt dużego rzędu może być zbędny a powodować tylko zwiększenie liczby nieznanych składowych funkcji ruchu. W teorii zaproponowanej w pracy Lo [5] przemieszczenia w płaszczyźnie płyty i w kierunku poprzecznym są przyjęte jako funkcje odpowiednio sześcienne i kwadratowe współrzędnej w kierunku grubości. Ta wyższego rzędu teoria płyt była porównana w [4] i [5] z innymi teoriami i może być uważana za lepszą w zakresie dokładności i obszaru zastosowań.

Dla uzyskania rozwiązań tak przyjętego modelu zastosowano, podobnie jak w artykule [7] metodę elementów skończonych. Jeżeli w pracy [7] przyjęto do rozważań jedynie jednowymiarowy element belkowy, to w przedstawionym artykule rozważa się dwuwymiarowy element płytowy. Równania równowagi metody elementów skończonych uzyskano traktując rozpatrywany model jako ośrodek z dyskretyzacyjnymi więzami wewnętrznymi [8]. Podobny sposób uzyskania równań metody elementów skończonych dla ośrodka trójwymiarowego z wykorzystaniem zasad mechaniki ośrodków z więzami wewnętrznymi wykorzystano w pracach [3], [4].

2. Płyty dyskretyzowane

Przedstawmy obszar zajęty przez płytę w postaci iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów Π i F; $B = \Pi \times F$. Zbiór Π jest skończoną sumą rozłącznych obszarów Π_a, $\Pi = \bigcup_{a=1}^{b} \Pi_a$, $\Pi_a \cap \Pi_b = \emptyset$ (obszary Π_a nazywać będziemy elementami skończonymi). Niech (X^k, Z) będzie kartezjańskim układem współrzędnych w płycie, gdzie $x = (X^k) \in \Pi$ są współrzędnymi na powierzchni środkowej płyty, a $Z \in \left\langle -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right\rangle$, gdzie h jest grubością płyty w konfiguracji początkowej. Wyraźmy funkcję ruchu płyty przez pewne funkcje zależne tylko od czasu,

$$\chi_k(X^k, Z, t) = \phi_{ak}(Z, \psi(X^k, q_l(t))) \quad x \in \Pi_a \times F. \tag{1}$$

Do uzyskania równań równowagi wykorzystamy zasadę idealności więzów [8],

$$\sum_{a=1}^{l}\Big(\int_{\Pi_a}\int_{F} r_a^k \cdot \delta\chi_k \cdot dV + \int_{\partial\Pi_a\cap\partial\Pi}\int_{F} s_a^k \cdot \delta\chi_k dS +$$

$$+\int_{\Pi_a}\int_{\partial F} s_a^k \cdot \delta\chi_k \cdot dS\Big) + \sum_{a=1}^{l-1}\sum_{b=a+1}^{l}\int_{\partial\Pi_a\cap\partial\Pi_b}\int_{F} s_{ab}^k \cdot \delta\chi_k \cdot dS = 0. \tag{2}$$

Oznaczając przez $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{p}$ odpowiednio gęstość sił masowych i powierzchniowych mamy następujące równania określające siły reakcji więzów [8].

$$\begin{aligned} &T_{a,\alpha}^{k\alpha} + \varrho_a b_a^k + r_a^k = \varrho_a \ddot{\chi}^k, && x \in \Pi_a \times F,\\ &T_{a}^{kK} \cdot n_{aK} = p_a^k + s_a^k, && x \in (\partial\Pi_a \cap \partial\Pi) \times F,\\ &T_a^{k3} \cdot n_{a3} = p_a^k + s_a^k, && x \in \Pi_a \times \partial F,\\ &T_a^{kK} \cdot n_{aK} + T_b^{kK} \cdot n_{bK} = s_{ab}^k, && x \in (\partial\Pi_a \cap \partial\Pi_b) \times F. \end{aligned} \tag{3}$$

Przyjmijmy, że rozpatrywany materiał płyty jest materiałem sprężystym, stąd

$$T_a^{k\alpha} = \varrho \frac{\partial\sigma}{\partial\chi_{k,\alpha}} \tag{4}$$

Określając ze związku (1) przemieszczenie wirtualne $\delta\chi_k = \sum_{l=1}^{t} \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} \cdot \delta q_l$ możemy przekształcić zasadę idealności więzów (2) do następującej postaci

$$\sum_{a=1}^{l}\Big(\int_{\Pi_a}\int_{F} T_a^{k\alpha}\frac{\partial\phi_{k,\alpha}}{\partial q_l} \cdot \delta q_l \cdot dV - \int_{\Pi_a}\int_{F} \varrho_a b_a^k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} \cdot \delta q_l \cdot dV +$$

$$+\int_{\Pi_a}\int_{F} \varrho_a \ddot{\phi}_a^k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} \cdot \delta q_l \cdot dV - \int_{\Pi_a}\int_{\partial F} P_a^k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} \cdot \delta q_l \cdot dS -$$

$$-\int_{\partial\Pi_a\cap\partial\Pi}\int_{F} P_a^k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} \cdot \delta q_l \cdot dS\Big) = 0. \tag{5}$$

Po zdefiniowaniu następujących wielkości

$$\bar{\varepsilon} = \int_F \varrho_a \sigma dF, \quad \bar{b}_{al} = \int_F \varrho_a b_a^k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} dF$$

$$\bar{P}_{al} = \left[P_a^k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}, \quad \bar{\bar{P}}_{al} = \int_F P_a^k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} dF, \tag{6}$$

$$\bar{i}_{al} = \int_F \varrho_a \ddot{\phi}^k \frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} dF,$$

gdzie $[\quad]^{\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}}$ oznacza różnicę zawartego wyrażenia dla $z = \frac{h}{2}$ i $z = -\frac{h}{2}$, równanie (5) ma postać

$$\sum_{a=1}^{l}\Bigg(\frac{\partial}{\partial q_l}\int_{\Pi_a}\bar{\varepsilon}\delta q_l d\Pi_a - \int_{\Pi_a}\bar{b}_{al}\delta q_l d\Pi_a - \int_{\Pi_a}\bar{P}_{al}\delta q_l d\Pi_a + $$
$$+\int_{\Pi_a}\bar{i}_{al}\delta q_l d\Pi_a - \int_{\partial\Pi_a}\hat{P}_{al}\delta q_l d(\partial\Pi_a)\Bigg) = 0. \tag{7}$$

Zgodnie z Lemmatem du Bois-Reymonda równość (7) zachodzi wtedy gdy

$$\sum_{a=1}^{l}(h_{al}+b_{al}+p_{al}) = \sum_{a=1}^{l} i_{al}, \tag{8}$$

gdzie

$$h_{al} = -\frac{\partial\varepsilon_a}{\partial q_l}, \qquad \varepsilon_a = \int_{\Pi_a}\bar{\varepsilon}\,d\Pi_a,$$
$$b_{al} = \int_{\Pi_a}\bar{b}_{al}d\Pi_a, \qquad P_{al} = \int_{\Pi_a}\bar{p}_{al}d\Pi_a, \tag{9}$$
$$i_{al} = \int_{\Pi_a}\bar{i}_{al}d\Pi_a.$$

Przyjmijmy funkcję ruchu w postaci

$$\chi_k(X^k, Z, t) = \psi_k(X^k, q_l(t)) + \sum_{A=1}^{3}(Z)^A\cdot d_k^A(X^K, q_l(t)) =$$
$$= \psi_k(X^K, q_l(t)) + Z\cdot d_k^I(X^K, q_l(t)) + Z^2\cdot d_k^{II}(X^K, q_l(t)) + Z^3\cdot d_k^{III}(X^K, q_l(t)). \tag{10}$$

Ze związku (10) otrzymujemy

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial q_l} = \frac{\partial\psi_k}{\partial q_l} + Z\cdot\frac{\partial d_k^I}{\partial q_l} + Z^2\frac{\partial d_k^{II}}{\partial q_l} + Z^3\frac{\partial d_k^{III}}{\partial q_l}. \tag{11}$$

Podstawiając zależność (11) do związków (6) i (9) otrzymujemy następujące wyrażenia na siły uogólnione

$$b_{al} = \int_{\Pi_a}\left(B^k\frac{\partial\psi_k}{\partial q_l} + M_I^k\frac{\partial d_k^I}{\partial q_l} + M_{II}^k\frac{\partial d_k^{II}}{\partial q_l} + M_{III}^k\frac{\partial d_k^{III}}{\partial q_l}\right)d\Pi_a,$$
$$p_{al} = \int_{\Pi_a}[p^k]^{\frac{h}{2}}_{-\frac{h}{2}}\frac{\partial\psi_k}{\partial q_l}d\Pi_a + \int_{\Pi_a} m_A^k\frac{\partial d_k^A}{\partial q_l}d\Pi_a, \tag{12}$$

gdzie

$$B^k = \int_F \varrho_R b^k dF, \qquad M_A^k = \int_F \varrho_R b^k (Z)^A dF,$$
$$m_A^k = [p^k(Z)^A]^{\frac{k}{2}}_{-\frac{h}{2}}. \tag{13}$$

Energia odkształcenia na jednostkę powierzchni jest zgodnie z (6.1) równa sumie energii odkształcenia na jednostkę powierzchni każdej z warstw płyty. Przyjmijmy, że każda z warstw jest ośrodkiem sprężystym z płaszczyzną symetrii $z = \text{const}$. Energia odkształcenia płyty analogicznie do danej w (2) jest określona związkiem

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\chi^T A\chi - \chi^{0T} A\chi^0 + \frac{1}{2}\chi A\chi^0,$$

gdzie:

$$\chi = [\psi_{T,M}\psi_{3,T} d^A_{T,M} d^A_{3,T} d^A_T d^A_3]$$

Symbol „o" oznacza, że wielkości te są określone dla konfiguracji wyjściowej. Macierz sprężystości A ma następującą budowę

$$A = \begin{bmatrix} D^{KLMN} & 0 & D^{KLMN}_A & 0 & 0 & D^{KL33}_A \\ 0 & D^{3K3M} & 0 & D^{K3M3}_A & \bar{D}^{K3M3}_A & 0 \\ D^{KLMN}_A & 0 & D^{KLMN}_{AB} & 0 & 0 & D^{KL33}_{AB} \\ 0 & D^{3K3M} & 0 & D^{K3M3}_{AB} & \bar{D}^{K3M3}_{AB} & 0 \\ 0 & \bar{D}^{3K3M} & 0 & \bar{D}^{K3M3}_{AB} & \bar{\bar{D}}^{K3M3}_{AB} & 0 \\ D^{33MN}_A & & D^{33MN}_{AB} & & & D^{3333}_{AB} \end{bmatrix},$$

Dla płyty utworzonej z n warstw o łącznej grubości $h = \sum\limits_{w=1}^{n} h(w)$ elementy macierzy A mają budowę

$$D^{KLMN} = \int\limits_F C^{KLMN}(w)\cdot dF = \sum_{w=1}^{n} \int\limits_{-\frac{h}{2}+\sum\limits_{m=1}^{w} h(m-1)}^{-\frac{h}{2}+\sum\limits_{m=1}^{w} h(m)} C^{KLMN}(w)\cdot dz,$$

$$D^{KLMN}_A = \int\limits_F C^{KLMN}(w)\cdot (Z)^A\cdot dz,$$

$$D^{KLMN}_{AB} = \int\limits_F C^{KLMN}(w)\cdot (Z)^{A+B}\cdot dz,$$

$$D^{KL33}_A = \int\limits_F C^{KL33}(w)\cdot A\cdot (Z)^{A-1}\cdot dz,$$

$$D^{KL33}_{AB} = \int\limits_F C^{KL33}(w)\cdot B\cdot (Z)^{A+B-1}\cdot dz, \qquad A, B = 1, 2, 3$$

$$D^{K3M3} = \int\limits_F C^{K3M3}(w)\cdot dz, \tag{17}$$

$$D^{K3M3} = \int\limits_F C^{K3M3}(w)\cdot (Z)^A\cdot dz,$$

$$D^{K3M3}_{AB} = \int\limits_F C^{K3M3}(w)\cdot (Z)^{A+B}\cdot dz,$$

$$\bar{D}_{A}^{K3M3} = \int_F C^{K3M3}(w) \cdot A \cdot (Z)^{A-1} \cdot dz,$$

$$\bar{D}_{AB}^{K3M3} = \int_F C^{K3M3}(w) \cdot B \cdot (Z)^{A+B-1} \cdot dz,$$

$$\bar{\bar{D}}_{AB}^{K3M3} = \int_F C^{K3M3}(w) \cdot A \cdot B \cdot (Z)^{A-1+B-1} \cdot dz,$$

$$D_{AB}^{3333} = \int_F C^{3333}(w) \cdot A \cdot B \cdot (Z)^{A-1+B-1} dz.$$

Całkowanie po grubości płyty w powyższych wyrażeniach można przeprowadzić zgodnie z zasadą podaną w związku (17.1). Współczynniki $C^{klmn}(w)$ określamy dla każdej warstwy „w" jako wyraz macierzy sprężystości dla ciała z płaszczyzną symetrii z = const. [1]

$$C = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & 0 & 0 & C^{1112} \\ & C^{2222} & C^{2233} & 0 & 0 & C^{2212} \\ & & C^{3333} & 0 & 0 & C^{3312} \\ & & & C^{2323} & C^{2331} & 0 \\ & & & & C^{3131} & 0 \\ & & & & & C^{1212} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Po zdefiniowaniu następującego funkcjonału

$$W = \int_{\Pi_a} (\bar{\varepsilon} + B^k \cdot \psi_k + M_A^k \cdot d_k^A + [p^k]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdot \psi_k + m_A^k \cdot d_k^A) \cdot d\Pi_a, \tag{19}$$

statyczne równania równowagi pojedynczego elementu „a" możemy zapisać następująco

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = 0. \tag{20}$$

3. Równania dla elementu skończonego

W rozdziale tym zapiszemy równania dla pojedynczego elementu skończonego. Globalny układ równań równowagi można uzyskać zgodnie z wzorem (8) jako sumę równań dla poszczególnych elementów skończonych.

Funkcja ruchu χ wewnątrz elementu „a" jest dana przez funkcję kształtu N i „n" wartości węzłowych q_i funkcji ruchu

$$\begin{aligned} \psi &= N_\varphi \cdot q_\varphi, \\ d^A &= N_d \cdot q_d^A. \end{aligned} \tag{21}$$

Wektor gradientu funkcji ruchu dany wzorem (15) jest wówczas równy

$$\chi = R \cdot q = \begin{bmatrix} R_\varphi & 0 \\ 0 & R_{dA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\varphi \\ q_{dA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{dI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{dII} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{dIII} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_\varphi \\ q_{dI} \\ q_{dII} \\ q_{dIII} \end{bmatrix} \tag{22}$$

gdzie $\boldsymbol{R}$ jest macierzą, wyrazy której są pochodnymi funkcji kształtu względem współrzędnych X^k. Zgodnie ze wzorem (14) możemy określić gęstość energii odkształcenia na jednostkę powierzchni elementu

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{R} \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\chi}^0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}^{0T} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\chi}^0. \tag{23}$$

Energię odkształcenia elementu „a" określoną wzorem (9.2) możemy zapisać następująco

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{K}^0 + D \tag{24}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \int_{\Pi_a} \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}\, d\Pi_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^\psi & \boldsymbol{K}_A^{\psi d} \\ \boldsymbol{K}_A^{d\psi} & \boldsymbol{K}_{AB}^d \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{K}^0 &= \int_{\Pi_l} \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\chi}^0\, d\Pi_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{0\psi} \\ \boldsymbol{K}_B^{0d} \end{bmatrix}, \\ D &= \int_{\Pi_a} \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}^{0T} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\chi}^0\, d\Pi_a. \end{aligned} \tag{25}$$

Natomiast funkcjonał W zdefiniowany wzorem (19) ma następującą budowę

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{K}^0 + D + \boldsymbol{q}_\psi^T \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{q}_d^{AT} \cdot (\boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{m}_A) \tag{26}$$

gdzie wektory sił są zdefiniowane w następujący sposób

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \int_{\Pi_a} \boldsymbol{N}_\psi^T \cdot \bar{\boldsymbol{B}}\, d\Pi_a, \\ \boldsymbol{M}_A &= \int_{\Pi_a} \boldsymbol{N}_d^T \cdot \ddot{\boldsymbol{M}}_A\, d\Pi_a, \\ \boldsymbol{p} &= \int_{\Pi_a} \boldsymbol{N}_\psi^T \cdot [\bar{\boldsymbol{p}}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\, d\Pi_a, \\ \boldsymbol{m}_A &= \int_{\Pi_a} \boldsymbol{N}_d^T \bar{\boldsymbol{m}}_A\, d\Pi_a. \end{aligned} \tag{27}$$

Różniczkując odpowiednio funkcjonał W względem $\boldsymbol{q}_\psi$ i $\boldsymbol{q}_d^A$ otrzymujemy zgodnie z (20) równania równowagi dla elementu „a"

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{K}^\psi \boldsymbol{q}_\psi + \boldsymbol{K}_B^{\psi d} \cdot \boldsymbol{q}_d^B - \boldsymbol{K}^{0\psi} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{p} = 0 \\ &\boldsymbol{K}_A^{d\psi} \cdot \boldsymbol{q}_\psi + \boldsymbol{K}_{AB}^d \cdot \boldsymbol{q}_d^B - \boldsymbol{K}_A^{0d} + \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{m}_A = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

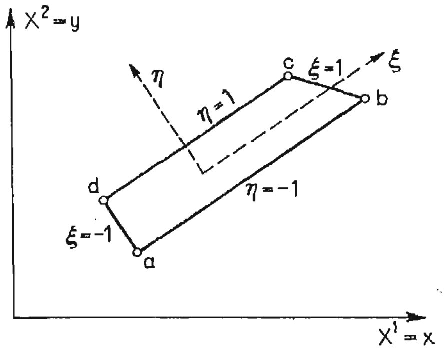
4. Elementy izoparametryczne

Rozważania przeprowadzono dla elementu izoparametrycznego o czterech węzłach (rys. 1)

Geometria elementu jest interpolowana jako

$$\begin{aligned} x &= [N_a, N_b, N_c, N_d] \cdot X^e = N \cdot X^e, \\ y &= N \cdot Y^e, \end{aligned} \tag{29}$$

gdzie X^e, Y^e są współrzędnymi węzłów elementu. Dla elementu izoparametrycznego funkcje ruchu ψ i d^A są podobnie zdefiniowane w zależności od ich wartości węzłowych



Węzły	N_i
$\xi_i = \pm 1$ $\eta_i = \pm 1$	$\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)$

$\xi_0 = \xi\xi_i$
$\eta_0 = \eta\eta_i$

Rys. 1

$\boldsymbol{q}_\varphi$ i $\boldsymbol{q}_d^A$,

$$\begin{aligned} \psi &= N_\varphi \boldsymbol{q}_\varphi, \\ d^A &= N_d \boldsymbol{q}_d^A. \end{aligned} \tag{30}$$

Wektory wielkości węzłowych użyte w związkach (30) są zdefiniowane w następujący sposób

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_\psi &= [\psi_1^a \psi_2^a \psi_3^a \psi_1^b \psi_2^b \psi_3^b \psi_1^c \psi_2^c \psi_3^c \psi_1^d \psi_2^d \psi_3^d]^T, \\ \boldsymbol{q}_d^A &= [d_1^{Aa} d_2^{Aa} d_3^{Aa} d_1^{Ab} d_2^{Ab} d_3^{Ab} d_1^{Ac} d_2^{Ac} d_3^{Ac} d_1^{Ad} d_2^{Ad} d_3^{Ad}]^T. \end{aligned} \tag{31}$$

W konfiguracji wyjściowej składowe funkcji ruchu mają następujące wartości

$$\begin{aligned} &\psi_1^0 = X^1 = x, \quad \psi_2^0 = X^2 = y, \quad \psi_3^0 = 0, \\ &d_1^{A0} = d_2^{A0} = 0, \quad d_3^{I0} = 1, \quad d_3^{II0} = d_3^{III0} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Macierze $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{R}_d^A$ z (22) określające wektor gradientu funkcji ruchu o składowych

$$\chi = \lfloor \psi_{1,1} \psi_{1,2} \psi_{2,1} \psi_{2,2} \psi_{3,1} \psi_{3,2} d_{1,1}^A d_{1,2}^A d_{2,1}^A d_{2,2}^A d_{3,1}^A d_{3,2}^A d_1^A d_2^A d_3^A \rfloor^T \tag{33}$$

zapiszemy w zależności od węzłowych podmacierzy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_\psi &= [R_\varphi^a, \dots, R_\varphi^d], \\ \boldsymbol{R}_d^A &= [R_d^{Aa}, \dots, R_d^{Ad}], \end{aligned} \tag{34}$$

gdzie

$$\boldsymbol{R}_\varphi^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{R}_d^{Ii} = \boldsymbol{R}_d^{IIi} = \boldsymbol{R}_d^{IIIi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & N_i \end{vmatrix}^T \tag{35}$$

Relacje pomiędzy różniczkowaniem funkcji kształtu N względem współrzędnych ξ i η a względem współrzędnych globalnych x, y potrzebne do tworzenia macierzy $\mathbf{R}_\varphi$ i $\mathbf{R}_d^A$ są dane poprzez macierz I_c

$$I_c = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Jeżeli różniczkowania funkcji kształtu N względem współrzędnych ξ i η są zapisane jako

$$\begin{aligned} G_\xi &= \left[\frac{\partial N_a}{\partial \xi}, \frac{\partial N_b}{\partial \xi}, \frac{\partial N_c}{\partial \xi}, \frac{\partial N_d}{\partial \xi}\right]^T \\ G_\eta &= \left[\frac{\partial N_a}{\partial \eta}, \frac{\partial N_b}{\partial \eta}, \frac{\partial N_c}{\partial \eta}, \frac{\partial N_d}{\partial \eta}\right]^T, \end{aligned} \tag{37}$$

wtedy macierz I_c może być zapisana

$$I_c = \begin{bmatrix} G_\xi^T \cdot X^e & G_\eta^T \cdot X^e \\ G_\xi^T \cdot Y^e & G_\eta^T \cdot Y^e \end{bmatrix} \tag{38}$$

Wektory określające pochodne funkcji kształtu N względem współrzędnych x, y są określone następująco

$$\begin{aligned} G_x^T &= \left[\frac{\partial N_a}{\partial x}, \frac{\partial N_b}{\partial x}, \frac{\partial N_c}{\partial x}, \frac{\partial N_d}{\partial x}\right] = \frac{\partial \xi}{\partial x} G_\xi^T + \frac{\partial \eta}{\partial x} G_\eta^T, \\ G_y^T &= \left[\frac{\partial N_a}{\partial y}, \frac{\partial N_b}{\partial y}, \frac{\partial N_c}{\partial y}, \frac{\partial N_d}{\partial y}\right] = \frac{\partial \xi}{\partial y} G_\xi^T + \frac{\partial \eta}{\partial y} G_\eta^T, \end{aligned} \tag{39}$$

gdzie różniczkowania ξ i η względem x, y są otrzymane z I_c^{-1}. Macierz sprężystości A daną w (16) możemy zbudować z czterech podmacierzy

$$A = \begin{bmatrix} A^\varphi & A_A^{\varphi d} \\ A_B^{d\varphi} & A_{BA}^d \end{bmatrix}, \tag{40}$$

które mają następującą budowę

$$A^\varphi = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1121} & D^{1122} & 0 & 0 \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1221} & D^{1222} & 0 & 0 \\ D^{2111} & D^{2112} & D^{2121} & D^{2122} & 0 & 0 \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2221} & D^{2222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{3131} & D^{3132} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{3231} & D^{3232} \end{bmatrix},$$

$$A_A^{\varphi d} = \begin{bmatrix} D_A^{1111} & D_A^{1112} & D_A^{1121} & D_A^{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{1133} \\ D_A^{1211} & D_A^{1212} & D_A^{1221} & D_A^{1222} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{1233} \\ D_A^{2111} & D_A^{2112} & D_A^{2121} & D_A^{2122} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{2133} \\ D_A^{2211} & D_A^{2212} & D_A^{2221} & D_A^{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{3131} & D_A^{3132} & \bar{D}_A^{3131} & \bar{D}_A^{3132} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_A^{3231} & D_A^{3232} & \bar{D}_A^{3231} & \bar{D}_A^{3232} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_B^{d\varphi} = (A_A^{\varphi d})^T. \tag{41}$$

$$A_{AB}^d = \begin{bmatrix} D_{AB}^{1111} & D_{AB}^{1112} & D_{AB}^{1121} & D_{AB}^{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{1133} \\ D_{AB}^{1211} & D_{AB}^{1212} & D_{AB}^{1221} & D_{AB}^{1222} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{1233} \\ D_{AB}^{2111} & D_{AB}^{2112} & D_{AB}^{2121} & D_{AB}^{2122} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{2133} \\ D_{AB}^{2211} & D_{AB}^{2212} & D_{AB}^{2221} & D_{AB}^{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{1313} & D_{AB}^{1323} & \bar{D}_{AB}^{1313} & \bar{D}_{AB}^{1323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{2313} & D_{AB}^{2323} & \bar{D}_{AB}^{2313} & \bar{D}_{AB}^{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{AB}^{1313} & \bar{D}_{AB}^{1323} & \bar{\bar{D}}_{AB}^{1313} & \bar{\bar{D}}_{AB}^{1323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{AB}^{2313} & \bar{D}_{AB}^{2323} & \bar{\bar{D}}_{AB}^{2313} & \bar{\bar{D}}_{AB}^{2323} & 0 \\ D_{AB}^{1133} & D_{AB}^{1233} & D_{AB}^{2133} & D_{AB}^{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{AB}^{3333} \end{bmatrix}$$

Znając budowę macierzy $\boldsymbol{R}$ i A możemy z wzoru (25) określić macierz sztywności $\boldsymbol{K}$ elementu skończonego

$$\begin{aligned} K^{\varphi} &= \int_{\Pi_a} R_{\varphi}^T \cdot A^{\varphi} \cdot R_{\varphi} d\Pi_a, \\ K_A^{\varphi d} &= \int_{\Pi_a} R_{\varphi}^T \cdot A_A^{\varphi d} \cdot R_{dA} d\Pi_a, \\ K_A^{d\varphi} &= \int_{\Pi_a} R_{dA}^T \cdot A_A^{d\varphi} \cdot R_{\varphi} d\Pi_a = (K_A^{\varphi d})^T, \\ K_{AB}^d &= \int_{\Pi_a} R_{dA}^T \cdot A_{AB}^d \cdot R_{dB} d\Pi_a. \end{aligned} \tag{42}$$

Globalną macierz sztywności struktury otrzymamy zgodnie z wzorem (8) sumując odpowiednio elementy macierzy sztywności poszczególnych elementów.

5. Uwagi końcowe

W przedstawionej pracy podano sposób rozwiązania grubych płyt warstwowych z wykorzystaniem metody elementów skończonych i przyjęciem funkcji ruchu dowolnego punktu jako funkcji trzeciego stopnia zmiennej w kierunku grubości płyty. Potraktowanie płyty jako ciała z wiązami dyskretyzacyjnymi pozwala w prosty sposób uzyskać równania równowagi elementów skończonych przy dowolnej budowie funkcji ruchu. Pozwala to również po znalezieniu rozwiązania określić siły reakcji więzów wewnętrznych, które można wykorzystać do sterowania dyskretyzacją ciała (4).

Jak pokazano w pracy [6] zastosowanie wyższego rzędu rozkładu wzdłuż grubości płyty daje znacznie dokładniejsze wyniki dla płyt warstwowych o niezbyt dużym stosunku grubości do rozpiętości, bo wynoszącym 0,25.

Literatura cytowana w tekście

1. R. M. Christensen, *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley Sons, New—York 1979.
2. S. Konieczny, B. Michalak, *Ciała z cienką warstwą na powierzchni brzegowej*, Zesz. Nauk. Pł, Budow. Z. 27 1981 s. 31 - 43.

3. W. KUFEL, F. PIETRAS, *Ocena dokładności rozwiązań problemów brzegowych sprężystych ciał dyskretyzowanych*, Rozpr. Inżyn. 22/1974 s. 427 - 434.
4. W. KUFEL, *Sterowana dyskertyzacja płyt i powłok*, Mech. Teor. i Stos. 14 (1976) s. 19 - 31.
5. K. H. LO, R. M. CHRISTENSEN, E. M. WU, *A High-Order Theory of Plate Deformation*, Part 1. Jour. of App. Mech. Vol. 44, Trans. ASME Vol 99 Series E 1977 s. 663 - 668.
6. K. H. LO, R. M. CHRISTENSEN, E. M. WU, *A High-Order Theory of Plate Deformation*, Part 2. Jour of. App. Mech. Vol 44, Trans. ASME Vol 99 Series E 1977 s. 669 - 676.
7. R. L. SPILKER, N. I. MUNIR, *Comparison of hybrid-stress element throughthickness distributions corresponding to a High-Order Plate theory*, Comp. Stru. 1980 s. 579 - 586.
8. Cz. WOŹNIAK, *Constrained Continuous Media II Discretized Formulation of the Continuous Media Theory*, Bull. Acad. Polon Sci. Sér. Sci Techn Vol 21 (1973) s. 167 - 175.

Резюме

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Метод конечных элементов использован в работе для представления решения для уточненой теории слоистых пластин. Уравнения равновесия для конечных элементов получены из теории тел с ограничичвающими связями, механика которых была построена Ч. Возьняком. В работе указана матрица жесткости для изопараметрических элементов.

Summary

THE FINITE ELEMENT METHOD FOR LAMINATED PLATES WITH A HIGH-ORDER THEORY OF PLATE DEFORMATION

The finite element method is applied to solution of laminated thick plates with a high-order theory of plate deformation. In order to derive the equilibrium equations of elements the theory of constrained bodies has been applied. The mechanics of such bodies was formulated by Cz. Woźniak. Paper describes stiffness matrices for isoparametric elements.

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1982 roku