MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 22 (1984)

# WPŁYW PARAMETRU WZMOCNIENIA NA ZACHOWANIE SIĘ GRUBOŚCIENNEJ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ KULI OBCIĄŻONEJ GRADIENTEM TEMPERATURY

ZDZISŁAW ŚLODERBACH
TADEUSZ SAWICKI

*ZMOC — ZTK, IPPT PAN*
*Warszawa,*

## Oznaczenia i skróty

$\bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_\Theta$ — składowe tensora odkształcenia
$\sigma_r, \sigma_\Theta$ — składowe tensora naprężenia
$\varepsilon_p$ — zredukowane (zastępcze) odkształcenie plastyczne
$r$ — promień bieżący kuli
$r_c$ — promień strefy sprężysto-plastycznej
$a$ — promień wewnętrzny kuli
$b$ — promień zewnętrzny kuli
$T$ — temperatura bieżąca (na promieniu bieżącym)
$T_a$ — temperatura na promieniu wewnętrznym
$T_b$ — temperatura na promieniu zewnętrznym
$\sigma_0$ — początkowa granica plastyczności
$\sigma_e$ — naprężenie zredukowane według hipotezy H-M-H
$r_e$ — promień bieżący w sprężystej części kuli
$E$ — moduł sprężystości Younga
$E^T$ — moduł wzmocnienia plastycznego

## Wielkości bezwymiarowe

$m$ — liniowy parametr wzmocnienia
$\varrho$ — promień bieżący
$\varrho_c$ — promień strefy sprężysto-plastycznej
$\beta$ — parametr geometrii kuli
$\beta_c$ — parametr geometrii kuli dla strefy sprężysto-plastycznej
$\varrho_e$ — promień bieżący w części sprężystej kuli
$S_r, S_\Theta$ — składowe tensora naprężenia
$\varepsilon_r, \varepsilon_\Theta$ — składowe tensora odkształcenia

$\tau$ — temperatura bieżąca

$\varepsilon^p$ — zastępcze odkształcenie plastyczne

$\varepsilon_\theta^p$ — część plastyczna składowej obwodowej i promieniowej tensora odkształcenia

$S_{rc}$ — składowa promieniowa tensora naprężenia działająca na promieniu $\varrho_c$

$\tau_0$ — temperatura na promieniu wewnętrznym kuli

$\tau_c$ — temperatura na promieniu strefy sprężysto-plastycznej

$\tau_{0c}$ — temperatura na promieniu wewnętrznym potrzebna do uplastycznienia kuli do promienia $\varrho_c$

## 1. Wstęp

Celem pracy jest zbadanie wpływu współczynnika wzmocnienia na zachowanie się grubościennej, sprężysto-plastycznej kuli obciążonej gradientem temperatury. Analizuje się wpływ parametru wzmocnienia $m$ na rozkład temperatur, odkształceń, naprężeń (w tym również naprężeń resztkowych po procesie czysto sprężystego odciążenia) oraz na położenie strefy sprężysto-plastycznej. Określa się również wartości krytyczne parametru geometrii ($\beta = b/a$) dla przypadku gdy druga strefa plastyczna rozpoczyna się na zewnętrznym promieniu badanej kuli.

Naprężenia i odkształcenia w kuli spowodowane są polem temperatury — por wyr. (2.8). Tak określony rozkład temperatur był już cytowany w literaturze, np. w pracach [1]÷[5]. Powierzchnia zewnętrzna kuli posiada stałą temperaturę i bez tracenia ogólności rozwiązania przyjęto ją jako równą zero, por. np. [5]. Powierzchni wewnętrzna i zewnętrzna kuli wolne są od obciążeń mechanicznych, np. ciśnieniem. Zakłada się, że kula jest w początkowym stanie jednorodna i wolna od naprężeń resztkowych. Materiał kuli przyjęto jako sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem oraz nieściśliwy plastycznie. Maksymalna wartość parametru wzmocnienia $m$ użyta w pracy wynosi 0.4 i wartość taka była już przyjmowana w literaturze, np. w [6]. Jako warunek plastyczności przyjęto hipotezę Hubera-Misesa, przy czym założono, że granica plastyczności nie zależy od temperatury. Do analizy powyższego zagadnienia przyjęto teorię małych odkształceń w stosunkowo dużym zakresie zmian temperatur. Zakłada się, że ciepło powstałe podczas procesu deformacji nie zmienia pola temperatur, co wiąże się z wykorzystaniem równań konstytutywnych niesprzężonej termosprężystości i termoplastyczności. Zakłada się ponadto, że wartości stałych materiałowych nie ulegają zmianie.

Dalszych badań wymaga przypadek gdy na zewnętrznym promieniu kuli rozpoczyna się propagacja drugiej strefy plastycznej. Przypadek taki omawia się w pracy [5] lecz dla materiału bez wzmocnienia. Bardziej ogólną analizę sprężysto-plastycznych kul dla materiału ze wzmocnieniem, przeprowadzić można podobnie jak w pracach [3], [4], dodając do obciążenia termicznego obciążenie ciśnieniem wewnętrznym o stosunkowo dużym zakresie zmian. Można by w ten sposób sporządzić odpowiednie trójparametrowe nomogramy w miejsce dotychczasowych dwuparametrowych. Rolę trzeciego parametru odgrywałby współczynnik wzmocnienia $m$. Problem analizy grubościennych sprężysto-plastycznych kul jest licznie cytowany w literaturze, por. np. [2]÷[16].

Nowe wyniki otrzymane w niniejszej pracy na drodze numerycznej przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów i tabel.

## 2. Podstawowe równania wyjściowe

Wykorzystując prawa symetrii kulistej równania zapiszemy we współrzędnych sferycznych: promieniowych $r$, obwodowych $\Theta$, oraz w odpowiednich wielkościach bezwymiarowych.

Równania równowagi i nierozdzielności odkształceń wyglądają następująco:

$$\frac{dS_r}{d\varrho}+\frac{2(S_r-S_\Theta)}{\varrho} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{d\varepsilon_\Theta}{d\varrho}+\frac{\varepsilon_\Theta-\varepsilon_r}{\varrho} = 0. \tag{2.2}$$

Zakładając nieściśliwość plastyczną materiału, otrzymamy:

$$\varepsilon_r^p+2\varepsilon_\Theta^p = 0. \tag{2.3}$$

Warunek plastyczności H-M-H ma postać,

$$|S_r-S_\Theta| = |S|, \tag{2.4}$$

gdzie:

$$\varepsilon^p \neq 0 \quad \text{dla} \quad |S| > 1$$

$$\varepsilon^p = 0 \quad \text{dla} \quad |S| \leqslant 1.$$

Warunek $|S| = 1$ określa początkową granicę plastyczności przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu. Odkształcenie zastępcze $\varepsilon^p$, po uwzględnieniu (2.3) jest następujące,

$$\varepsilon^p = |\varepsilon_r^p|. \tag{2.5}$$

Związki konstytutywne wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= S_r-2\nu S_\Theta+(1-\nu)\tau+\varepsilon_r^p \\ \varepsilon_\Theta &= (1-\nu)S_\Theta-\nu S_r+(1-\nu)\tau+\varepsilon_\Theta^p \end{aligned} \tag{2.6}$$

Równania plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa dla przyjętego w pracy monotonicznego obciążenia gradientem temperatury, po scałkowaniu przyjmują postać następującą [2],

$$\varepsilon_r^p = \varepsilon^p\frac{S_r-S_\Theta}{|S_r-S_\Theta|} = \varepsilon^p \operatorname{sgn}(S_r-S_\Theta). \tag{2.7}$$

Równanie dla pola temperatury przyjęto w następującej formie, por. np. [2] ÷ [5], [10] ÷ [11]:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\beta-1}\left(\frac{\beta}{\varrho}-1\right), \quad \text{dla} \quad T_b = 0, \tag{2.8}$$

gdzie:

$\tau_0 = \dfrac{E\alpha T_a}{(1-\nu)\sigma_0}$ — jest bezwymiarową temperaturą działającą na wewnętrznej powierzchni kuli, oraz:

$$\begin{gathered} \beta = \frac{b}{a}, \quad \varrho = \frac{r}{a}, \quad S_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad S_\Theta = \frac{\sigma_\Theta}{\sigma_0}, \\ \varepsilon_r = \frac{E\bar{\varepsilon}_r}{\sigma_0}, \quad \varepsilon_\Theta = \frac{E\bar{\varepsilon}_\Theta}{\sigma_0}, \quad \tau = \frac{E\alpha T}{(1-\nu)\sigma_0}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Jak wiadomo w przypadku symetrii kulistej warunki plastyczności Huberta-Misesa i Treski pokrywają się, więc z (2.4) otrzymać można następujące wyrażenie,

$$S = S_\Theta - S_r. \tag{2.10}$$

## 3. Wyprowadzenie podstawowych równań

Z analizy przeprowadzonej w pracach [3], [4], [11] oraz z przesłanek fizycznych wynika, że pierwsza strefa plastyczna pojawi się zawsze na wewnętrznym promieniu ($\varrho = 1$) dla kul obciążonych tylko promieniowym gradientem temperatury.
Podstawiając równanie konstytutywne (2.6) do związku nierozdzielności (2.2), wykorzystując równanie równowagi (2.1) oraz przeprowadzając całkowanie otrzyma się następujące równania, por. [2]:

$$\begin{aligned} S_r &= -\frac{2}{\varrho^3}\int_1^\varrho \xi^2\tau(\xi)d\xi + \frac{1}{1-\nu}\int_1^\varrho \frac{\varepsilon_r^p}{\xi}d\xi + \left(1-\frac{1}{\varrho^3}\right)C_1, \\ S_\Theta &= -\tau(\varrho) + \frac{1}{\varrho^3}\int_1^\varrho \xi^2\tau(\xi)d\xi + \frac{1}{2(1-\nu)}\varepsilon_r^p + \frac{1}{1-\nu}\int_1^\varrho \frac{\varepsilon_r^p}{\xi}d\xi + \left(1+\frac{1}{2\varrho^3}\right)C_1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Po uwzględnieniu (2.10) oraz (3.1), otrzyma się,

$$S = -\tau + \frac{3}{\varrho^3}\int_1^\varrho \xi^2\tau(\xi)d\xi + \frac{\varepsilon_r^p}{2(1-\nu)} + \frac{3}{2\varrho^3}C_1. \tag{3.2}$$

Stałą całkowania $C_1$ wyznacza się z następujących warunków brzegowych:

$$S_r(1) = 0, \quad S_r(\beta) = 0. \tag{3.3}$$

skąd,

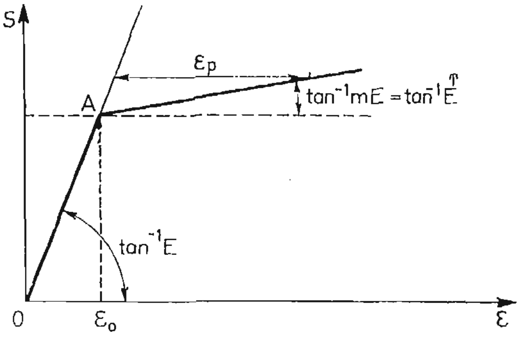
$$C_1 = \frac{\beta^3}{\beta^3-1}\left[\frac{2}{\beta^3}\int_1^\beta \xi^2\tau(\xi)d\xi - \frac{1}{1-\nu}\int_1^\beta \frac{\varepsilon_r^p}{\xi}d\xi\right]. \tag{3.4}$$

Oznaczmy symbolem $\tau'_{0c}$ temperaturę przyłożoną na wewnętrznej powierzchni kuli ($\varrho = 1$) i potrzebną do pierwszego uplastycznienia tej powierzchni. Wówczas po przekroczeniu tej temperatury strefa sprężysto-plastyczna osiągnie promień oznaczony $\varrho_c$, a odpowiadającą mu temperaturę na wewnętrznym promieniu oznaczmy przez $\tau_{0c}$. Wewnątrz strefy plastycznej $1 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_c$ warunek plastyczności (2.4) jest spełniony, zatem obwodowe naprężenia $S_\Theta$ będą większymi a promieniowe naprężenia $S_r$ będą mniejszymi naprężeniami ściskającymi. Stąd, por. [2] ÷ [5]:

$$\begin{aligned} S_\Theta - S_r &< -1 \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant \varrho < \varrho_c, \\ S_\Theta - S_r &= -1 \quad \text{dla} \quad \varrho = \varrho_c. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Przyjmując liniowy charakter wzmocnienia plastycznego materiału przedstawiony w zmiennych — $(S, \varepsilon^p)$ — rys. 1, por. np. [2], możemy napisać,

$$\varepsilon^p = \frac{1-m}{m}(|S|-1), \tag{3.6}$$




Rys. 1. Krzywa naprężenie-odkształcenie dla liniowego wzmocnienia

gdzie $m = E^T/E$ jest parametrem liniowego wzmocnienia materiału. Wówczas z zależności (2.4), (2.7), (3.5), wyznaczyć można następujący związek,

$$\varepsilon_r^p = \frac{m-1}{m}(S+1), \quad \text{dla} \quad \frac{S}{|S|} = -1, \tag{3.7}$$

ostatecznie z (2.1), (2.10) i (3.7) otrzymamy:

$$\int_1^\varrho \frac{\varepsilon_r^p}{\xi} d\xi = \begin{cases} \dfrac{m-1}{m} \ln\varrho + \dfrac{m-1}{2m} S_r(\varrho) & \text{dla} \quad \varrho < \varrho_c, \\ \dfrac{m-1}{m} \ln\varrho_c + \dfrac{m-1}{2m} S_r(\varrho_c) & \text{dla} \quad \varrho \geqslant \varrho_c, \end{cases} \tag{3.8}$$

gdzie: $S_r(\varrho) = S_r$, $S_r(\varrho_c) = S_{rc}$.

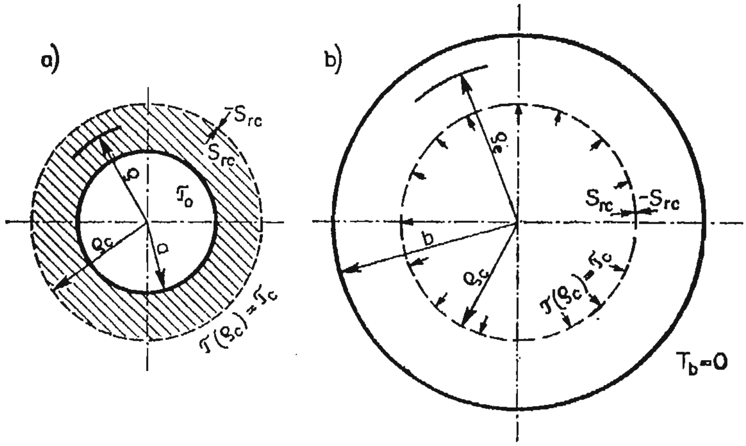
Aby wyznaczyć rozkład temperatury $\tau$, który z kolei pozwoli określić stan naprężenia, deformacji oraz krytyczne wartości parametru geometrii kuli $\beta$, należy z równań (3.1), (3.2), (3.4) i (3.8) wyznaczyć stałą $C_1$, naprężenie $S_{rc}$ oraz temperaturę $\tau_{0c}$. W tym celu uwzględnia się również następujący warunek brzegowy,

$$S = -1 \quad \text{dla} \quad \varrho = \varrho_c. \tag{3.9}$$

Stałą $C_1$ wyznaczyć można po podstawieniu warunku brzegowego (3.9) do równania (3.2). Następnie porównując tak wyznaczoną wartość $C_1$ ze wzorem (3.4) i po uwzględnieniu w nim wyrażenia (3.8) po przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{\beta^3}{\beta^3-1}\left[\frac{2}{\beta^3}\int_1^\beta \varrho^2\tau(\varrho)d\varrho - \frac{m-1}{1-\nu}\left(\ln\varrho_c + \frac{1}{2}S_r(\varrho_c)\right)\right] = \frac{2}{3}\varrho_c^3\left[\tau(\varrho_c) - \frac{3}{\varrho_c^3}\int_1^{\varrho_c} \varrho^2\tau(\varrho)d\varrho - 1\right]. \tag{3.10}$$

Aby określić z zależności (3.10) wartość $\tau_{0c}$, należy wcześniej wyznaczyć zależność $S_r(\varrho_c) = S_{rc}$. W tym celu w kuli uplastycznionej do promienia $\varrho = \varrho_c$ rozpatrzymy kulę z wewnętrznym promieniem $\varrho_c$ i parametrem geometrii $\beta_c$ znajdującą się w stanie sprężystym —




Rys. 2. Schemat kuli z dwiema strefami rozdzielonymi powierzchnią: strefą plastyczną do (i strefą sprężystą powyżej)

rys. 2. Dla kuli zewnętrznej — sprężystej, wprowadzić należy nowe bezwymiarowe wielkości analogiczne jak w (2.9), mianowicie:

$$\beta_c = \frac{b}{r_c} = \frac{\beta}{\varrho_c}, \quad \varrho_c = \frac{r_c}{a}, \quad \varrho_e = \frac{r_e}{r_c},$$
$$\tau_e = \frac{\tau_c}{\beta_c - 1}\left(\frac{\beta_c}{\varrho_e} - 1\right), \quad \tau_c = \tau(\varrho_c), \quad \text{gdzie } \varrho_c \leqslant \varrho_e \leqslant \beta. \tag{3.11}$$

Rozpisując równania termosprężystości, por. [2]÷[5], [16]÷[20] oraz uwzględniając (3.11), otrzymamy równania dla sprężystej części kuli analogiczne do równań (3.1), wiedząc, że $\varepsilon^p = 0$. Wykorzystując następnie te równania, warunek brzegowy oraz biorąc pod uwagę parametry (3.11) otrzymać można dla sprężystej części kuli następujące wyrażenie,

$$S_{rc} = \frac{2(\beta_c^3 - 1) - \tau_c\beta_c(2\beta_c^2 - \beta_c - 1)}{3\beta_c^3}, \tag{3.12}$$

gdzie $\tau_c = \frac{\tau_{0c}}{\beta - 1}(\beta_c - 1)$. Jest to wyrażenie na naprężenie promieniowe na promieniu $\varrho_c$ kuli, natomiast dla kuli sprężystej jest to ciśnienie wewnętrzne działające wraz z temperaturą $\tau_c$. Podstawiając wyrażenie (3.12) do równości (3.10) i uwzględniając wyrażenie (2.8) po wykonaniu operacji całkowania oraz po żmudnych przekształceniach otrzymamy następujące wyrażenie na $\tau_{0c}$:

$$\tau_{0c} = \frac{A - B}{C - D + F}, \tag{3.13}$$

gdzie:

$$A = 2\beta^3(\beta - 1)\cdot(m - 1)\cdot(3\beta_c^3 \ln\varrho_c + \beta_c^3 - 1),$$
$$B = 4\varrho_c^3(\beta^3 - 1)\cdot(1 - \nu)m\beta_c^3(\beta - 1),$$
$$C = \beta^3(m - 1)\beta_c\cdot(2\beta_c^3 - 3\beta_c^2 + 1),$$
$$D = 2(\beta^3 - 1)\cdot(1 - \nu)m\beta_c^3\{2\varrho_c^3(\beta_c - 1) - [3\beta(\varrho_c^2 - 1) - 2(\varrho_c^3 - 1)]\}.$$
$$F = 2(1 - \nu)m(\beta - 1)\beta_c^3(\beta^2 + \beta - 2).$$

Kładąc w wyrażeniu na $\tau_{0c}$ — (3.13) wartość współczynnika wzmocnienia $m = 0$, otrzymać można następujące równanie, analogiczne do równania przedstawionego w pracy [5] oraz [3], mianowicie:

$$\tau_{0c}\Big|_{m=0} = \frac{2(\beta-1)\cdot(3\beta_c^3\ln\varrho_c+\beta_c^3-1)}{\beta_c(2\beta_c^3-3\beta_c^2+1)}, \tag{3.14}$$

z tym, że wyrażone w odpowiednio innych parametrach. Podstawiając zaś do wyrażenia (3.13) wartość $\varrho_c = 1$ i uwzględniając wielkości (3.11) po przekształceniach otrzymamy:

$$\tau_{0c}\Big|_{\varrho_c=1} = \tau_{0c}' = \frac{2(\beta^2+\beta+1)}{\beta(2\beta+1)}. \tag{3.15}$$

Jest to wyrażenie określające temperaturę potrzebną do zapoczątkowania pierwszego plastycznego płynięcia na wewnętrznej powierzchni kuli. Tego rodzaju zależność była już wyprowadzona w pracach [2], [5] dla przypadku materiału bez wzmocnienia. W przypadku zewnętrznej — sprężystej części kuli (rys. 2) określonej bezwymiarowymi wielkościami (3.11) i w przypadku obciążenia jej tylko gradientem temperatury ($S_{rc} = S_{\Theta c} = 0$), analogiczne wyrażenie otrzyma się kładąc do (3.15) zamiast $\beta$ odpowiednio $\beta_c$. Należy podkreślić w zakończeniu tego punktu, że wyprowadzone równania i warunki słuszne są tylko do momentu pojawienia się drugiej strefy plastycznej na promieniu zewnętrznym kuli.

**3.1. Analiza strefy plastycznej ($1 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_c$).** Stan naprężenia określa się na podstawie równań (3.1) w których uwzględnić należy wyrażenia (2.8), (3.8), (3.13) oraz stałą całkowania $C_1$, którą z kolei otrzymamy z równania (3.2) po uwzględnieniu (2.8) i (3.9). Wyniesie ona,

$$C_1 = \tau_{0c}\left\{\frac{2}{3}\frac{\varrho_c^3}{\beta-1}(\beta_c-1)-\frac{2}{\beta-1}\left[\frac{1}{2}\beta(\varrho_c^2-1)-\frac{1}{3}(\varrho_c^3-1)\right]\right\}-\frac{2}{3}\varrho_c^3. \tag{3.16}$$

Rozkład deformacji wyznaczymy z równań (2.6), (2.10), (3.7) po uprzednim określeniu stanu naprężenia — $S_r$, $S_\Theta$, $S$. Rozkład temperatury, po obliczeniu wartości $\tau_{0c}''$ (temperatura przyłożona do wewnętrznej powierzchni w chwili gdy rozpoczyna się drugie plastyczne płynięcie na zewnętrznym promieniu kuli) wyznaczyć należy z (2.8). Naprężenia resztkowe pozostałe po procesie sprężystego odciążenia, znajdziemy z następujących związków, por. [2], [3]:

$$S_r' = S_r + S_r'', \qquad S_\Theta' = S_\Theta + S_\Theta'', \tag{3.17}$$

gdzie:

$$S_r'' = 2\frac{\varrho^3-1}{\varrho^3(\beta^3-1)}\int_1^\beta \xi^2\tau(\xi)d\xi - \frac{2}{\varrho^3}\int_1^\varrho \xi^2\tau(\xi)d\xi.$$

$$S_\Theta'' = \frac{2\varrho^3+1}{\varrho^3(\beta^3-1)}\int_1^\beta \xi^2\tau(\xi)d\xi + \frac{1}{\varrho^3}\int_1^\varrho \xi^2\tau(\xi)d\xi - \tau(\varrho),$$

$$\tau = -\frac{\tau_{0c}}{\beta-1}\left(\frac{\beta}{\varrho}-1\right), \qquad C_1'' = \frac{2}{\beta^3-1}\int_1^\beta \xi^2\tau(\xi)d\xi.$$

**3.2. Analiza strefy sprężystej** ($\varrho_c \leqslant \varrho \leqslant \beta$). Stan naprężenia określimy z równań (3.1), w których odpowiednio uwzględnia się wyrażenia (2.8), (3.8), (3.12), (3.13) oraz stałą całkowania $C_1$, która jest taka sama jak w strefie plastycznej — wzór (3.16). Rozkład temperatury wyznaczymy podobnie jak w strefie plastycznej ze związku (2.8) przy znajomości $\tau_{0c}''$, natomiast stan deformacji odpowiednio z równań (2.6) i (2.8). Naprężenia resztkowe otrzymamy także z równań (3.17), przy czym naprężenia $S_r$ i $S_\Theta$ należy wziąć ze strefy sprężystej.

**3.3. Druga — zewnętrzna strefa plastyczna.** Warunek uplastycznienia zewnętrznej powierzchni kuli będącej w stanie sprężystym, por. np. [2], [3]÷[5] jest następujący:

$$S = 1 \quad \text{dla} \quad \varrho = \beta, \tag{3.18}$$

gdzie $S$ wyrażone jest równaniem (2.10) oraz równaniami na naprężenia $S_r$ oraz $S_\Theta$ w strefie sprężystej. Odpowiadającą temu stanowi temperaturę $\tau_{0c}''$ po dokonaniu odpowiednich przekształceń przedstawić można następująco,

$$\tau_{0c}'' = \frac{2(\beta-1)\cdot\left[\left(\frac{\beta}{\varrho_c'}\right)^3+1\right]}{\left(\frac{\beta}{\varrho_c'}\right)\cdot\left[\left(\frac{\beta}{\varrho_c'}\right)^2-1\right]}, \tag{3.19}$$

gdzie $\varrho_c'$ jest promieniem strefy sprężysto-plastycznej w chwili gdy na zewnętrznej powierzchni kuli pojawi się drugie uplastycznienie, to znaczy gdy spełniony będzie warunek (3.18). Wartość promienia $\varrho_c'$ określimy podstawiając w równaniu (3.13) w miejsce wartości $\varrho_c$ wartość $\varrho_c'$ i porównując je następnie z wyrażeniem (3.19). Korzystamy zatem ze związku $\tau_{0c}(\varrho_c = \varrho_c') = \tau_{0c}''$. Z takiego porównania wynika, że w przeciwieństwie do materiału bez wzmocnienia — [3]÷[5], [11], temperatura $\tau_{0c}''$ lub co jest równoważne promień $\varrho_c'$ — zależy nie tylko od parametru geometrii kuli $\beta$ lecz także od współczynnika wzmocnienia $m$ oraz od współczynnika Poissona $\nu$. Dla przypadku materiału bez wzmocnienia ($m = 0$), promień $\varrho_c'$ określić można po podstawieniu $\varrho_c = \varrho_c'$ we wzorze (3.14) oraz po porównaniu tego wzoru z (3.19). Czyli [5]:

$$\varrho_c'\Big|_{m=0} = \exp\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\frac{\beta}{\varrho_c'}\right)^2-2\left(\frac{\beta}{\varrho_c'}\right)+1}{\left(\frac{\beta}{\varrho_c'}\right)}\right]. \tag{3.20}$$

Otrzymanie wyrażenia analogicznego do (3.20) lecz dla materiału ze wzmocnieniem nie jest możliwe ze względu na złożony i uwikłany charakter funkcji $\tau_{0c} = f(\varrho_c)$ — por. (3.13). W pracy [3] analizując problem uplastycznienia pierwszej i drugiej strefy plastycznej grubościennych kul, autorzy rozpatrzyli między innymi warunki występowania tych stref. Z uzyskanych przez tych autorów rezultatów wynika, że dla kul obciążonych tylko gradientem temperatury istnieją dwie możliwości pojawienia się drugiej strefy plastycznej i które to zależą tylko od parametru geometrii kuli $\beta$. Gdy mianowicie $\beta$ jest większe od pewnego $\beta_{cr}$ ($\beta \geqslant \beta_{cr}$), to drugie uplastycznienie pojawi się w ściance kuli, natomiast gdy $\beta$ jest mniejsze od tej wartości ($\beta \leqslant \beta_{cr}$) to uplastycznienie to pojawi się na zewnętrznej powierzchni kuli i będzie propagować się do wewnątrz. W przypadku materiału bez wzmocnienia wartości $\beta_{cr} = 2.791$ była pierwszy raz określona w pracy [5] a następnie cytowana i używana w pracach [3]÷[4]. Dla przyjętego w obecnej pracy materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem, wartość $\beta_{cr}$ zależy dodatkowo od współczynnika wzmocnienia $m$ i od współczynnika Poissona $\nu$. Wartości $\beta_{cr}$ i odpowiadające im temperatury $\tau_{0cr}''$ lub co jest równoważne — odpowiadające im promienie strefy sprężysto-plastycznej $\varrho_{cr}'$ dla danego $m$ i $\nu$ określa się z następującej zależności:

$$\left.\frac{\partial S(\tau_{0cr}'', \varrho, m, \beta, \nu)}{\partial \varrho}\right|_{\varrho=\beta} = \left.\frac{\partial S(\varrho_{cr}', \varrho, \beta, m, \nu)}{\partial \varrho}\right|_{\varrho=\beta} = 0, \tag{3.21}$$

oraz z równań (3.13) i (3.19).

Funkcję $S$ we wzorze (3.21) wyznaczyć należy z zależności (2.10) i równań naprężeniowych $S_r$, $S_\Theta$ termosprężystości określonych dla górnej — sprężystej części badanej kuli. Otrzymane na drodze numerycznej rezultaty są przedstawione w tabeli pierwszej, dla wybranych wartości współczynnika wzmocnienia $m$ z przedziału $\langle 0 \div 0.4 \rangle$ i dla przyjętego we wszystkich dalszych obliczeniach wartości współczynnika Poissona $\nu = 0.3$. Jest to jakościowo jeden z zasadniczych rezultatów uzyskanych w niniejszej pracy.

**Tabela 1**

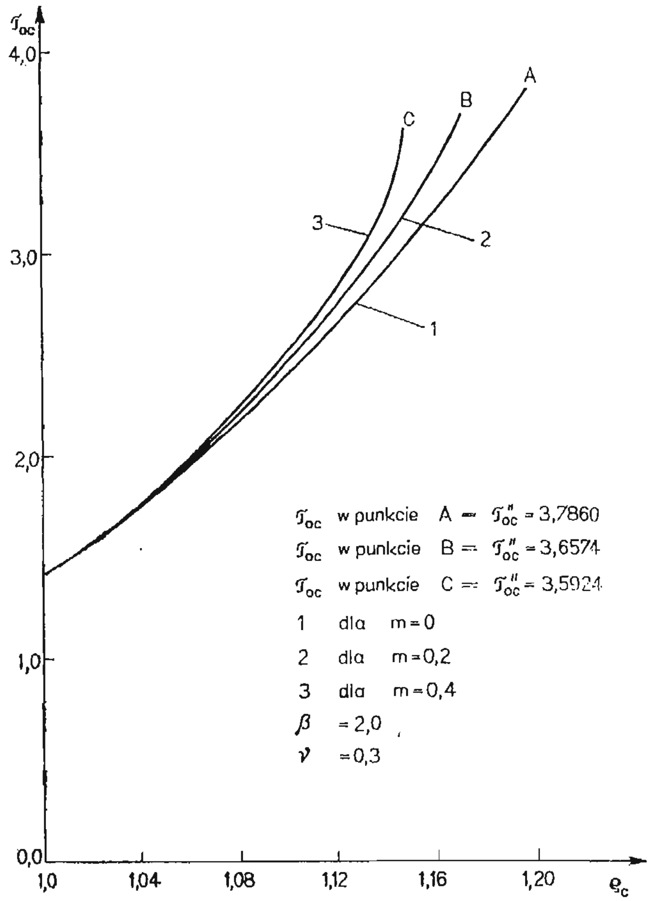
| Współczynnik Poissona $\nu = 0.3$ | | | |
|---|---|---|---|
| $m$ | $\beta_{cr}$ | $\tau_{0cr}''$ | $\varrho_{cr}'$ |
| 0.00 | 2.7910 | 5.3640 | 1.3950 |
| 0.10 | 2.6214 | 4.8643 | 1.3107 |
| 0.20 | 2.5453 | 4.6359 | 1.2726 |
| 0.30 | 2.4983 | 4.4948 | 1.2492 |
| 0.40 | 2.4655 | 4.3964 | 1.2328 |

Jak widać z powyższej tabeli, wyznaczone wartości $\beta_{cr}$, $\tau_{0cr}''$, oraz $\varrho_{cr}'$ maleją wraz ze wzrostem współczynnika wzmocnienia $m$.

## 4. Analiza otrzymanych wyników

Z tabeli pierwszej wynika, że dla przyjętego do obliczeń parametru geometrii kuli $\beta = 2$ oraz dla współczynnika Poissona $\nu = 0.3$, drugie uplastycznienie pojawi się na zewnętrznej powierzchni badanej kuli, co jest w zgodności z nałożonymi warunkami brzegowymi wyprowadzonych w punkcie trzecim równań.

Na rysunku trzecim wykreślono zależność $\tau_{0c}$ od $\varrho_c$ dla trzech wybranych wartości parametru wzmocnienia $m$. Punkty „$A$", „$B$", „$C$", oznaczają wartości temperatur $\tau_{0c}$ i odpowiednio wartości promienia $\varrho_c$ w chwili gdy zaczyna się drugie plastyczne płynięcie na zewnętrznej powierzchni kuli. Jak widać temperatura $\tau_{0c}''$ maleje wraz ze wzrostem współczynnika wzmocnienia. Maleć będzie więc także temperatura $\tau_c''$, oraz maleć będzie promień strefy sprężysto-plastycznej $\varrho_c'$. Dokładne określenie powyższych wielkości znaj-

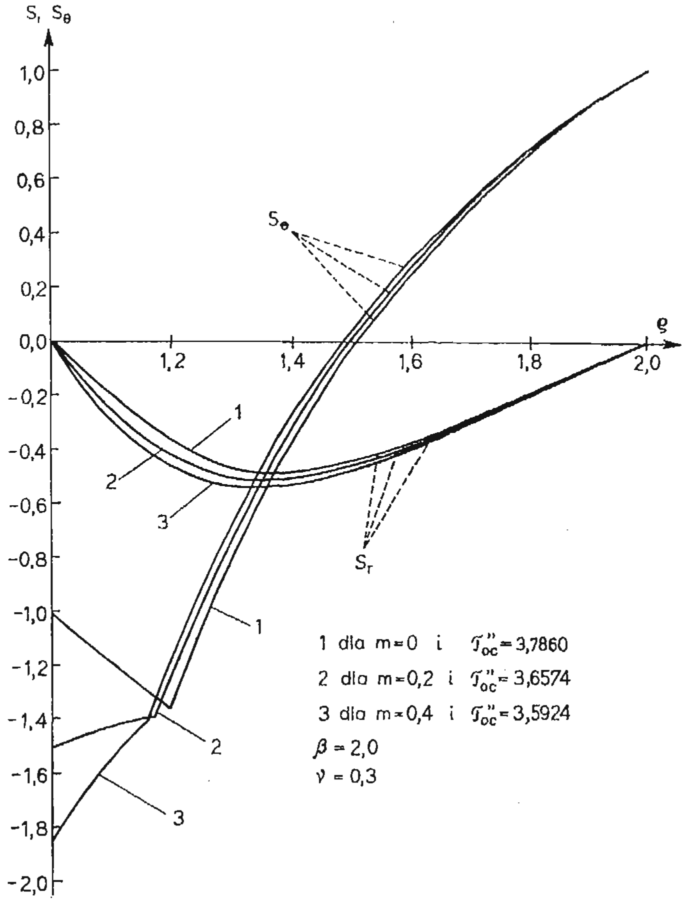



Rys. 3

duje się w tabeli drugiej, dla przyjętych wartości współczynnika geometrii kuli i współczynnika Poissona. Rysunki czwarty i piąty przedstawiają odpowiednio rozkład naprężeń i odkształceń w ściance kuli podczas procesu obciążania i dla wybranych wartości parametru wzmocnienia *m*.

Tabela 2

| $\beta = 2.0$, | $\nu = 0.3$, | $S = 1$ | dla $\varrho = \beta$ |
|---|---|---|---|
| $m$ | $\tau''_{oc}$ | $\tau''_c$ | $\varrho'_c$ |
| 0.00 | 3.7860 | 2.5400 | 1.1970 |
| 0.10 | 3.7078 | 2.5662 | 1.1820 |
| 0.20 | 3.6574 | 2.5856 | 1.1727 |
| 0.30 | 3.6207 | 2.6004 | 1.1640 |
| 0.40 | 3.5924 | 2.6123 | 1.1579 |

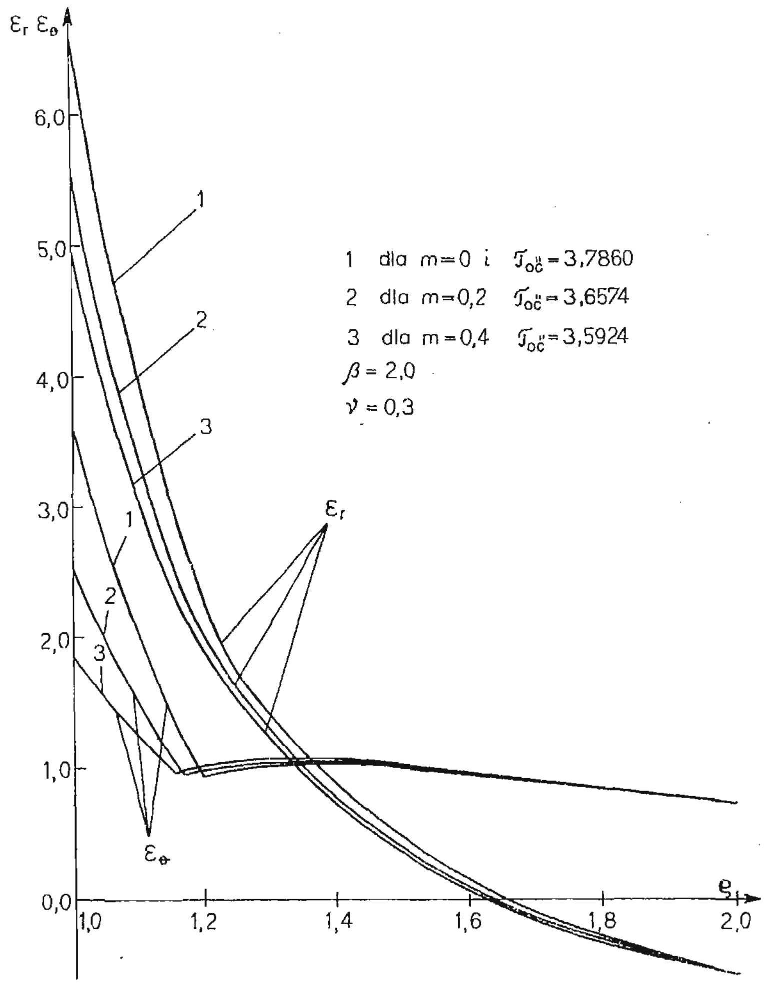



Rys. 4

Rozkład naprężeń resztkowych powstałych po procesie czystego sprężystego odciążenia zilustrowano na rysunku szóstym. Warunek aby proces odciążania przebiegał czysto sprężyście otrzymać można z równania na $S_\Theta''$ — $(3.17)_4$, po uwzględnieniu w nim wyrażenia $(3.17)_5$ i po przeprowadzeniu całkowania. Otrzymamy wówczas, por. np. [3]:

$$\tau_{0c}^{''r} = \frac{4(\beta^2+\beta+1)}{\beta(2\beta+1)} (-S_\Theta)\big|_{\varrho=1} \geqslant \tau_{0c}'', \tag{4.1}$$

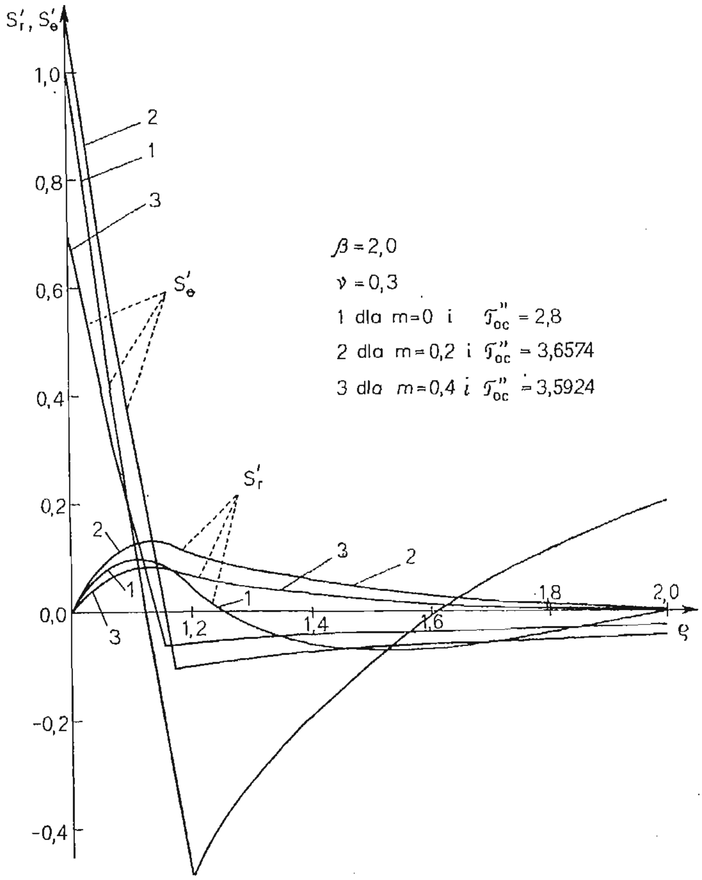
gdzie $\tau_{0c}^{''r}$ oznacza maksymalną wartość temperatury jaką należy przyłożyć do wewnętrznej powierzchni kuli bez obawy, że w procesie odciążenia zachodzić będą lokalne procesy plastycznego płynięcia. W wyniku przeprowadzonych obliczeń z równania (4.1) wynika, że gdy $m \geqslant 0.11436$, to wówczas można przyłożyć temperaturę $\tau_{0c}^{''!}$ w miejsce $\tau_{0c}^{''r}$ aby zachodził proces czysto sprężystego odciążania. Powyższe przedstawiono w tabeli trzeciej. Dla przypadku materiału bez wzmocnienia mamy $(-S_\Theta)|_{\rho=1} = 1$, więc wartość temperatury $\tau_{0c}^{''r}$ jest dwukrotnie większa od wartości temperatury potrzebnej do pierwszego




Rys. 5

**Tabela 3**

| $\beta = 2.0 \quad \nu = 0.3$ | | |
|---|---|---|
| $m$ | $\tau'''_{0c}$ | $\tau''_{0c}$ |
| 0.00 | 2.8000 | 3.7860 |
| 0.10 | 3.6000 | 3.7078 |
| 0.11436 | 3.6994 | 3.6994 |
| 0.20 | 4.2318 | 3.6574 |
| 0.30 | 4.7555 | 3.6207 |
| 0.40 | 5.2021 | 3.5923 |




Rys. 6

uplastycznienia wewnętrznej powierzchni kuli $\tau'_{0c}$. Zatem wiedząc, że $\tau'_{0c} = 1.4$, mamy, por. np. [3]:

$$\tau''^{r}_{0c} = 2\tau'_{0c} = 2.8. \tag{4.2}$$

Dalsze rozwinięcie zagadnienia naprężeń resztkowych można przeprowadzić badając materiał kuli, w którym granica plastyczności zależy od temperatury. Takie próby były podejmowane lecz jedynie dla materiału bez wzmocnienia. W rozważanym przypadku przyjęcie granicy plastyczności jako niezależnej od temperatury jest uproszczeniem, gdyż otrzymane na podstawie równania (2.8) wymiarowe temperatury $T_a(m)$ wynoszą:

$$T_a = \begin{cases} 459\ \mathrm{C}^\circ & \text{dla} \quad m = 0.0, \\ 443\ \mathrm{C}^\circ & \text{dla} \quad m = 0.2, \\ 435\ \mathrm{C}^\circ & \text{dla} \quad m = 0.4. \end{cases} \tag{4.3}$$

Temperatury te odpowiadają punktom „$A$", „$B$", „$C$" z rysunku drugiego. Do obliczeń przyjęto: granicę plastyczności materiału $\sigma_0 = 4000$ kG/cm$^2$, moduł Younga $\mathrm{E} = 2.1 \times$ $\times 10^6$ kG/cm$^2$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$, oraz współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$ 1/K.

W zakończeniu warto dodać, że w przypadku kuli z materiału ze wzmocnieniem, podobnie jak w przypadku kuli z materiału bez wzmocnienia [5], pełne uplastycznienie ścianki kuli nastąpi dla temperatury $\tau_{0c}$ osiągającej wartość nieskończenie wielką.

### Literatura cytowana w tekście


1. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, 1947.
2. A. MENDELSON, *Plasticity: Theory and Application*, The Macmillan Company, New York 1968.
3. W. JOHNSON and P. B. MELLOR, *Elastic-plastic behaviour of thick-walled spheres of non-work-hardening material subject to a steady-state radial temperature gradient*, Int. Journal of Mech. Sciences, Vol. 4, 147, March - April 1962.
4. F. DRABBLE and W. JOHNSON, *The development of the Zones of Yielding in Thick-walled Spherical Shells of Non-work hardening Material Subjected to a Steady State Radial Temperatures Gradient and on Internal or External Pressure*. Conf. on Thermal Loading and Creep, Paper 19, Inst. Mech. Engrs., 1964.
5. G. R. COWPER, *The Elastoplastic Thick-Walled Sphere Subjected to a Radial Temperature Gradient*, Transaction of the ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., Vol. 27, Ser. E, No. 3, 1960.
6. H. A. NIED and S. C. BATTERMAN, *On Coupled Thermoplasticity: An Exact Solution for a Spherical Domain*, Israel Journal of Technology, Vol. 9, Nos, 1 - 2, 1971 pp. 37 - 46.
7. B. RANIECKI, *Naprężenia w sprężysto-plastycznej kuli z pustką kulistą znajdującej się w zmiennym polu temperatur*, Rozpr. Inż. 3, 14, 1966.
8. B. RANIECKI, *A Quasistatic, Spherically Symmetric Problem of Thermoplasticity*, Bull. Acad. Sci., Ser. Sci. Techn., 2, 13, 1965.
9. H. PARKUS, *Spannungen beim Abkühlen einer Kugel*, Ing.-Arch., 28, 1959, pp. 251 - 254.
10. P. PERZYNA and A. SAWCZUK, *Problems of Thermoplasticity*, Nuclear Engineering and Design, 24, 1973, 1 - 55, North-Holland Publ. Comp.
11. M. G. DERRINGTON and W. JOHNSON, *The Onset of Yield in a Thick Spherical Shell Subject to Internal Pressure and Uniform Heat Flow*. Appl. Sci. Research, Series A, 7, 408, 1968.
12. W. JOHNSON and P. B. MELLOR, *Engineering Plasticity*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1973.
13. A. SAWCZUK, *A note on plastic expansion of irradiated spherical shells*, Nucl. Struct. Engn., 1, pp. 155 - 158, 1965.
14. R. S. BODNER, *Elasto-plastic Stress Analysis of Thick-Walled Spherical Shells Subjected to Radial Temperature Gradient*, AVCOR and D, Division, Lawrence, Mass, Report, No, RADT — R-2-57-25, 1957.
15. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1950.
16. M. SOKOŁOWSKI, *Naprężenia cieplne w powloce kulistej oraz cylindrycznej w przypadku materiałów o własnościach zależnych od temperatury*, Rozprawy Inżynierskie, Tom VIII, zeszyt 4, pp. 641 - 669, 1960.
17. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1962.
18. W. NOWACKI, *Dynamiczne Zagadnienia Termosprężystości*, PWN, Warszawa, 1966.
19. J. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, N.Y., second edition, 1956, pp. 362 - 364.
20. B. A. BOLEY and J. H. WEINEV, *Theory of Thermal Stress*, Wiley, New York, 1960.



### Резюме

### ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА УПРОЧНЕНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА ПОД НАГРУЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

В работе исследовано влияние линейного параметра упрочнения на поведение толстостенного шара подвергнутого нагрузкой температуры. Изучено влияние параметра укрепления на распределение температуры деформации, напряжения а также на положение упруго-пластической зоны.

Определено также критические величины геометрического параметра $\beta$ для случая когда другая пластическая зона появляется снаружи шара.

Summary

ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOUR OF THICK-WALLED SPHERE OF WORK-HARDENING MATERIAL SUBJECT TO A RADIAL TEMPERATURE GRADIENT

The paper consider the influence of strain-hardening on the behaviour of elastic-plastic thick walled sphere under temperature load. The distributions of temperature, strain, stress and localisation of elastic-plastic bound for various values of strain-hardening parameter are given. Critical values of geometrical parameter $\beta$ for which form the second plastic zone are defined.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 listopada 1982 roku*