

STATECZNOŚĆ DRGAŃ PARAMETRYCZNYCH WAŁU NAPĘDZAJĄCEGO MECHANIZMY ROZMIESZCZONE RZĘDOWO

STANISŁAW WIŚNIEWSKI (POZNAŃ)

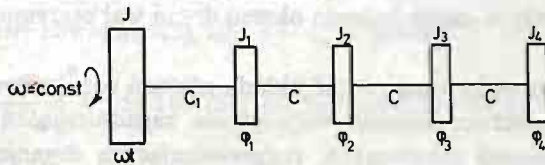
Politechnika Poznańska

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności drgań parametrycznych wału skręcanego siłami bezwładności napędzanych przez niego czterech jednakowych mechanizmów rozmieszczonych rzędowo. Wyznaczono dwa główne obszary niestateczności drgań.

Aby zachować większą ogólność rozważań, przyjmuje się, że mechanizmy mogą mieć dowolną strukturę. Są jednak płaskie i wykonują ruch ciągły o okresie równym okresowi wału napędowego.

Płaszczyzny ruchu mechanizmów, podobnie jak w silnikach tłokowych, przyjęto prostopadłe do osi wału napędowego równomiernie rozłożone, przy czym napęd mechanizmów środkowych, tzn. 2 i 3-go, przyjęto przesunąć w fazie o pół obrotu wału.

Model rozpatrywanego układu przedstawia rys. 1.



Rys. 1

Momenty bezwładności zredukowanych do osi wału mechanizmów jako funkcje ciągłe są przedstawione w postaci skończonych szeregów Fouriera. Zakładając stałą prędkość kątową ω koła zamachowego wału o momencie bezwładności J , możemy zatem napisać:

$$J_1(t) = J_4(t) = \sum_{i=0}^n A_i \cos(i\omega t + \delta_i) \quad (1)$$

$$J_2(t) = J_3(t) = \sum_{i=0}^n A_i (-1)^i \cos(i\omega t + \delta_i).$$

Jest to oczywiste, gdyż kąty skręcania wału spowodowane reakcjami napędzanych mechanizmów są pomijalnie małe w porównaniu z jego kątem obrotu.

Zakładając jednakowe sztywności na skręcanie c odcinków wału zawartych między zredukowanymi masami mechanizmów, równania różniczkowe ruchu drgającego wału, bez udziału sił technologicznych, mają postać:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + \dot{J}_1 \dot{\varphi}_1 + (c_1 + c) \varphi_1 - c \varphi_2 &= -\dot{J}_1 \omega, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + \dot{J}_2 \dot{\varphi}_2 + 2c \varphi_2 - c(\varphi_1 + \varphi_3) &= -\dot{J}_2 \omega, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + \dot{J}_3 \dot{\varphi}_3 + 2c \varphi_3 - c(\varphi_2 + \varphi_4) &= -\dot{J}_3 \omega, \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 + \dot{J}_4 \dot{\varphi}_4 + c \varphi_4 - c \varphi_3 &= -\dot{J}_4 \omega, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, oraz φ_4 są kątami skręcenia wału w miejscach odpowiednich mechanizmów.

Otrzymane równania stanowią sprzężony układ równań różniczkowych liniowych o okresowo zmiennych współczynnikach.

W dalszych rozważaniach zajmiemy się wyznaczeniem obszarów rezonansu drgań parametrycznych, a zatem prędkości kątowych wału, przy których będzie następował nieograniczony wzrost całek równań jednorodnych układu (2).

Ze względów użytecznych dla konstruktorów projektujących tego typu napędy zajmiemy się wyznaczeniem obszarów rezonansowych, jakie mogą zachodzić między określonymi harmonicznymi wymuszenia parametrycznego a określoną postacią drgań swobodnych wału. Z uwagi na liniowy charakter równań różniczkowych ruchu (2) jest to oczywiście możliwe.

Rozpatrując k -tą harmoniczną wymuszenia, wyznaczmy granice rezonansu z najbardziej podatną na to wymuszenie harmoniczną drgań swobodnych wału, to jest $k/2$. Jest to oczywiste, gdyż wtedy w czasie jednego okresu drgań wał otrzymuje dwukrotnie energię z zewnątrz.

Ze względu na skomplikowaną postać układu równań różniczkowych ruchu (2) zostanie zastosowana przybliżona metoda rozwiązania zagadnienia, a mianowicie metoda ortogonalizacji. Rozwiązań granicznych, rozgraniczających drgania rosnące od malejących, poszukiwać będziemy w postaci:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sum_{\nu=1,3,5} \theta_{1,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_2(t) &= \sum_{\nu=1,3,5} \theta_{2,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_3(t) &= \sum_{\nu=1,3,5} \theta_{3,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_4(t) &= \sum_{\nu=1,3,5} \theta_{4,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t. \end{aligned} \quad (3)$$

W wyniku ortogonalizacji z układem równań różniczkowych w obszarze $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{k\omega}$,

otrzymuje się układ równań jednorodnych liniowych względem amplitud θ_{1v} , θ_{2v} , θ_{3v} , i θ_{4v} .

Z warunku nietrywialności rozwiązań otrzymanych równań algebraicznych, dla $\nu = 1$, otrzymuje się równanie jednej z gałęzi głównego obszaru niestateczności w postaci

$$\begin{vmatrix} -p^2(1+\eta)+4(1+\varepsilon); & -4 & ; & 0 & ; & 0 \\ -4 & ; & -p^2[1+(-1)^k\eta]+8; & -4 & ; & 0 \\ 0 & ; & -4 & ; & -p^2[1+(-1)^k\eta]+8; & -4 \\ 0 & ; & 0 & ; & -4 & ; & -p^2(1+\eta)+4 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu oznaczono

$$\eta = \frac{A_k}{A_0} \cos \delta_k; \quad \varepsilon = \frac{c_1}{c} \quad \text{oraz} \quad p^2 = \frac{A_0 k^2 \omega^2}{c}.$$

Po rozwiązaniu wyznacznika otrzymuje się równanie

$$\begin{aligned} & p^8(1+0,5\eta)^2[1+0,5(-1)^k\eta]^2 - 4p^6(1+0,5\eta)[1+0,5(-1)^k\eta] \times \\ & \times \{4(1+0,5\eta) + (2+\varepsilon)[1+0,5(-1)^k\eta]\} + 16p^4 \{3(1+0,5\eta)^2 + \\ & + 2(3+2\varepsilon)(1+0,5\eta)[1+0,5(-1)^k\eta] + (1+\varepsilon)[1+0,5(-1)^k\eta]^2\} + \\ & - 64p^2(2+3\varepsilon)\{2+0,5\eta[1+(-1)^k]\} + 256\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Dla $\eta = 0$ równanie (5) staje się równaniem częstości własnych drgań skrętnych wału. Częstość podstawowa dla $\varepsilon = 1$ wynosi

$$\Omega_0 = \sqrt{0,120\ 615 \frac{c}{A_0}}. \quad (6)$$

Przedstawiamy dalej równanie (5), dla $\varepsilon = 1$, w postaci

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^8 0,054\ 180\ 78(1+0,5\eta)^2[1+0,5(-1)^k\eta]^2 + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^6 (1+0,5\eta)[1+0,5(-1)^k\eta] \{1,796\ 817\ 3(1+0,5\eta) + \\ & + 1,347\ 612\ 96[1+0,5(-1)^k\eta]\} + \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^4 \{11,172\ 847\ 28(1+0,5\eta)^2 + \\ & + 37,242\ 824\ 25(1+0,5\eta)[1+0,5(-1)^k\eta] + 7,448\ 564\ 86[1+0,5(-1)^k\eta]^2\} + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^2 154,3872\{2+0,5[1+(-1)^k\eta]\} + 256 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie częstość drgań wymuszonych parametrycznie k -tą harmoniczną oznaczono $\Omega = k\omega$.

Otrzymane równanie (7), jest szukaną gałęzią pierwszego głównego obszaru niestateczności.

Drugą gałąź głównego obszaru niestateczności otrzymamy poszukując całek równań różniczkowych jednorodnych układu (2) w postaci:

$$\varphi_1(t) = \theta_{11} \cos \frac{k\omega}{2} t, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \theta_{21} \cos \frac{k\omega}{2} t, \\ \varphi_3(t) &= \theta_{31} \cos \frac{k\omega}{2} t, \\ \varphi_4(t) &= \theta_{41} \cos \frac{k\omega}{2} t.\end{aligned}\tag{8}$$

[cd.]

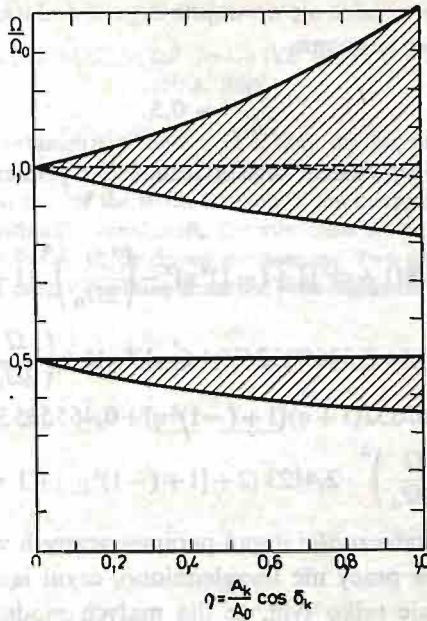
W wyniku analogicznego postępowania krzywa zamykająca główny obszar niestateczności, także dla $\varepsilon = 1$, przybiera postać przedstawioną wzorem (9):

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^8 0,05418078(1-0,5\eta)^2 [1-0,5(-1)^k \eta]^2 + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^6 (1-0,5\eta) [1-0,5(-1)^k \eta] \{1,7968173(1-0,5\eta) + \\ & + 1,34761296[1-0,5(-1)^k \eta]\} + \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^4 \{11,17284728(1-0,5\eta)^2 + \\ & + 37,24282425(1-0,5\eta) [1-0,5(-1)^k \eta] + 7,44856486[1-0,5(-1)^k \eta]^2\} + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^2 \cdot 154,3872 \{2-0,5[1+(-1)^k \eta]\} + 256 = 0.\end{aligned}\tag{9}$$

W tabeli 1 oraz na rys. 2 przedstawiono wyniki obliczeń dla wałów o parametrze $\varepsilon = 1$. Górny obszar przedstawia główną strefę rezonansową z dowolną harmoniczną wymuszenia parametrycznego — szeroki dla k parzystego, wąski — zaznaczony linią przerywaną dla k nieparzystego. Drugi obszar niestateczności przedstawiono na wykresie tylko dla harmonicznym parzystych. Dla harmonicznym nieparzystych drugi obszar niestateczności praktycznie sprowadza się do prostej $\frac{\Omega}{2\Omega_0} = 0,5$.

Tabela 1

		η	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{\Omega}{2\Omega_0}$	I obszar	$k = 2n$	1	1,054	1,116	1,195	1,291	1,415
				0,952	0,913	0,877	0,845	0,816
		$k = 2n+1$	1	1,009	1,005	1,002	1,001	0,999
				0,998	0,995	0,992	0,979	0,971
	II obszar	$k = 2n$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
				0,456	0,422	0,395	0,372	0,353
		$k = 2n+1$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
				0,5	0,5	0,498	0,495	0,491



Rys. 2

Drugi obszar niestateczności drgań, wymuszonych także k -tą harmoniczną, otrzymano dla drgań swobodnych o dwukrotnie mniejszym niż poprzednio okresie, a mianowicie:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{1,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t; & \varphi_2(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{2,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_3(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{3,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t; & \varphi_4(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{4,\nu} \sin \frac{\nu k \omega}{2} t, \end{aligned} \quad (10)$$

oraz

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{1,\nu} \cos \frac{\nu k \omega}{2} t; & \varphi_2(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{2,\nu} \cos \frac{\nu k \omega}{2} t, \\ \varphi_3(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{3,\nu} \cos \frac{\nu k \omega}{2} t; & \varphi_4(t) &= \sum_{\nu=2,4} \theta_{4,\nu} \cos \frac{\nu k \omega}{2} t. \end{aligned} \quad (11)$$

W wyniku analogicznego postępowania dla funkcji (10) otrzymuje się równanie o postaci (dla $\varepsilon = 1$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^8 - 14,508975 \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^6 + 64,441944 \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^4 - 89,046338 \times \\ \times \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^2 + 18,45673 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Jest to równanie częstości drgań skrętnych wału. Zatem jedna z krzywych granicznych

poszukiwanego obszaru sprowadza się do najniższego z dodatnich pierwiastków równania (12), a zatem do prostej o równaniu

$$\frac{\Omega}{2\Omega_0} = 0,5. \quad (13)$$

Zamykająca krzywa drugi obszar niestateczności, wyznaczona dla funkcji (11), ma natomiast postać (dla $\varepsilon = 1$):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^8 0,05418078(1+\eta)^2 [1+(-1)^k \eta]^2 - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^6 (1+\eta) [1+(-1)^k \eta] \times \\ & \times \{0,44920432(1+\eta) + 0,33690324 [1+(-1)^k \eta]\} + \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^4 \{0,69830295 \times \\ & \times (1+\eta)^2 + 2,32767652(1+\eta) [1+(-1)^k \eta] + 0,4655353 [1+(-1)^k \eta]^2\} + \\ & - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)^2 \cdot 2,4123 \{2 + [1+(-1)^k \eta]\} + 1 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Dalszych obszarów niestateczności drgań parametrycznych wału nie wyznaczono, gdyż dyssypacja energii, której w pracy nie uwzględniono, czyni je niegroźnymi.

Jest to spowodowane nie tylko tym, że dla małych modulacji są one obcięte przez dyssypację, ale jako wąskie na skutek małej ilości dostarczanej energii z zewnątrz w czasie jednego cyklu drgań i nisko położone, są łatwe do przekroczenia przy stosunkowo małej zmianie prędkości kątowej ω .

Dla wałów rozpatrywanego typu — szczególnie wałów korbowych silników spalinyowych lub sprężarek tłokowych — częstość podstawowa Ω_0 drgań skrętnych, przy zredukowanych masach napędzanych mechanizmów do stałego wyrazu A_0 , jest bardzo wysoka

Zredukowane momenty bezwładności (1) są sumami bardzo szybko zbieżnych szeregów Fouriera. Jeżeli jednak istnieją nie pomijalnie małe amplitudy względne $\frac{A_k}{A_0} \cos \delta_k$ dla wyższych harmonicznnych parzystego rzędu, np. dla $k = 6$, to wtedy drugi obszar niestateczności, a właściwie jego dolna krzywa, może realnie ograniczać maksymalną prędkość kątową ω wału.

W obecnych konstrukcjach rozpatrywanego typu obszar stateczności zawarty między drugim i pierwszym (głównym) obszarem niestateczności nie jest wykorzystywany.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ВЕДУЩЕГО РЯДОВО РАСПОЛОЖЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ

В работе рассмотрено проблему устойчивости параметрических колебаний вала ведущего рядово расположенные механизмы.

Исследовано случаи четырех одинаковых механизмов непрерывного движения с периодом равным периоду оборотов вала, расположенных идентично как в четырехтактном двигателе внутреннего сгорания с плоским коленчатым валом. Параметрические вынужденные колебания осуществляются крутящим моментом происходящим из-за сил инерции ведомых механизмов.

Определено две главные области неустойчивости колебаний и обнаружено опасную роль четных гармоник параметрического вынуждения.

S u m m a r y

PARAMETRIC VIBRATION STABILITY OF A DRIVE SHAFT FOR MECHANISMS SPACED
IN A ROW

A problem of stability of parametric vibrations of a shaft driving the mechanisms spaced in a row is considered. Investigation is limited to the case of four identical mechanisms exhibiting continuous motion with the period equal to that of the shaft. Spacing of the mechanisms is assumed to be the same as in a I.C. fourstroke engine with a flat crankshaft. The vibrations are being forced parametrically by the torques induced by the inertial forces of the driven mechanisms. Two main regions of instability of the vibrations are determined. The danger resulting from the even harmonics of the parametric forcing has been indicated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 października 1980 roku
