

STATECZNOŚĆ PROSTOKĄTNYCH PŁYT PRZEKŁADKOWYCH O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI WYPEŁNIACZA

WŁADYSŁAW WALCZAK, MARIA KOTELKO (ŁÓDŹ)

Politechnika Łódzka

1. Wstęp

Konstrukcje cienkościennie, w których głównymi elementami nośnymi są jednowarstwowe płyty izotropowe bądź cienkie trójwarstwowe płyty przekładkowe, znajdują obecnie coraz większe zastosowanie nie tylko w przemyśle lotniczym, lecz również w innych dziedzinach techniki. W wielu przypadkach płytowe elementy tych konstrukcji pracują przy obciążeniach typu tarczowego i wówczas poziom obciążenia całej konstrukcji limitowany jest na ogół poziomem obciążeń krytycznych tych elementów.

W przypadku płyt jednowarstwowych, pracujących przy obciążeniach typu tarczowego, skutecznym sposobem podwyższenia ich nośności jest zastosowanie odpowiedniego uźebrowania. Sposób ten, wprawdzie możliwy do zastosowania również w przypadku płyt przekładkowych, nie jest jednak tak powszechny jak w przypadku płyt jednowarstwowych. Zastosowanie bowiem wewnętrznego uźebrowania wzmacniającego, tj. uźebrowania umieszczonego pomiędzy okładzinami zewnętrznymi płyty przekładkowej (wewnątrz wypełniacza), wiąże się z trudnościami natury technologicznej, natomiast zastosowanie uźebrowania zewnętrznego jest w wielu konstrukcjach przekładkowych bardzo niepożądane. Z tego względu w ostatnich latach zrodziła się koncepcja podwyższenia nośności płyt przekładkowych, pracujących w warunkach obciążenia tarczowego nie przez stosowanie żeber wzmacniających, lecz przez odpowiednią zmianę sztywności ich wypełniacza.

W przypadku lekkich wypełniaczy, np. typu pianki poliuretanowej, zmianę sztywności uzyskuje się przez odpowiednią, racjonalną zmianę gęstości wypełniacza. Jak bowiem wynika z danych literaturowych oraz badań własnych, moduł sprężystości postaciowej G_w pianki poliuretanowej jest — w przybliżeniu — kwadratową funkcją jej gęstości.

Zagadnienie wzrostu obciążalności płyt przekładkowych przez zastosowanie lekkich wypełniaczy typu piankowego o zmiennej sztywności jest jednakże rozpoznane w bardzo skromnym zakresie. Z dostępnych opracowań wymienić tu można prace [3], [4] i [5]. Z wymienionych prac dwie, pierwsze dotyczą obciążeń krytycznych prostokątnych tarcz przekładkowych z wypełniaczem, którego sztywność zmienia się wzdłuż przekroju poprzecznego tarczy. Na szczególną uwagę zasługują rozpatrzone w pracy [3] przypadki tarcz o skokowo zmiennej sztywności wypełniacza, poddanych działaniu równomiernego, jednokierunkowego ściskania. Rozpatrzono w niej teoretyczny przypadek tarczy trój-

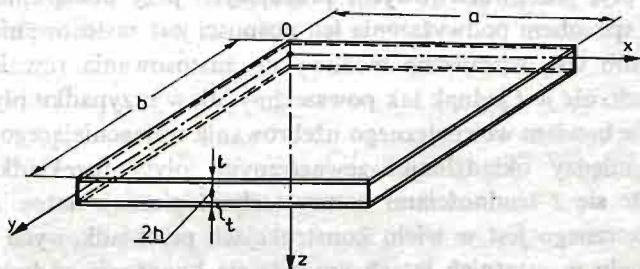
warstwowej o nieskończonej szerokości, a także trójwarstwowej tarczy prostokątnej, której sztywność wypełniacza zmieniała się w kierunku równoległym do kierunku ściskania.

W pracy [5] rozpatrzono natomiast przypadek zmiany sztywności wypełniacza w kierunku prostopadłym do płaszczyzny środkowej tarczy. Stanowi to jednak odrębne zagadnienie, dotyczące głównie grubych tarcz, ulegających lokalnej utracie stateczności.

Jak wynika z procesu technologicznego, istnieje możliwość uzyskania zmiany gęstości, a zatem i modelowania sztywności piankowych wypełniaczy płyt przekładkowych w stosunkowo łatwy sposób. Z tego względu przeprowadzenie analizy wpływu rozkładu sztywności wypełniacza na poziom obciążeń krytycznych cienkich, prostokątnych płyt przekładkowych z lekkim wypełniaczem oraz wykorzystanie wyników tej analizy do optymalnego modelowania sztywności wypełniacza ma duże znaczenie zarówno poznawcze, jak i aplikacyjne.

2. Przyjęte założenia i podstawowe równania

Przedmiotem rozważań jest prostokątna trójwarstwowa płyta przekładkowa z lekkim wypełniaczem o długościach krawędzi a i b . Zakłada się, że płyta jest cienka, tj. grubość całkowita $g_c = 2(h+t)$ płyty jest mała w stosunku do długości jej krawędzi. Rozpatrywaną płytę opisano w prostokątnym układzie współrzędnych $0, x, y, z$ (rys. 1).



Rys. 1. Podstawowe oznaczenia trójwarstwowej płyty prostokątnej.

W przypadku ogólnym równanie stateczności tak opisanej płyty — otrzymane w wyniku zredukowania układu równań równowagi, wyrażonych w przemieszczeniach [2] — ma postać:

$$2B \left(h + \frac{t}{2} \right)^2 \nabla^4(w) + \left(1 - \frac{Bh}{G_w} \nabla^2 \right) \left[2D \nabla^4(w) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0, \quad (1)$$

gdzie:

- N_x, N_y i N_{xy} — siły przekrojowe będące z założenia funkcjami zmiennych x oraz y ;
- $w = w(x, y)$ — składowa przemieszczenia dowolnego punktu płyty w kierunku osi z ;
- G_w — moduł sprężystości postaciowej materiału wypełniacza;

$$B = \frac{Et}{1-\nu^2} \text{ — sztywność okładziny;}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \text{ — płytowa sztywność zginania okładziny;}$$

E — moduł sprężystości Younga materiału okładziny;

ν — współczynnik Poissona materiału okładziny.



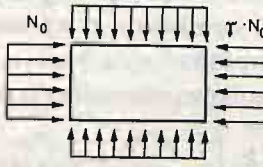

Wymienione wyżej siły przekrojowe N_x , N_y oraz N_{xy} mogą być wyrażone za pomocą jednego tylko parametru obciążenia N_0 . Wprowadzając mianowicie funkcje $F_w = F_w(x, y)$, $F_p = F_p(x, y)$ oraz $F_t = F_t(x, y)$, siły te można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} N_x &= F_w(x, y) \cdot N_0; & N_y &= F_p(x, y) \cdot N_0; \\ N_{xy} &= F_t(x, y) \cdot N_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Postacie funkcji $F_w(x, y)$, $F_p(x, y)$ oraz $F_t(x, y)$ zależą od charakteru tarczowego obciążenia płyty. Dla kilku przykładowo wybranych typów obciążenia płyty, podano je w tabelicy 1.

Tabela 1

Funkcje $F_w(x, y)$, $F_p(x, y)$ i $F_t(x, y)$ dla wybranych przypadków obciążenia płyty.

Lp	Charakter obciążenia płyty	$F_w(x, y)$	$F_p(x, y)$	$F_t(x, y)$
1.	Równomierne, jednokierunkowe ściskanie 	-1	0	0
2.	Jednokierunkowe, niejednakowe ściskanie z udziałem ścinania 	$-\left[\eta - (\eta - 1) \frac{x}{a}\right]$	0	$-\frac{(1-\eta)b}{2a} \cdot 1 - 2 \frac{y}{b}$
3.	Dwukierunkowe równomierne ściskanie 	-1	$-\gamma$	0
4.	Jednokierunkowe liniowo zmienne ściskanie ze ścinaniem 	$-\left(1 - \alpha \frac{y}{b}\right)$	0	γ

W celu uproszczenia obliczeń oraz uogólnienia ich wyników wprowadzono bezwymiarowe współrzędne:

$$\xi = \frac{\pi x}{a} \quad \text{i} \quad \theta = \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

oraz bezwymiarowe współczynniki:

— kształtu płyty

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad (4)$$

— obciążenia

$$\varphi = \frac{N_0 b^2 (1 - \nu^2)}{2\pi^2 E t \left(h + \frac{t}{2} \right)^2}, \quad (5)$$

— podatności wypełniacza

$$k_0 = \frac{E t h}{(1 - \nu^2) G_w} \cdot \frac{\pi^2}{b^2}. \quad (6)$$

W zastosowanej metodzie rozwiązania zagadnienia przyjmuje się założenie, że moduł sprężystości postaciowej G_w wypełniacza jest funkcją zmiennej x względnie zmiennej y ; znaczy to, że ulega on zmianie wzdłuż długości lub szerokości płyty. Tym samym współczynnik k_0 podatności wypełniacza jest również odpowiednią funkcją zmiennej x lub y . Należy zaznaczyć, że przyjęcie zmienności współczynnika k_0 oznacza możliwość rozpatrzenia zarówno zmienności modułu G_w , jak i zmienności innych parametrów, występujących w wyrażeniu (6), tj. sztywności okładzin B , a także grubości wypełniacza $2h$. Największe jednak znaczenie praktyczne ma przypadek zmiennej sztywności samego wypełniacza, tj. zagadnienie rozkładu zmienności modułu sprężystości postaciowej G_w .

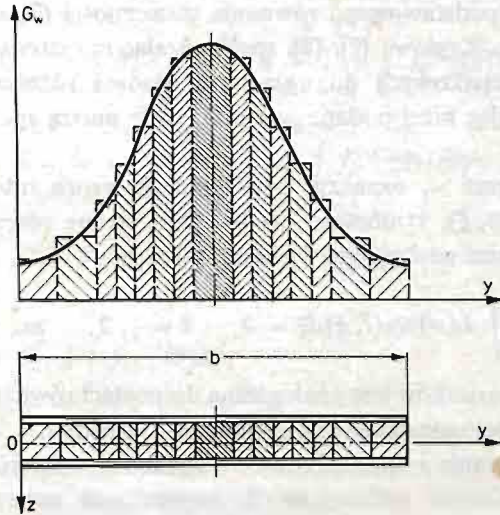
W rzeczywistości moduł G_w może ulegać zmianie, ale w sposób ciągły, wzdłuż określonego kierunku. W dalszych rozważaniach przyjęto założenie, że wartość modułu G_w zmienia się jedynie wzdłuż osi y , przy czym rzeczywistą zmianę tego modułu przedstawiono za pomocą zastępczej, skokowo zmiennej funkcji y (rys. 2). Funkcja ta może być tak przyjęta, aby była określonym przybliżeniem rzeczywistej funkcji ciągłej. Przy takim przyjęciu współczynnik k_0 jest również skokową funkcją zmiennej y , tj. $k_0 = k_0(y)$.

Równanie (1) ulega uproszczeniu przez pominięcie w nim płytowej sztywności zginania D samych okładzin jako pomijalnie małej. Błąd wynikający z wprowadzenia takiego uproszczenia nie przekracza 5% [6]. Wówczas, po wprowadzeniu bezwymiarowych współrzędnych ξ i θ oraz wyżej zdefiniowanych współczynników, równanie (1) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \lambda^2 \varphi \left[k_0 \left(\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] F_w(\xi, \theta) + \varphi \left[k_0 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] F_p(\xi, \theta) + \\ & + 2\varphi \lambda \left[k_0 \left(\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \theta} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \theta^3} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} \right] F_t(\xi, \theta) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Wartości własne powyższego równania są poszukiwanymi w analizie stateczności współczynnikami obciążenia krytycznego płyty, oznaczonymi dalej symbolami φ_{kr} .

Przyjęto dalej, że rozpatrywana płyta jest zamocowana wzdłuż całego swego obwodu. Uwzględniono przy tym dwa warianty podparcia zewnętrznych krawędzi płyty: podparcie przegubowe na całym obwodzie oraz podparcie przegubowe krawędzi $x = 0$ i $x = a$, przy jednoczesnym utwierdzenia krawędzi $y = 0$ i $y = b$.



Rys. 2. Modelowanie rzeczywistej zmiany modułu G_w wypełniacza płyty za pomocą funkcji skokowo zmiennej

Zgodnie z powyższymi założeniami, rozwiązanie równania (7) musi spełniać następujące warunki brzegowe odnoszące się do funkcji $w = w(\xi, \theta)$, opisującej kształt ugiętej — po utracie stateczności — powierzchni płyty:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{— dla } \xi = 0, \pi, \tag{8}$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{— dla } \theta = 0, \pi;$$

— gdy tarcza jest swobodnie podparta wzdłuż obwodu, lub

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{— dla } \xi = 0, \pi, \tag{9}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{— dla } \theta = 0, \pi;$$

— gdy krawędzie $y = 0$ ($\theta = 0$) oraz $y = b$ ($\theta = \pi$) płyty są utwierdzone, a pozostałe podparte swobodnie.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Uwzględniając przyjęte uprzednio warianty podparcia zewnętrznych krawędzi płyty, rozwiązanie równania (7) założono w następującej postaci ogólnej:

$$w(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^m f_i(\theta) \cdot \sin(i\xi), \quad (10)$$

gdzie $f_i(\theta)$ są nieznanymi funkcjami zmiennej (θ) . Tak przyjęta funkcja $w = w(\xi, \theta)$ spełnia założone warunki brzegowe na krawędziach $x = 0$ i $x = a$ ($\xi = 0$ i $\xi = \pi$) płyty.

W celu rozwiązania podstawowego równania stateczności (7) zastosowano przybliżoną metodę Kantorowicza-Kryłowa [7], [8], sprowadzając rozpatrywane równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych do układu m równań różniczkowych zwyczajnych. Uzyskano je wykorzystując niżej podane warunki, jakie muszą spełniać nieznane funkcje $f_i(\theta)$.

Jeżeli mianowicie przez w_i oznaczyć i -ty składnik wzoru interpolacyjnego (10), tj. wyrażenie $w_i = f_i(\theta) \sin(i, \xi)$, symbolem $L(w)$ — lewą stronę równania (7), to nieznane funkcje $f_i(\theta)$ muszą spełniać następujące warunki:

$$\int_0^{\pi} L(w) \sin(l, \xi) d\xi = 0, \quad l = 1, 2, \dots m. \quad (11)$$

Postać powyższych warunków jest analogiczna do postaci równań otrzymywanych przy zastosowaniu metody ortogonalizacyjnej Bubnowa-Galerkina.

Po wykonaniu całkowania i uporządkowaniu wyrazów warunki (11) przyjmują postać następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu względem funkcji f_i :

$$\sum_{i=1}^m L_{ii}(f_i, f_i', f_i'', f_i''', f_i'''') = 0, \quad i = 1, 2, \dots m. \quad (12)$$

W równaniach tych symbolem L_{ii} oznaczono następujące wyrażenia:

$$L_{ii} = \varphi \{ \lambda^2 i^2 (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}'' f_i - 2\lambda i (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}' f_i' - [k_0 \lambda^2 i^2 F_{ii}'' + (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}'] f_i'' + 2k_0 \lambda i F_{ii}' f_i''' + k_0 F_{ii}' f_i'''' \} \quad \text{dla } i \neq 1 \quad (13)$$

oraz

$$L_{ii} = \frac{\pi}{4} \lambda^2 i^2 \left[2\lambda^2 i^2 + \frac{4}{\pi} \varphi (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}'' \right] f_i - 2\varphi \lambda i (1 + k_0 \varphi \lambda^2 i^2) F_{ii}' f_i' + \\ - \left[\pi \lambda^2 i^2 \left(1 + \frac{1}{\pi} k_0 \varphi F_{ii}'' \right) + \varphi (1 + k_0 \lambda^2 i^2) F_{ii}' \right] f_i'' + 2k_0 \varphi \lambda i F_{ii}' f_i''' + \left(\frac{\pi}{2} + k_0 \varphi F_{ii}' \right) f_i'''' \\ \text{dla } i = 1. \quad (14)$$

W powyższych wyrażeniach

$$F_{ii}'' = \int_0^{\pi} [F_w(\xi, \theta) \sin(i\xi) \sin(l\xi)] d\xi, \\ F_{ii}' = \int_0^{\pi} [F_p(\xi, \theta) \sin(i\xi) \sin(l\xi)] d\xi, \\ F_{ii}' = \int_0^{\pi} [F_i(\xi, \theta) \cos(i\xi) \sin(l\xi)] d\xi. \quad (15)$$

W dalszym postępowaniu układ równań różniczkowych (12) zostaje przekształcony w układ równań całkowych.

Uwzględniając ogólną postać warunków brzegowych przy $\theta = 0$ (dla obydwu przyjętych warunków podparcia krawędzi $y = 0$ i $y = b$ płyty) oraz wykorzystując ich jednorodność, poszukiwane funkcje $f_i = f_i(\theta)$ można wyrazić przez ich czwarte pochodne:

$$\begin{aligned}
 f_i &= \frac{1}{\alpha} C_{2i} \cdot \theta^\alpha + C_{1i} \frac{\theta^3}{6} + \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^4, \\
 f_i' &= C_{2i} \cdot \theta^\beta + C_{1i} \frac{\theta^2}{2} + \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^3, \\
 f_i'' &= C_{2i} \cdot \beta + C_{1i} \cdot \theta + \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^2, \\
 f_i''' &= C_{1i} + \int_0^\theta f_i''''(\theta) d\theta,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

gdzie: $\alpha = 1$ oraz $\beta = 0$ — przy założeniu warunków brzegowych (8), $\alpha = 2$ oraz $\beta = 1$ — przy założeniu warunków brzegowych (9). Wartości stałych C_{1i} i C_{2i} wyznacza się z warunku brzegowego dla $\theta = \pi$, tj. dla krawędzi $y = b$ płyty.

Wprowadzając zależności (16) do układu równań (12) otrzymuje się następujący układ równań całkowych.

$$\sum_{i=1}^m L_{il} [A_i^{(1)}(\theta), A_i^{(2)}(\theta), A_i^{(3)}(\theta), A_i^{(4)}(\theta)] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m,
 \tag{17}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 A_i^{(1)}(\theta) &= \int_0^\theta f_i''''(\theta) d\theta, \\
 A_i^{(2)}(\theta) &= \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^2, \\
 A_i^{(3)}(\theta) &= \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^3, \\
 A_i^{(4)}(\theta) &= \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta \int_0^\theta f_i''''(\theta) [d\theta]^4.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Układ równań całkowych (17) rozwiązuje się następnie metodą sum skończonych [4], stosując macierze całkowania [9]. Przy zastosowaniu tej metody przedział całkowania $[\theta, \pi]$ dzieli się na n podprzedziałów, otrzymując w ten sposób $(n+1)$ punktów obliczeniowych θ_j , przy czym $j = 1, 2, \dots, (n+1)$. Funkcję ciągłą $k_0 = k_0(\theta)$, przedstawiającą zmianę współczynnika podatności płyty, zastępuje się funkcją skokowo zmienną, która w każdym z podprzedziałów obliczeniowych ma stałą wartość $(k_0)_j$. Dobierając odpowied-

⁴ Mech. Teoret. i Stos. 3-4/84

nio liczbę podprzedziałów całkowania n , można z określoną dokładnością odwzorować przebieg ciągłej funkcji k_0 za pomocą przebiegu skokowo zmiennej.

W wyniku zastąpienia całek, występujących w układzie równań (17), przybliżonymi wyrażeniami zawierającymi sumy skończone [9] otrzymuje się układ algebraicznych równań jednorodnych względem niewiadomych $x_{ij} = f_i''''(\theta_j)$. Układ ten ma postać:

$$\sum_{k=1}^{m(n+1)} b_{ik} x_{ik} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m(n+1), \quad (19)$$

gdzie współczynniki b_{ik} są zależne od parametrów geometrycznych i materiałowych płyty, a także jej obciążenia.

Aby układ równań (19) miał niezerowe rozwiązanie, jego wyznacznik charakterystyczny musi być równy zeru. Z warunku tego można obliczyć ciąg wartości własnych φ równania (1). Najmniejsza z tych wartości jest poszukiwaną wartością krytyczną współczynnika φ , oznaczoną dalej jako φ_{kr} .

Przedstawioną powyżej metodę wykorzystano do rozwiązywania równania stateczności trójwarstwowych płyt przekładkowych o zmiennej sztywności wypełniacza. Realizowany w praktyce ciągły rozkład tej sztywności, związany z ciągłym rozkładem gęstości wypełniacza, zastąpiono równoważnym w przybliżeniu rozkładem zmiennym skokowo, zachowując określoną dokładność odwzorowania.

Dla przeprowadzenia odpowiednich obliczeń numerycznych opracowano specjalny program na e.m.c. w języku FORTRAN. Program ten umożliwia wyznaczanie wartości krytycznych wszystkich podstawowych obciążeń typu tarczowego dla prostokątnych płyt przekładkowych o dowolnym, skokowo zmiennym rozkładzie sztywności wypełniacza. Jedynym ograniczeniem jest dopuszczalna — ze względu na obszar pamięci zajmowany przez program w e.m.c. — liczba n podprzedziałów obliczeniowych.

4. Przykładowe wyniki obliczeń

Przykładowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla prostokątnych płyt przekładkowych z lekkim wypełniaczem o zmiennej gęstości, swobodnie podpartych wzdłuż obwodu i poddanych działaniu jednokierunkowego obciążenia ściskającego. Rozpatrzono trzy różne przypadki obciążenia płyt, dla których znane są rozwiązania dotyczące ich obciążeń krytycznych, przy założeniu stałej gęstości wypełniacza: przypadek równomiernego ściskania [2] niejednakowego ściskania z udziałem ścinania [10] oraz szczególnie przypadek liniowo-zmiennego ściskania, a mianowicie zginania tarczowego [11].

Dla każdego z tych przypadków obciążenia przyjęto w obliczeniach takie warianty rozkładu gęstości wypełniacza, a tym samym funkcji $k_0 = k_0(y)$ lub $k_0 = k_0(x)$ jego podatności, aby uzyskać możliwie największy wzrost wartości współczynnika φ_{kr} obciążenia krytycznego płyty.

W przypadku jednokierunkowego, równomiernego ściskania (poz. 1 tablicy 1), tj. gdy współczynnik obciążenia $\eta = 1$, a także niejednakowego ściskania z jednoczesnym ścinaniem (poz. 2 tablicy 1), tj. gdy $\eta \neq 1$, najszluszniejsze było przyjęcie, że gęstość wypełniacza zmienia się skokowo w kierunku osi y , ale z zachowaniem symetrii względem

osi symetrii płyty — równoległej do kierunku ściskania. Jak wykazała wstępna analiza, dla wszystkich wartości współczynnika η najbardziej racjonalnym był wariant, gdy w wypełniaczu płyty przyjmowano jedno tylko pasmo o podwyższonej gęstości, leżące wzdłuż wspomnianej osi symetrii płyty. Pasma takie o zmniejszonej podatności stanowiło pewną analogię wzmocnienia tarczy jednorodnej symetrycznym żebrzem podłużnym, równoległym do kierunku ściskania.

Zagadnienie rozpatrzono przyjmując różne szerokości ρb pasma ($0 \leq \rho \leq 1$) o zwiększonej gęstości i różne wartości współczynnika wzmocnienia q , zdefiniowanego wzorem:

$$q = \frac{(G_w)_2}{(G_w)_1} = \frac{(k_0)_1}{(k_0)_2}, \quad (20)$$

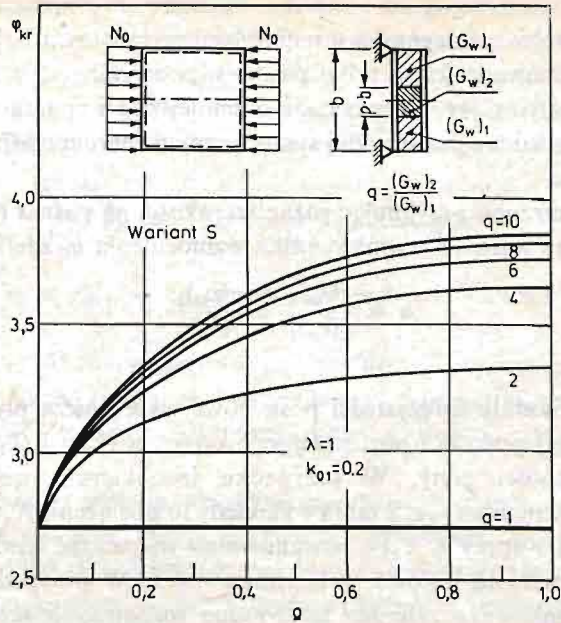
gdzie:

$(G_w)_2$ i $(G_w)_1$ — moduły sprężystości postaciowe wypełniacza płyty odpowiednio dla pasma o podwyższonej gęstości i pozostałej jego części, a $(k_0)_2$ i $(k_0)_1$ — odpowiadające współczynniki podatności płyty. W przypadku jednokierunkowego, niejednakowego ściskania z udziałem ścinania (poz. 2 tablicy 1), kiedy to obciążenie N_x jest liniowo rosnącą funkcją współrzędnej x (przy $\eta < 1$), postanowiono rozpatrzeć również przypadek, gdy gęstość wypełniacza wzrasta liniowo w kierunku osi x . W przypadku obciążenia płyty w postaci jednokierunkowego zginania tarczowego rozpatrzono skokowo zmienny rozkład gęstości wypełniacza wzdłuż osi y — z jednym pasmem o zwiększonej gęstości. Pasma to usytuowano równoległe do osi x po stronie ściskanej płyty, zgodnie z zasadą racjonalnego żebrowania płyt jednorodnych poddanych działaniu zginania tarczowego. Przyjęto, że szerokość tego pasma wynosi $b_0 = 0,1b$, a jego oś symetrii znajduje się w odległości y' od ściskanej krawędzi płyty.

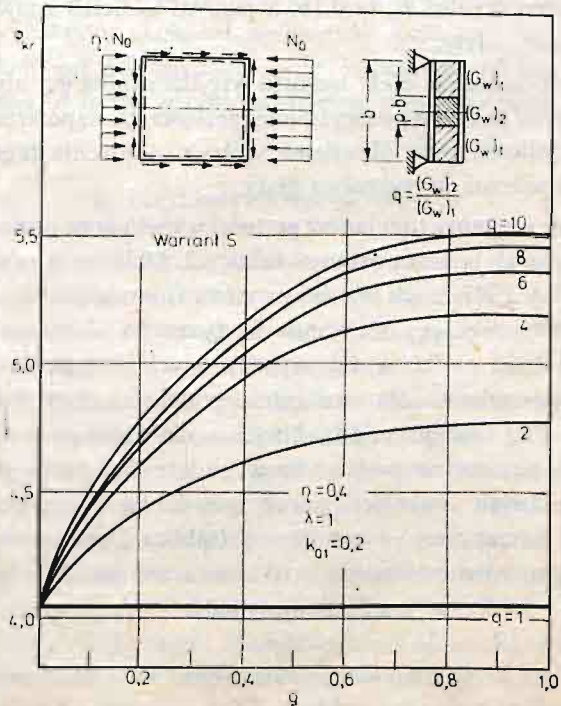
W tym przypadku obciążenia, efekt wzrostu współczynnika φ_{kr} obciążenia krytycznego płyty zależy od położenia pasma o podwyższonej gęstości, tj. współrzędnej y' . Z tego względu celem tej części obliczeń było określenie wpływu położenia tego pasma na wartość współczynnika φ_{kr} obciążenia krytycznego płyty.

Przyjęte do obliczeń warianty rozkładów gęstości wypełniacza odpowiadające wymienionym wyżej obciążeniom płyty zestawiono w tablicy 2. Obliczenia numeryczne przeprowadzono na e.m.c. Odra 1305, a ich wyniki przedstawiono w postaci wykresów, ilustrujących zależność współczynnika φ_{kr} obciążenia krytycznego płyty, od odpowiednich parametrów rozkładu gęstości — dla wyżej wymienionych przypadków obciążenia płyty. Wszystkie wykresy sporządzono dla swobodnie podpartej płyty kwadratowej, o współczynniku kształtu $\lambda = 1$, oraz przy jednakowej — dla każdego z rozpatrywanych przypadków — wartości parametru podstawowej podatności płyty $(k_0)_2 = 0,2$. Wykresy $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(\rho)$ — dla różnych wartości współczynnika q — odpowiadające rozkładowi gęstości wypełniacza, oznaczonego symbolem S (tablica 2) przedstawiono odpowiednio: dla jednokierunkowego, równomiernego ściskania — na rys. 3 oraz dla jednokierunkowego niejednakowego ściskania z udziałem ścinania — przy wartości parametru obciążenia $\eta = 0,4$ — na rys. 4.

Dla tego ostatniego przypadku obciążenia płyty, na rys. 5 przedstawiono przebieg zmian wartości współczynnika φ_{kr} , odpowiadający liniowej zmianie modułu sprężystości postaciowej G_w wypełniacza wzdłuż osi x (symbol rozkładu P w tablicy 2).



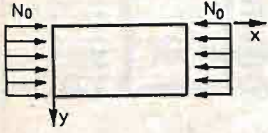
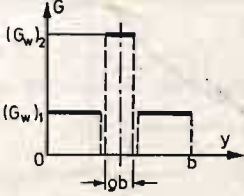
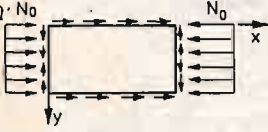
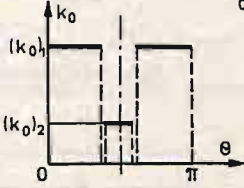
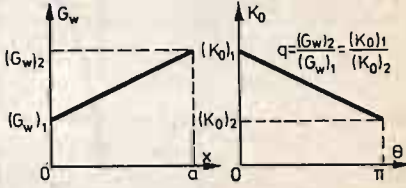
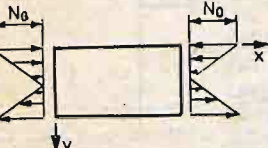
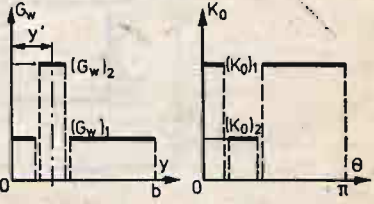
Rys. 3. Wykresy zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(q)$ dla płyty poddanej działaniu równomiernego ściskania (poz. 1 — tablica 2)



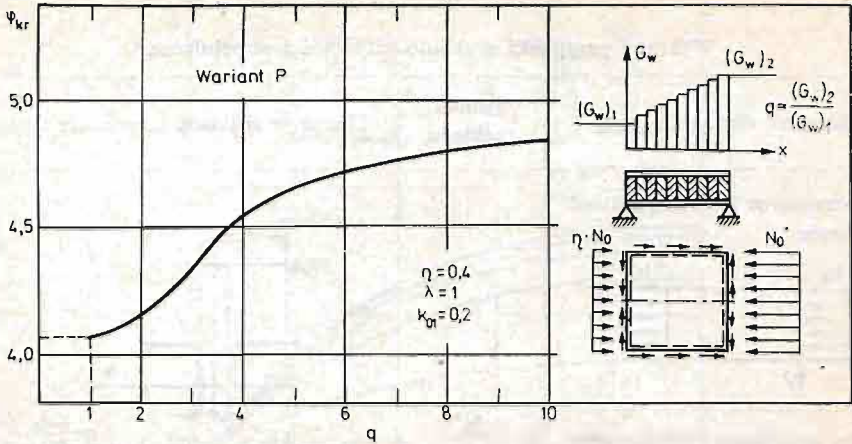
Rys. 4. Wykresy zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(q)$ dla płyty poddanej działaniu jednokierunkowego, niejednostajnego ściskania z udziałem ścinania (poz. 2 — tablica 2)

Tablica 2

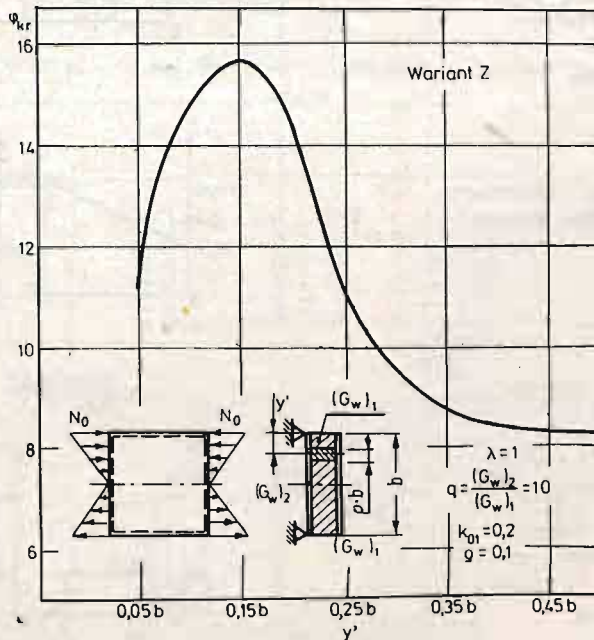
Wybrane przypadki rozkładu sztywności wypełniacza

Lp	charakter obciążenia płyty	Symbol rozkładu	Charakter rozkładu sztywności wypełniacza
1.	Równomierne jednokierunkowe ściskanie 	„S”	 $q = \frac{(G_w)_2}{(G_w)_1} = \frac{(k_0)_1}{(k_0)_2}$
2.	Jednokierunkowe niejednakowe ściskanie z udziałem ścinania 		
3.	Jednokierunkowe, niejednakowe ściskanie z udziałem ścinania (szkic j.w.)	„P”	 $q = \frac{(G_w)_2}{(G_w)_1} = \frac{(k_0)_1}{(k_0)_2}$
4.	Jednokierunkowe liniowo zmienne ściskanie (zginanie tarczowe) 	„Z”	 $q = \frac{(G_w)_2}{(G_w)_1} = \frac{(k_0)_1}{(k_0)_2}$

Na rysunku 6 przedstawiono wykres zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(y')$, odpowiadający przypadkowi czystego zginania tarczowego przy przyjętych uprzednio założeniach, dla przykładowej wartości współczynnika $q = 10$. Wyniki obliczeń numerycznych, przedstawione w postaci wykresów pokazanych na rysunkach 3÷6, otrzymano przy założeniu funkcji powierzchni wyboczenia płyty zgodnie z wyrażeniem (10), biorąc do obliczeń w każdym, kolejnym punkcie obliczeniowym wyrażenie o liczbie wyrazów $m = 1$ do $m = 5$. W przypadkach jednokierunkowego, równomiernego ściskania ($\eta = 1$) oraz niejednakowego



Rys. 5. Wykres zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(q)$ dla płyty poddanej działaniu jednokierunkowego, niejednakowego ściskania z udziałem ścinania (poz. 3 — tablica 2)



Rys. 6. Wykres zależności $\varphi_{kr} = \varphi_{kr}(y')$ dla płyty poddanej zginaniu tarczowemu (poz. 4 — tablicy 2)

ściskania z udziałem ścinania ($\eta = 0,4$) wystarczającą dokładność obliczeń otrzymano dla funkcji jednowyrazowej ($m = 1$). W przypadku czystego zginania tarczowego wystarczającą dokładność otrzymano dla funkcji trójwyrazowej ($m = 3$).

Z punktu widzenia projektowania konstrukcji przekładkowych interesujące jest również — oprócz analizy wpływu rozkładu gęstości wypełniacza na poziome obciążenia krytycznego — rozpatrzenie wpływu tego rozkładu ma ciężar konstrukcji, a ściślej na sto-

sunek siły krytycznej do ciężaru elementu tarczowego. Za kryterium optymalizacyjne można wówczas przyjąć współczynnik lekkości tarczy zdefiniowany wzorem:

$$\xi = \frac{(N_0)_{kr}}{Q}, \quad (21)$$

gdzie $(N_0)_{kr}$ jest wartością siły krytycznej, a Q — ciężarem tarczy.

Współczynnik ten można również określić za pomocą wzoru o następującej ogólnej postaci:

$$\xi = C\kappa. \quad (22)$$

W wyrażeniu tym C jest współczynnikiem, zależnym jedynie od parametrów materiałowych i wymiarów geometrycznych płyty:

$$C = \frac{\pi^2 \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \right)^2 a \cdot E}{(1 - \nu^2) \psi^3 t \cdot \gamma_w}, \quad (23)$$

gdzie: γ_w — ciężar właściwy materiału wypełniacza o najmniejszej gęstości.

$$\varepsilon = \frac{h}{t}; \quad \psi = \frac{b}{t}.$$

Współczynnik zaś κ wyraża się następującymi wzorami — zależnie od rozkładu gęstości wypełniacza płyty:

$$\kappa = \frac{\varphi_{kr}}{\varepsilon + K} \quad (24a)$$

— dla płyty z wypełniaczem o stałej sztywności,

$$\kappa = \frac{\varphi_{kr}}{\varepsilon \left| 1 + \rho \left(\sqrt{q} - 1 \right) \right| + K} \quad (24b)$$

— dla płyty, której gęstość wypełniacza zmienia się według schematu S oraz Z (poz. 1 i 3 tablicy 2),

$$\kappa = \frac{\varphi_{kr}}{\varepsilon \left(1 + \frac{\sqrt{q} - 1}{2} \right) + K} \quad (24c)$$

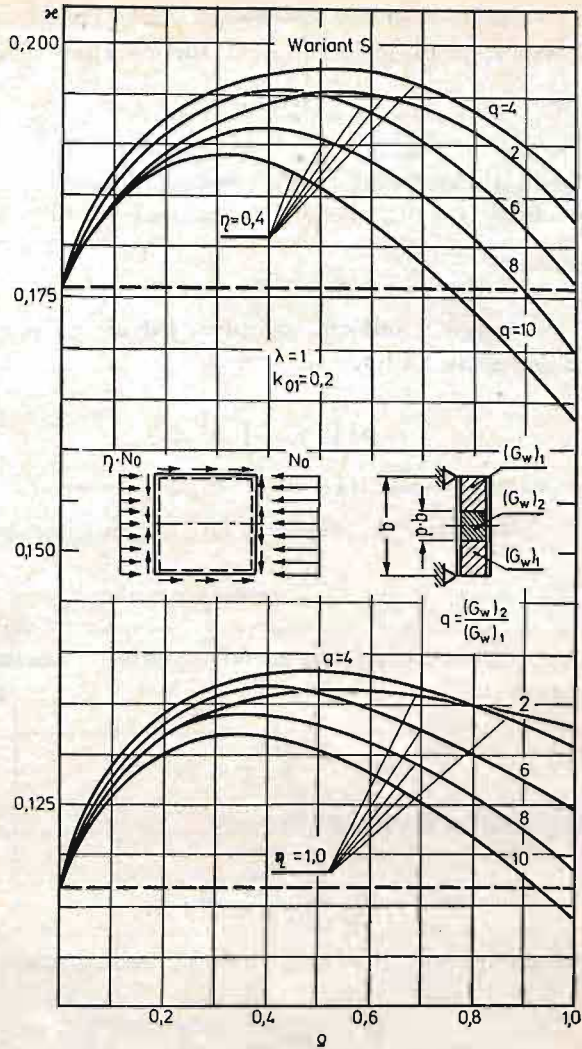
— dla płyty, o liniowo zmiennej gęstości wypełniacza (poz. 2 w tablicy 2).

We wzorach tych

$$K = \frac{\gamma_{okl}}{\gamma_w},$$

gdzie γ_{okl} — ciężar właściwy materiału okładzin.

Przykładowo, na rys. 7 przedstawiono wykresy współczynnika H odpowiadające przypadkowi tarczy poddanej działaniu równomiernego ściskania ($\eta = 1,0$) oraz jednokierunkowego niejednakowego ściskania z udziałem ścinania przy parametrze obciążenia $\eta = 0,4$ — w przypadku rozkładu gęstości wypełniacza typu S . Wykresy sporządzono przy następujących założeniach:



Rys. 7. Wykresy zależności współczynnika $\kappa = \kappa(q)$ dla płyty poddanej działaniu równomiernego ściskania tarczowego ($\eta = 1$) oraz niejednakowego ściskania z udziałem ścinania ($\eta = 0,4$)

$\varepsilon = 5$ oraz $K = 18$, co odpowiada przypadkowi tarczy z okładzinami duralowymi ($\gamma_{okl} = 2700$ [kg/m³]) oraz wypełniaczem o ciężarze właściwym $(\gamma_w)_1 = 150$ [kg/m³].

5. Wnioski

1. Przedstawiona metoda obliczeniowa pozwala na przeprowadzenie analizy stateczności tarcz przekładkowych z lekkim wypełniaczem o zmiennej sztywności w szerokim zakresie wariantów rozkładu tej sztywności, w podstawowych przypadkach obciążenia typu tarczowego.

2. Z przytoczonych przykładów obliczeniowych wynika, że racjonalna zmiana sztywności wypełniacza w znaczący sposób wpływa na wzrost obciążenia krytycznego.

3. Odpowiednie kształtowanie rozkładu zmienności sztywności wypełniacza może być w pewnych przypadkach skutecznym narzędziem optymalizacji z punktu widzenia stosunku nośności elementu tarczowego do jego ciężaru.

4. Z przebiegu krzywych przedstawionych na rys. 7 wynika, że efekt racjonalnego kształtowania gęstości wypełniacza, mierzony wartością współczynnika κ , a tym samym i współczynnika lekkości ξ , jest znacznie wyraźniejszy w przypadku płyt poddanych działaniu jednokierunkowego niejednakowego ściskania z udziałem ścinania ($\eta \neq 1$) niż w przypadku płyt poddanych działaniu równomiernego ściskania tarczowego ($\eta = 1$)

Literatura cytowana w tekście

- [1] F. ROMANÓW, L. STRICKER, J. TEYSSEYRE, *Stateczność konstrukcji przekładkowych*. Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1972.
- [2] A. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Издат. „Наука”, Москва 1967.
- [3] В. Н. РАЙМУШИН, Н. К. ГАЛИМОВ, И. Н. СОТОВ, *Устойчивость трехслойных пластин с заполнителем переменной жесткости* — Труды Семинара по теории оболочек, Казань 1974.
- [4] А. М. ГОЛЬДЕНСТЕЙН, *Устойчивость безконечно широкой пластины с заполнителем переменной жесткости при сжатии* — Изв. ВУЗ, Строительство и Архитектура, Нр. 1, 1977.
- [5] F. ROMANÓW, *Obciążenia krytyczne konstrukcji wielowarstwowych*. Prace naukowe I-tu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej, Nr 36 seria 8, Monografie, Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1979.
- [6] K. H. НАНН, *Über die statische Stabilität einer einseitig gedrückten, mit einer mittigen Längsrippe versteiften rechteckigen Sandwichscheibe bei unterschiedlichen Randlagerungsarten*, praca doktorska, Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej, Łódź 1979.
- [7] З. В. КАНТОРОВИЧ, В. И. КРЫЛОВ, *Приближенные методы высшего анализа* — Гос. Издат. Техн. — Теорет. Лит., Москва, Ленинград, 1952.
- [8] З. В. КАНТОРОВИЧ, *Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла* — Изв. Ак. Наук СССР, II серия, Ир. 5, 1933.
- [9] М. В. ВАХИТОВ, *Интегрирующие матрицы — аппарат численного решения дифференциальных уравнений стержневой механики* — Изв. ВУЗ. Авиационная техника, Нр. 3, 1965.
- [10] М. КОТЕЛКО, *Stateczność prostokątnej płyty trójwarstwowej z miękkim wypełniaczem poddanej działaniu nierównomiernego ściskania*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 393, Mechanika z. 62, Łódź 1981
- [11] W. WALCZAK, R. MANIA, *Stateczność prostokątnej płyty trójwarstwowej poddanej działaniu jednokierunkowego, liniowo zmiennego ściskania przy różnych warunkach podparcia krawędzi płyty* — Arch. Budowy Maszyn Tom XXIX, z. 3-4, P.W.N., Warszawa 1982.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ, ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН О ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ЗАПОЛНИТЕЛЯ

В работе исследуется влияние переменной жесткости легкого заполнителя пенного типа на устойчивость „в целом” прямоугольной пластины. При рассмотрении задачи используется численный метод, благодаря которому является возможным определение коэффициентов критического усилия пластины в случае дискретно переменной жесткости заполнителя. В работе представлены результаты численных вычислений для некоторых случаев нагрузки дискового типа.

Summary

STABILITY OF RECTANGULAR SANDWICH PLATES AT VARIABLE RIGIDITY
OF THE PLATE CORE

In the paper an influence of variable rigidity of the core on general stability of rectangular sandwich plates was considered. In considerations the special numerical method was utilised. Application of the method allowed for determination of coefficients φ_{kr} of the plate critical loading at the assumption that the rigidity of a plate core is discretely varying. Exemplary results of numerical computations, carried out for some chosen cases of a disk loading, were also presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 czerwca 1983 roku