

BADANIE STATECZNOŚCI SAMOLOTU W USTALONYM KORKOCIĄGU

WOJCIECH BLAJER

Wyższa Szkoła Inżynierska

1. Wstęp

W pracy przedstawiono metodę badania stateczności ruchu samolotu w ustalonym korkociągu. Samolot traktowano jako sztywny układ mechaniczny o sześciu stopniach swobody. Badano stateczność położenia równowagi samolotu w korkociągu o osi pionowej względem ziemi dla ustalonej wysokości i przy ustalonych parametrach sterowania.

Niniejsza praca stanowi rozwinięcie pracy [3], podejmującej zagadnienie wyznaczania warunków równowagi ustalonego korkociągu samolotu. Stan lotu samolotu w korkociągu ustalonym stanowi bazę wyjściową przedstawionej metody badania stateczności położenia równowagi.

Równania do badania stateczności ruchu samolotu w korkociągu ustalonym otrzymano z ogólnych równań ruchu samolotu wyrażonych w quasi-współrzędnych układu własnego [2, 3, 6], wyprowadzonych z równań Boltzman-Hamela [5] dla układów mechanicznych o więzach holonomicznych. Równania te uzupełniono niezbędnymi związkami kinematycznymi.

Matematyczną stronę zagadnienia oparto na pracy [4]. Ograniczono się do wyznaczania wartości własnych macierzy Jacobiego układu równań ruchu samolotu, określonej w punkcie równowagi korkociągu. Za warunek stateczności przyjęto ujemne wartości rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy Jacobiego.

Oddziaływania zewnętrzne działające na samolot w locie rozpatrywano analogicznie jak w pracach [2, 3, 6]. Są oddziaływania aerodynamiczne, od zespołu napędowego i od siły ciężkości. Oddziaływania aerodynamiczne liczone rozdzielać je na pochodzące od skrzydła, kadłuba i usterzeń poziomego i pionowego. Skrzydło zostało dodatkowo rozdzielone na $N = 20$ pasków. Uwzględnienie lokalnych warunków opływu poszczególnych pasków skrzydła i usterzeń pozwoliło na przybliżone uwzględnienie wpływu prędkości kątowych samolotu na siły i momenty aerodynamiczne. Uwzględniono też wpływ poszczególnych części samolotu wzajemnie na siebie.

Obliczenia przykładowe przeprowadzono dla przypadku samolotu TS-11 „Iskra” według własnych programów w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej. Wykorzystano część oprogramowania użytego poprzednio do obliczeń w pracach [3, 6].

2. Założenia matematyczne

Rozważmy układ równań różniczkowych o postaci normalnej. Załóżmy dodatkowo, że jest to układ autonomiczny, tzn. równania nie zależą jawnie od czasu. Układ taki można zapisać w postaci [4]:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}), \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{Y} = \text{col}[y_1, y_2, \dots, y_n]$, a wektor prawych stron $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \text{col}[f_1(\mathbf{Y}), f_2(\mathbf{Y}), \dots, f_n(\mathbf{Y})]$ ma ciągłe drugie pochodne w pewnym obszarze $\|\mathbf{Y}\| < H$, H — stała. Jeśli

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}_0) = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad \|\mathbf{Y}_0\| < H, \quad (2)$$

to wektor $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0$ wyznacza stan równowagi układu (1).

W położeniu $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{X}$, gdzie \mathbf{X} oznacza wektor małego wychylenia z położenia równowagi, równanie (1) przekształca się do postaci:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + o(\|\mathbf{X}\|), \quad (3)$$

gdzie: $\mathbf{A} = \mathbf{F}'(\mathbf{Y}_0)$ — macierz Jacobiego określona w położeniu równowagi, $o(\|\mathbf{Y}\|)$ — reszta z rozwinięcia funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ w szereg Taylora wokół punktu \mathbf{Y}_0 .

Ponieważ z ciągłości drugich pochodnych funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ wynika ciągłość $o(\|\mathbf{Y}\|)$ w założonym obszarze oraz ponieważ:

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{o(\|\mathbf{X}\|)}{\|\mathbf{X}\|} = 0, \quad (4)$$

równanie (3) jest równaniem quasi-liniowym i ma jedyne rozwiązanie zerowe $\mathbf{X} = 0$.

Dla równania quasi-liniowego (3), korespondującego z równaniem (1) wg powyższych zależności, słuszne jest twierdzenie (wg twierdzenia Lapunowa) o następującej treści. Jeśli wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego $\mathbf{F}'(\mathbf{Y}_0)$ mają ujemne części rzeczywiste, to stan równowagi $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0$ nieliniowego układu autonomicznego (1) jest asymptotycznie stateczny w sensie Lapunowa przy $t \rightarrow \infty$.

3. Równania do badania stateczności położenia równowagi samolotu w ustalonym korkociągu

Zgodnie z pracami [1, 2, 3, 6] przyjęto następujące równania ruchu samolotu:

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{m \cdot V_c \cos \beta} [- (X_a + T \cos \delta - mg \sin \theta) \sin \alpha + (Z_a - T \sin \delta + mg \cos \Phi \cos \theta) \cos \alpha] + Q - (R \sin \alpha + P \cos \alpha) \tan \beta, \quad (a)$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{m V_c} [- (X_a + T \cos \delta - mg \sin \theta) \cos \alpha \sin \beta + (Y_a + mg \sin \Phi \cos \theta) \cos \beta + - (Z_a - T \sin \delta + mg \cos \Phi \cos \theta) \sin \alpha \sin \beta] - R \cos \alpha + P \sin \alpha, \quad (b)$$

$$\dot{V}_c/V_c = \frac{1}{mV_c} [(X_a + T \cos \delta - mg \sin \theta) \cos \alpha \cos \beta + (Y_a + mg \sin \Phi \cos \theta) \sin \beta + (Z_a - T \sin \delta + mg \cos \Phi \cos \theta) \sin \alpha \cos \beta], \quad (c)$$

$$\dot{P} = K \left[\frac{L_a}{J_x} + \frac{K_1}{J_z} (N_a - J_0 Q \omega) + K_4 P Q - K_5 Q R \right], \quad (d)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{J_y} (M_a + T e + J_0 R \omega) + K_6 P R - K_2 (P^2 - R^2), \quad (e)$$

$$\dot{R} = K \left[\frac{K_3}{J_x} L_a + \frac{1}{J_z} (N_a - J_0 Q \omega) + K_7 P Q - K_8 Q R \right], \quad (f)$$

$$\dot{\Phi} = P + (Q \sin \Phi + R \cos \Phi) \operatorname{tg} \theta, \quad (g)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \Phi - R \sin \Phi, \quad (h)$$

gdzie: $[X_a, Y_a, Z_a, L_a, M_a, N_a]$ — wektor sił uogólnionych od oddziaływań aerodynamicznych, T — siła ciągu, δ — kąt pomiędzy linią działania siły ciągu i osią Ox układu własnego samolotu, J_0 — moment bezwładności części wirujących silnika, ω — prędkość kątowa obrotu silnika, α, β — kąty natarcia i ślizgu, m — masa samolotu, V_c — prędkość liniowa, P, Q, R — prędkości kątowe przechylenia, pochylenia, i odchylenia, Φ — kąt przechylenia, θ — kąt pochylenia samolotu, K, K_1, \dots, K_8 — współczynniki o poniższej postaci, J_x, J_y, J_z, J_{xz} — momenty bezwładności i dewiacyjny samolotu w układzie własnym.

$$K = \frac{1}{1 - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}}, \quad K_1 = \frac{J_{xz}}{J_x}, \quad K_2 = \frac{J_{xz}}{J_y},$$

$$K_3 = \frac{J_{xz}}{J_z}, \quad K_4 = \left(1 - \frac{J_y - J_x}{J_z} \right) \frac{J_{xz}}{J_x}, \quad K_6 = \frac{J_z - J_x}{J_y},$$

$$K_5 = \frac{J_z - J_y}{J_x} + \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z}, \quad K_7 = \frac{J_y - J_x}{J_z} - \frac{J_{xz}^2}{J_x J_z},$$

$$K_8 = \left(1 - \frac{J_z - J_y}{J_x} \right) \frac{J_{xz}}{J_z}.$$

Oznaczając:

$$\mathbf{Y} = \operatorname{col}[\alpha, \beta, V_c, P, Q, R, \Phi, \theta], \quad (6)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \operatorname{col}[\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{V}_c/V_c, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{\Phi}, \dot{\theta}].$$

Układ równań różniczkowych (5) sprowadzamy do postaci:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}). \quad (7)$$

Zgodnie z treścią rozdziału 2, przy badaniu stateczności samolotu w położeniu równowagi \mathbf{Y}_0 , zamiast równania (7) wystarczy rozpatrywać stateczność równania zlinearyzowanego:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}_0) \cdot \mathbf{X}, \quad (8)$$

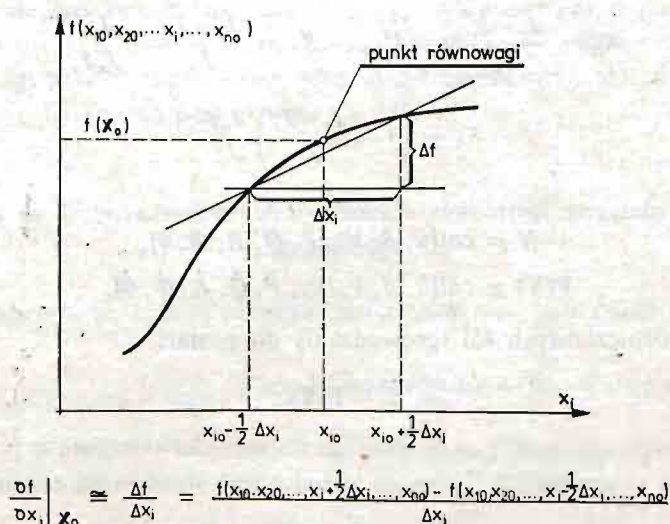
gdzie: \mathbf{X} — wektor małego wychylenia z położenia równowagi, \mathbf{A} — macierz Jacobiego układu (7) określona w punkcie równowagi \mathbf{X} wg wzoru (9).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Wzory na liczenie współczynników macierzy \mathbf{A} przytoczono w pracy [2]. We wzorach tych występują pochodne sił i momentów aerodynamicznych względem α , β , V_c , P , Q , R , określone w punkcie równowagi. Jest to macierz \mathbf{B} o postaci:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_a}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_a}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial X_a}{\partial R} \\ \frac{\partial Y_a}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y_a}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial Y_a}{\partial R} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_a}{\partial \alpha} & \frac{\partial N_a}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\partial N_a}{\partial R} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Wyznaczenie elementów macierzy \mathbf{A} wymaga uprzedniego wyznaczenia elementów macierzy \mathbf{B} . W pracy elementy macierzy \mathbf{B} liczone przy pomocy maszyny cyfrowej, jako ilorazy różnicowe względem kolejnych zmiennych, rozwinięte wokół punktu równowagi. Sposób ten zaprezentowany jest na rys. 1.



Rys. 1. Przybliżona metoda liczenia pochodnych funkcji wielu zmiennych

Warunek posiadania drugich pochodnych ciągłych przez funkcję $F(Y)$ nakłada ten sam warunek na przebiegi funkcji sił i momentów aerodynamicznych. Narzuca to odpowiednie wymagania na przebiegi danych aerodynamicznych przyjmowanych do obliczeń.

Macierz B jest innymi słowy macierzą pochodnych aerodynamicznych samolotu określonych w punkcie równowagi. Nadkrytyczne kąty natarcia, niesymetryczny opływ, duże prędkości kątowe obrotu samolotu wykluczają możliwość liczenia tych pochodnych klasycznymi metodami spotykanymi w mechanice lotu.

4. Obliczenia przykładowe

Obliczenia przykładowe dla samolotu TS-11 „Iskra” wykonano według własnych programów w języku FORTRAN w Ośrodku Obliczeniowym Politechniki Warszawskiej. Do obliczeń wykorzystane były wyniki pracy [3], podejmującej się wyznaczania parametrów ustalonego korkociągu samolotu. Program na potrzeby niniejszej pracy był w zasadzie rozszerzeniem programu liczącego warunki równowagi samolotu w korkociągu. Wartości własne macierzy A , stanowiące wyniki obliczeń, uzyskiwane były przy użyciu standardowych procedur systemu CYBER 73.

Wybrane warianty obliczeń zaprezentowano w tablicy 1. Ograniczono się przy tym tylko do prezentacji obliczeń dla różnych przypadków sterowania. Każda wersja różni się od podstawowej (std) tylko zmianą wyszczególnioną w pierwszej kolumnie tablicy. Dane masowe, geometryczne i aerodynamiczne samolotu są we wszystkich przypadkach jednako- we i przyjęte jak w pracach [2, 3, 6]. W wersji std dane sterowania samolotem przyjęto następująco:

$$\delta_H = -20^\circ, \quad \delta_V = 20^\circ, \quad \delta_L = 0^\circ;$$

T i ω — parametry biegu jałowego.

5. Wnioski wynikające z pracy

Uzyskane wyniki świadczą, że ruch samolotu w ustalonym korkociągu jest niestateczny we wszystkich prezentowanych przypadkach. Decydują o tym dodatnie wartości części rzeczywistych wartości własnych $\xi_{1,2}$.

Uznając, że większa wartość dodatnia $\text{Re}(\xi_{1,2})$ oznacza silniejszą niestateczność położenia równowagi, stwierdzić można, że najsilniejszą niestateczność stwierdzono dla $\delta_H = -13^\circ$, najmniejszą dla $\delta_H = -30^\circ$. Zmiany wartości wychylenia steru wysokości wpływają też na zmiany wartości $\text{Re}(\xi_{1,2})$ silniej niż analogiczne zmiany wartości wychylenia steru kierunku.

Stwierdzenie niestateczności ruchu samolotu w ustalonym korkociągu świadczy, że w rzeczywistości samolot w ruchu niesterowanym nigdy nie osiągnie tego stanu lotu. W ruchu rzeczywistym samolot będzie oscylować wokół położenia równowagi.

Wyniki metody są trudne do oszacowania ilościowego. Stwierdzenie niestateczności (lub stateczności) nie wnosi też wielu informacji o własnościach korkociągowych samolotu. Rozbudowany aparat matematyczny, skomplikowane wzory na liczenie współczynników

Tablica 1

Zmiany parametrów sterowania	Parametry punktu równowagi $\alpha(\text{deg}), \beta(\text{deg})$ $V_c(\text{m/s}), \Omega(1/\text{s})$ $\Phi(\text{deg}), \Theta(\text{deg})$	Wartości własne
std	$\alpha = 38,6, \beta = -3,0$ $V_c = 68,8, \Omega = 2,54$ $\Phi = 1,0, \Theta = -51,3$	$\xi_{1,2} = 0,452 \pm 3,673i$ $\xi_{3,4} = -0,116 \pm 2,679i$ $\xi_{5,6} = -0,186 \pm 1,562i$ $\xi_7 = -0,803, \xi_8 = -0,005$
$\delta_V = 30^\circ$	$\alpha = 46,6, \beta = -2,8$ $V_c = 62,5, \Omega = 2,32$ $\Phi = 0,5, \theta = -43,4$	$\xi_{1,2} = 0,346 \pm 3,381i$ $\xi_{3,4} = -0,120 \pm 2,446i$ $\xi_{5,6} = -0,497 \pm 1,559i$ $\xi_7 = -0,318, \xi_8 = -0,006$
$\delta_V = 10^\circ$	$\alpha = 32,5, \beta = -2,2$ $V_c = 79,5, \Omega = 3,04$ $\Phi = 5,2, \Theta = -57,2$	$\xi_{1,2} = 0,438 \pm 4,055i$ $\xi_{3,4} = -0,098 \pm 3,143i$ $\xi_{5,6} = -0,144 \pm 1,540i$ $\xi_7 = -0,668, \xi_8 = -0,006$
$\delta_H = -30^\circ$	$\alpha = 38,8, \beta = -2,8$ $V_c = 69,5, \Omega = 2,27$ $\Phi = 1,8, \theta = -51,1$	$\xi_{1,2} = 0,217 \pm 3,472i$ $\xi_{3,4} = -0,129 \pm 2,615i$ $\xi_{5,6} = -0,309 \pm 1,619i$ $\xi_7 = -0,533, \xi_8 = -0,005$
$\delta_H = -13^\circ$	$\alpha = 39,3, \beta = -3,1$ $V_c = 67,8, \Omega = 2,66$ $\Phi = 0,5, \theta = -50,6$	$\xi_{1,2} = 0,491 \pm 3,593i$ $\xi_{3,4} = -0,106 \pm 2,392i$ $\xi_{5,6} = -0,318 \pm 1,547i$ $\xi_7 = -0,702, \xi_8 = -0,005$

macierzy Jacobiego [2] i ostre wymagania co do ciągłości drugich ciągłości współczynników sił i momentów aerodynamicznych samolotu przyjmowanych do obliczeń, sprawiają, że w zastosowaniach technicznych wartość uzyskiwanych wyników obliczeń może okazać się niewspółmierna do nakładów pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. W. M. ADAMS, *Analytic Prediction of Airplane Equilibrium Spin Characteristics*, NASA TN D-6926, November 1972.
2. W. BLAJER, *Badanie dynamiki samolotu w korkociągu*, praca doktorska Politechniki Warszawskiej, (nie publikowana), Warszawa 1982.
3. W. BLAJER, J. MARYNIAK, *Ustalony korkociąg samolotu, warunki równowagi*, Mech. Teoret. i Stos., 22, 1/2, 1984.
4. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
6. J. MARYNIAK, W. BLAJER, *Numeryczna symulacja korkociągu*, Mech. Teoret. i Stos., 21, 2/3, 1983.

Резюме

ИСПЫТАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ САМОЛЁТА ВО ВРЕМЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ
ШТОПОРА

Представлено метод испытания устойчивости движения самолёта во время установившегося штопора. Самолёт принят как жёсткое тело с шестью степенями свободы. Вычисления сведены к определению собственных значений и собственных векторов матрицы Якоби системы уравнений движения в точке равновесия. Приведены вычисления сделано для самолёта TS-11 „Iskra”.

Summary

A STUDY OF AIRPLANE MOTION STABILITY IN STEADY SPIN

A method investigating stability of an airplane motion in steady spin is presented. An airplane has been treated as a rigid body having six degrees of freedom. The method corresponds to examining eigenvalues of Jakobian matrix of the system of motion equations, defined at the equilibrium point. Test calculations have been carried out for Polish training airplane TS-11 „Iskra”.

Praca została złożona w Redakcji 2 lutego 1983 roku
