

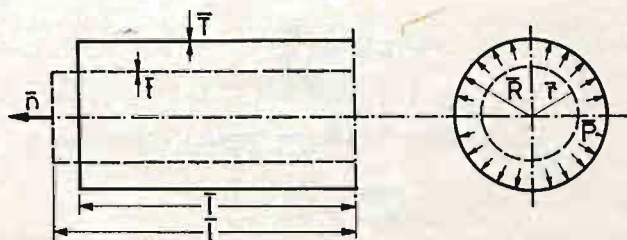
ANALIZA STATECZNOŚCI PROCESU DUŻYCH ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTYCH POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ PRZY DWUKIERUNKOWYM ROZCIĄGANIU

JAN BIELSKI, JACEK SKRZYPEK (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Celem pracy jest analiza procesu dużych odkształceń sprężystych cienkiej powłoki cylindrycznej rozciąganej siłą osiową \bar{n} i ciśnieniem normalnym \bar{p} (rys. 1) oraz wyznaczenie obszarów stateczności tego procesu i kresów możliwości jego realizacji (tj. kresów istnienia rozwiązania przy zadanej ścieżce sterowania) [2, 4].

Założono materiał sprężysty spełniający prawo Hooke'a, uogólnione na przypadek skończonych odkształceń (w logarytmicznej mierze Hencky'ego) i naprężeń rzeczywistych [3], [8]. Założono dalej nieściśliwość materiału, płaski stan naprężenia oraz równomierny rozkład naprężeń wzdłuż grubości powłoki. Rozważania ograniczono do osiowo symetrycznych jednorodnych stanów odkształcenia. W tej klasie poszukiwano również punktów bifurkacji z uwagi na parametr ścieżki sterowania.



Rys. 1. Geometria i obciążenie powłoki

Rozpatrzono trzy możliwości realizacji omawianego procesu:

- przez sterowanie „siłowe” czyli zadanie zależności pomiędzy ciśnieniem \bar{p} i siłą osiową \bar{n} ;
- przez sterowanie „kinematyczne”; czyli zadanie zależności pomiędzy odkształceniami osiowym ϵ_z^c i radialnym ϵ_r^c ;
- przez sterowanie „mieszane” czyli zadanie zależności między ciśnieniem \bar{p} i odkształceniem ϵ_z^c .

W każdym z tych sterowań odpowiednio inna wielkość pełni rolę umownego czasu.

Przypadek ogólniejszy powyższego zagadnienia rozpatrywany był w pracy [5] i dotyczył materiału sprężysto-plastycznego oraz sztywno-idealnie plastycznego, a także ogólniejszego

niejszego sterowania polegającego na założeniu dowolnego związku między czterema wielkościami $\varepsilon_z^c, \varepsilon_\varphi^c, \bar{p}, \bar{n}$. Jako jeden z przykładów omówione zostało sterowanie, w którym za umowy czas przyjęto objętość powłoki.

2. Układ równań podstawowych

2.1. Oznaczenia i ubezwymiarowanie. W przyjętych oznaczeniach litera duża oznacza wielkość odniesioną do konfiguracji początkowej, a mała do aktualnej.

Nadkreślenie oznacza wielkość wymiarową w odróżnieniu od wielkości bezwymiarowych, bez nadkreśleń.

- \bar{R}, \bar{r} — promień powierzchni środkowej,
- \bar{L}, \bar{l} — długość powłoki,
- \bar{T}, \bar{t} — grubość ścianki,
- \bar{V}_0 — objętość powłoki,
- $\varepsilon_z^c, \varepsilon_\varphi^c$ — odkształcenia w mierze Cauchy'ego,
- $\varepsilon_\varphi^H, \varepsilon_z^H$ — odkształcenia w mierze Hencky'ego,
- $\bar{\sigma}_\varphi, \bar{\sigma}_z$ — naprężenia rzeczywiste,
- \bar{G} — moduł Kirchhoffa,
- \bar{p} — ciśnienie wewnętrzne odniesione do jednostki powierzchni aktualnej,
- \bar{N}, \bar{n} — siła osiowa,
- $d^2 \bar{w}$ — praca nadwyżkowa.

Przyjęto do obliczeń następująco zdefiniowane wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned}\sigma_{z,\varphi} &= \frac{\bar{\sigma}_{z,\varphi}}{\bar{G}}, \\ p &= \bar{p} \frac{\bar{R}}{\bar{G}\bar{T}}, \\ n &= \bar{n} \frac{1}{2\pi\bar{G}\bar{R}\bar{T}}, \\ d^2 w &= d^2 \bar{w} \frac{1}{\bar{G}\bar{V}_0}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Wielkości geometryczne i kinematyczne odniesiono do promienia \bar{R} powierzchni środkowej w konfiguracji początkowej zgodnie z przepisem

$$A_j = \frac{\bar{A}_j}{\bar{R}}.$$

2.2. Równania podstawowe. Związki fizyczne przyjęto w postaci liniowego, logarytmicznego prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężeń

$$\begin{aligned}\varepsilon_\varphi^H &= \frac{1}{6\bar{G}} (2\bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_z), \\ \varepsilon_z^H &= \frac{1}{6\bar{G}} (2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\varphi),\end{aligned}\tag{2.2}$$

gdzie odkształcenia zdefiniowane są jako

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi}^H &= \ln(1 + \varepsilon_{\varphi}^c), & \varepsilon_{\varphi}^c &= \frac{\bar{r} - \bar{R}}{\bar{R}}, \\ \varepsilon_z^H &= \ln(1 + \varepsilon_z^c), & \varepsilon_z^c &= \frac{\bar{l} - \bar{L}}{\bar{L}}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Równania równowagi mają postać

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\varphi} &= \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{t}, \\ \bar{\sigma}_z &= \frac{\bar{n}}{2\pi r t}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Po wyeliminowaniu naprężeń i wykorzystaniu warunku nieściśliwości

$$\bar{r}t\bar{l} = \bar{R}\bar{T}\bar{L}\quad (2.5)$$

oraz związków (2.1) otrzymamy bezwymiarowe zależności pomiędzy wielkościami siłowymi p i n oraz geometrycznymi ε_z^c i ε_{φ}^c :

$$p = \frac{2 \ln x}{x}, \quad (2.6)$$

$$n = \frac{2 \ln y}{\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}}, \quad (2.7)$$

gdzie przez x i y oznaczono

$$x = (1 + \varepsilon_{\varphi}^c)^2 (1 + \varepsilon_z^c), \quad (2.8)$$

$$y = (1 + \varepsilon_{\varphi}^c) (1 + \varepsilon_z^c)^2. \quad (2.9)$$

Do tych równań dołączamy równanie ścieżki sterowania

$$f(\varepsilon_{\varphi}^c, \varepsilon_z^c, p, n) = 0 \quad (2.10)$$

oraz definicję parametru będącego umownym czasem (np. odkształcenie ε_z^c , siła n , objętość nieściśliwej cieczy wypełniającej powłokę itp.).

3. Analiza stateczności

Analizę stateczności przeprowadzono wyłącznie dla procesów sterowanych w sposób czysto „siłowy”. W przypadku, gdy chociaż jeden z parametrów sterujących jest kinematyczny (ε_z^c , ε_{φ}^c), należy w wyrażeniu na pracę drugiego rzędu uwzględnić elementy związane z układem wymuszającym.

Za kryterium stateczności przyjęto za Druckerem [1] warunek dodatniej sumarycznej pracy nadwyżkowej wykonanej na wszystkich parach stowarzyszonych obciążeniach — przemieszczeniach.

Praca nadwyżkowa wyraża się w przypadku rozpatrywanych obciążeń następująco:

$$d^2\bar{w} = d\bar{p} \cdot d\bar{r} \cdot \bar{s} + \bar{p} \cdot d\bar{r} \cdot d\bar{s} + d\bar{n} \cdot d\bar{l}, \quad (3.1)$$

lub po uwzględnieniu przyjętych ubezwimiarowań (2.1):

$$d^2w = dp \cdot d\varepsilon_\varphi^c(1 + \varepsilon_\varphi^c)(1 + \varepsilon_z^c) + pd\varepsilon_\varphi^c[(1 + \varepsilon_\varphi^c)d\varepsilon_z^c + (1 + \varepsilon_z^c)d\varepsilon_\varphi^c] + dnd\varepsilon_z^c. \quad (3.2)$$

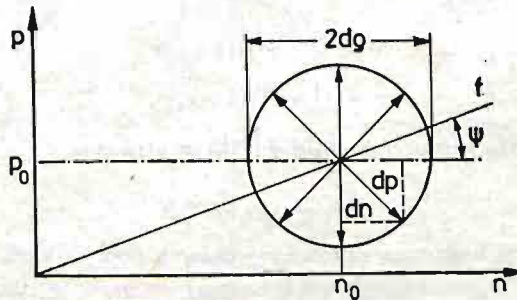
Analiza stateczności przeprowadzona została według metody zaproponowanej w pracy [6]. Polega ona na badaniu wartości pracy nadwyżkowej dla wszystkich możliwych zaburzeń położenia równowagi. Z [6] zaczerpnięto również definicje stateczności bezwzględnej oraz stateczności w kierunku ścieżki. W przypadku sterowania wieloparametrowego mówimy, że położenie równowagi układu jest bezwzględnie stateczne, jeżeli przy wszystkich możliwych jego zaburzeniach praca nadwyżkowa zewnętrzna jest nieujemna (w dopuszczalnej klasie form odkształcenia konstrukcji). Położenie równowagi jest stateczne w kierunku ścieżki „f”, jeżeli przy zaburzeniu w jej kierunku praca nadwyżkowa jest nieujemna (mimo iż w pozostałych kierunkach może być ujemna).

Wprowadzimy prostą parametryzację zaburzeń ścieżki sterowania (rys. 2)

$$\begin{aligned} dn &= dq \cos \psi, \\ dp &= dq \sin \psi, \\ \psi &\in [0; 2\pi), \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie dq jest promieniem zaburzenia. Praca nadwyżkowa związana z jednostkowym promieniem zaburzenia jest zatem dla danego punktu na ścieżce równowagi funkcją kąta ψ :

$$\frac{d^2w}{(dq)^2} = C_1 \sin^2 \psi + C_2 \cos^2 \psi + C_3 \sin \psi \cos \psi. \quad (3.4)$$



Rys. 2. Parametryzacja zaburzeń ścieżki sterowania

Stałe C_1 , C_2 , C_3 zależą od współrzędnych punktu na ścieżce równowagi i wyrażają się

$$C_1 = \frac{x^2}{3A} \left(1 + \frac{px}{6A} \right) + \frac{x\sqrt[3]{xyn}}{12AB} \left(\sqrt[3]{xy} - x\sqrt[3]{xy} \frac{p}{6A} - \frac{xy pn}{12AB} \right), \quad (3.5)$$

$$C_2 = \frac{y\sqrt[3]{xy}}{B} \left(\frac{1}{x} - \frac{p}{4B} \right), \quad (3.6)$$

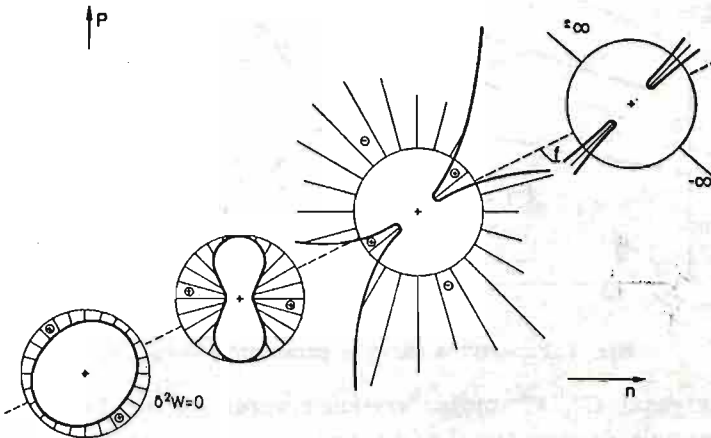
$$C_3 = \frac{\sqrt[3]{xy}}{12AB} \left(x\sqrt[3]{xy} p + \frac{xy pn}{B} - 2yn \right) - \sqrt[3]{x^2 y^2} \left(\frac{1}{2B} + \frac{1}{6A} \right), \quad (3.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \ln x, \\ B &= 3 - 2 \ln y, \end{aligned} \quad (3.8)$$

a x i y są rozwiązaniami układu równań przestępnych (2.6) i (2.7).

Rys. 3 przedstawia interpretację podanych definicji stateczności bezwzględnej i w kierunku, jak również pojęcia nośności maksymalnej (końca procesu wzdłuż zadanej ścieżki sterowania) wiążącej się z osobliwościami pracy nadwyżkowej ($d^2w \rightarrow \pm \infty$).



Rys. 3. Rozkład pracy nadwyżkowej w wybranych punktach procesu

Zaznaczone krzywe oznaczają rozkład pracy nadwyżkowej wokół punktu na ścieżce równowagi. Wartość d^2w jest na tym rysunku proporcjonalna do długości odcinka odmierzzonego wzdłuż promienia zaznaczonego koła od jego okręgu przyjętego jako poziom zero. Odcinek odłożony na zewnątrz okręgu oznacza $d^2w < 0$, do wewnątrz — $d^2w > 0$.

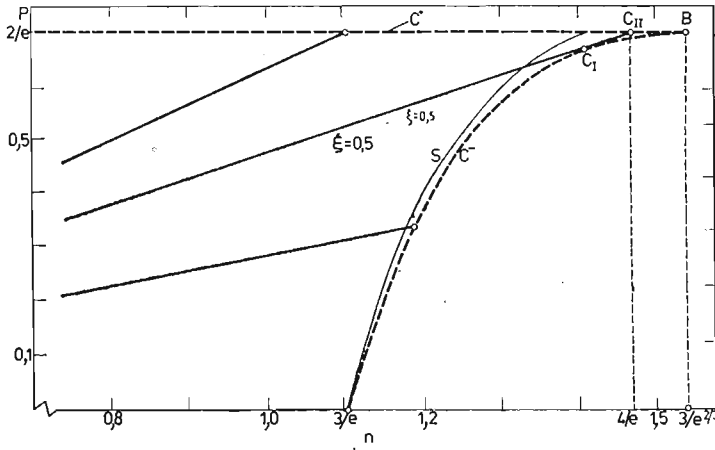
Na początku procesu praca nadwyżkowa jest we wszystkich kierunkach dodatnia. Punkt, w którym krzywa rozkładu d^2w jest styczna do okręgu $d^2w = 0$, jest ostatnim bezwzględnie statecznym na ścieżce sterowania. Utrata stateczności w kierunku ścieżki zachodzi, gdy d^2w dla kierunku wyznaczonego przez ścieżkę sterowania jest równa zero. Koniec procesu wzdłuż zadanej ścieżki sterowania łączy się z osiągnięciem przez d^2w wartości ∞ , co wynika ze zmierzania przyrostu zmiennej niezależnej do zera (nośność maksymalna).

Wykresy zależności odkształcenia ϵ_z^c od siły n (rys. 5) oraz odkształcenia ϵ_ϕ^c od ciśnienia p (rys. 6) sporządzono przyjmując równanie ścieżki sterowania procesem w postaci:

$$p = \xi_1 \cdot n, \quad (3.9)$$

gdzie ξ_1 jest współczynnikiem proporcjonalności. Rolę umownego czasu pełni siła osiowa n . Rys. 4 przedstawia płaszczyznę zmiennych sterowania $p-n$. Na wymienionych rysunkach krzywe C^+ i C^- oznaczają końce procesów (nośności maksymalne odpowiednio dla p i n). Praca nadwyżkowa zmierza wraz ze zbliżaniem się punktu na ścieżce równowagi do tych krzywych odpowiednio do $+\infty$ lub $-\infty$. Krzywa S oznacza punkty utraty stateczności bezwzględnej. Zauważmy, że praca nadwyżkowa przyjmuje po raz pierwszy wartość ujem-

ną, jeżeli zaburzenie ścieżki opisane jest parametrem $\psi = 0$ (wzór 3.3). Oznacza to, że kontynuacja procesu po utracie stateczności bezwzględnej przy stałym ciśnieniu ($dp = 0$) odbywałaby się w sposób niestateczny. Związane jest to z ujemną wartością drugiego składnika we wzorze (3.1) ($d\bar{r} < 0$).



Rys. 4. Płaszczyzna siłowych parametrów sterujących

Równania krzywych C^+ i C^- można uzyskać z warunków osobliwości odwzorowania przestrzeni sterowania do przestrzeni zachowania

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

lub równoważnie z warunku zmierzania d^2w do nieskończoności (wzory 3.5 ÷ 3.8)

$$A = 0 \quad \text{lub} \quad B = 0. \quad (3.11)$$

Otrzymujemy dwa równania krzywych nośności maksymalnej w płaszczyźnie sterowania (rys. 4):

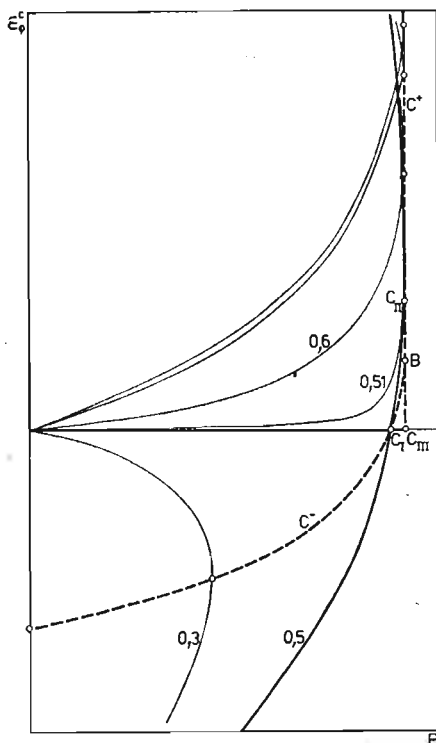
$$C^+: p = \frac{2}{e}, \quad (3.12)$$

$$C^-: p = \frac{6 \ln \frac{en}{3}}{\left(\frac{en}{3}\right)^3}. \quad (3.13)$$

Krzywa C^- jest wklęsła.

Kres istnienia rozwiązywania wzdłuż zadanej ścieżki sterowania odpowiada jednej z poniższych możliwości:

1) dla $0 \leq \xi_1 \leq 0.5$ (wzór 3.9) wykres $\varepsilon_z^c = \varepsilon_z^c(n)$ kończy się pionową styczną „w górę” $\left(\frac{\partial \varepsilon_z^c}{\partial n} \rightarrow +\infty\right)$, a wykres $\varepsilon_\varphi^c = \varepsilon_\varphi^c(p)$ — pionową styczną „w dół” $\left(\frac{\partial \varepsilon_\varphi^c}{\partial p} \rightarrow -\infty\right)$



Rys. 6. Zależność $\varepsilon_{\varphi}^c = \varepsilon_{\varphi}^c(p)$, sterowanie siłowe

Przykładową krzywą sterującą zapewniającą powyższe jest parabola o równaniu

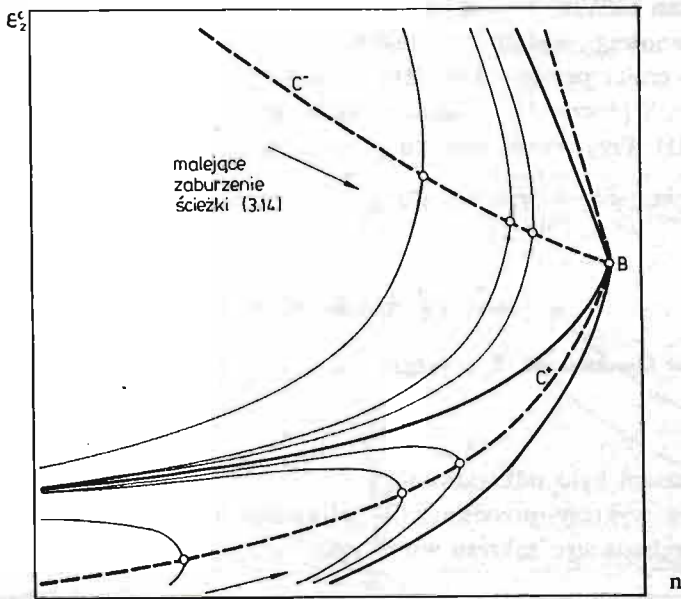
$$p = -\frac{2\sqrt[3]{e}}{9}n^2 + \frac{4}{3\sqrt[3]{e}}n. \quad (3.14)$$

Kontynuacja procesu z punktu B przy malejącym parametrze czasu (siły n) możliwa jest (oprócz powrotu po ścieżce podstawowej) w dwóch różnych kierunkach: $\varepsilon_z^c \rightarrow \infty$ i $\varepsilon_{\varphi}^c \rightarrow -1$ lub $\varepsilon_z^c \rightarrow -1$ i $\varepsilon_{\varphi}^c \rightarrow \infty$ (rys. 7). Prowadząc obliczenia dla zaburzonej ścieżki typu (3.14) otrzymujemy przebiegi wpisujące się w krzywe niezaburzone (rys. 7).

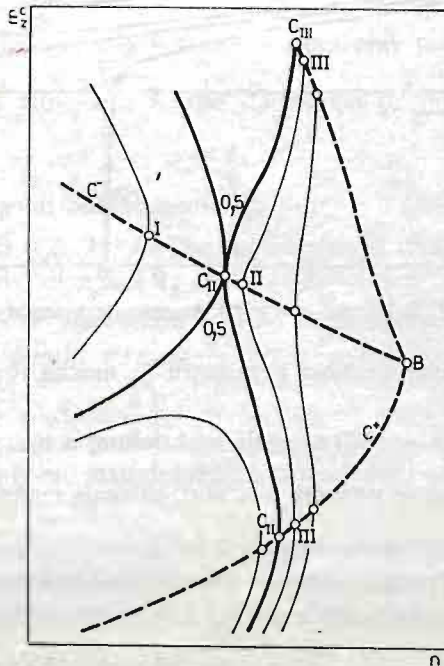
Charakter tych przebiegów, jak również rozdwojenie ścieżki po osiągnięciu nośności maksymalnej sugeruje, że punkt B jest punktem bifurkacji ze względu na parametr ścieżki sterowania. Obie formy równowagi odpowiadające rozdwojonej ścieżce położeń równowagi są przy tym symetryczne (zgodnie z dopuszczoną klasą rozwiązań) i prowadzą w konsekwencji do różnych mechanizmów zniszczenia cylindra. Wracając do analizy ścieżek prostoliniowych w płaszczyźnie sił należy jeszcze zwrócić uwagę na takie, dla których parametr ścieżki spełnia warunek

$$\frac{2}{3e^{2/3}} < \xi_1 < 0,5 \quad (3.15)$$

Dla parametru z tego przedziału ścieżka sterująca przecina krzywą nośności maksymalnej C^- (w dwóch punktach I i II (rys. 8), a krzywą C^+ w punkcie III.



Rys. 7. Fragment płaszczyzny sterowania i zachowania; sterowanie siłowe paraboliczne (3.14)



Rys. 8. Fragment płaszczyzny sterowania i zachowania dla ścieżek typu (3.15)

Ponieważ stan układu, ze względu na konserwatywność, nie zależy od drogi dojścia do punktu równowagi, można po dojściu drogą krzywoliniową kontynuować proces wzdłuż drugiej części prostej (3.9). Rys. 8 pokazuje fragment płaszczyzny $(n - \varepsilon_z^c)$ dla tych przebiegów. Widoczne jest osiągnięcie przez krzywą minimum (punkt II) oraz maksimum (punkt III). Przy współczynniku ξ_1 zmierzającym do 0,5 punkty I i II łączą się w jeden, natomiast gdy ξ_1 zmierza do $\frac{2}{3e^{2/3}}$, punkty II i III zbiegają do punktu B.

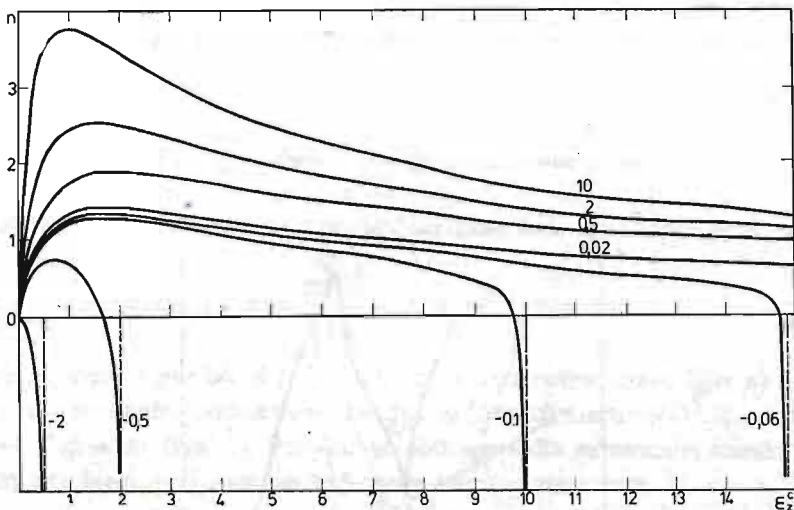
4. Sterowanie kinematyczne i mieszane

4.1. Sterowanie kinematyczne. Rozważano procesy, których ścieżkę sterowania wybrano w postaci:

$$\varepsilon_\varphi^c = \xi_2 \cdot \varepsilon_z^c, \quad (4.1)$$

a umownym czasem było odkształcenie ε_z^c .

Odpowiednie wykresy przedstawiają zależności $n = n(\varepsilon_z^c)$ (rys. 9) oraz $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$ (rys. 10) dla przebadanego zakresu współczynnika ξ_2 .



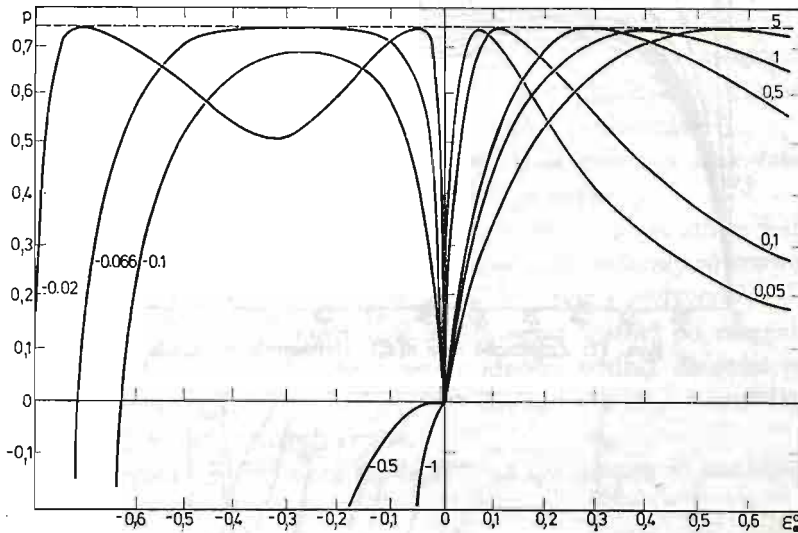
Rys. 9. Zależność $n = n(\varepsilon_z^c)$; sterowanie kinematyczne

W zależności od przyjętej wartości parametru ξ_2 można rozróżnić następujące przypadki:

1) dla $\xi_2 > 0$ wykresy $n = n(\varepsilon_z^c)$ osiągają maksimum, a następnie zbiegają asymptotycznie do $n = 0$. Odpowiednie wykresy $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$ osiągają maksimum $p_{\max} = \frac{2}{e}$, po czym również zbiegają asymptotycznie do $p = 0$.

2) dla $\xi_2 < 0$ ograniczeniem realizacji procesu jest zmierzanie odkształcenia ε_φ^c do wartości -1 . Wykresy $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$ oraz $n = n(\varepsilon_z^c)$ kończą się wtedy asymptotami pionowymi odpowiednio $\varepsilon_\varphi^c = -1$ i $\varepsilon_z^c = -\frac{1}{\xi_2}$, co oznacza, że ciśnienie p i siła n zbiegają do $-\infty$.

Dla $-0,066 \leq \xi_2 < 0$ wykres zależności $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$ posiada dwa maksima, a zależności $n = n(\varepsilon_z^c)$ — dwa punkty przegięcia. Procesy, dla których ξ_2 jest bliskie $-0,066$, przebiegają w pewnym przedziale wartości odkształcenia ε_φ^c przy prawie stałym ciśnieniu (bardzo płaski przebieg zależności $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$).



Rys. 10. Zależność $p = p(\varepsilon_\varphi^c)$; sterowanie kinematyczne

Graniczna wartość współczynnika $\xi_2 = -0,066$ została wyznaczona numerycznie, jako taka, przy której równanie $\frac{\partial p}{\partial \varepsilon_\varphi^c} = 0$ posiada potrójny pierwiastek $\varepsilon_\varphi^c < 0$.

4.2. Sterowanie mieszane. Równanie ścieżki sterowania przyjęto w postaci

$$p = \xi_3 \cdot \varepsilon_z^c, \tag{4.2}$$

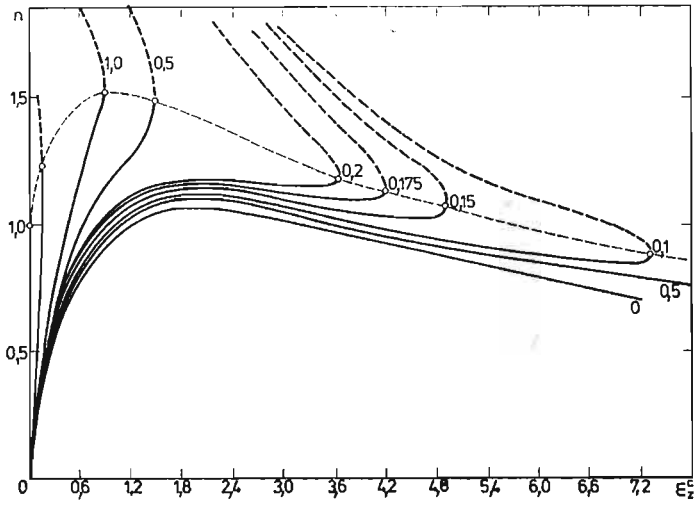
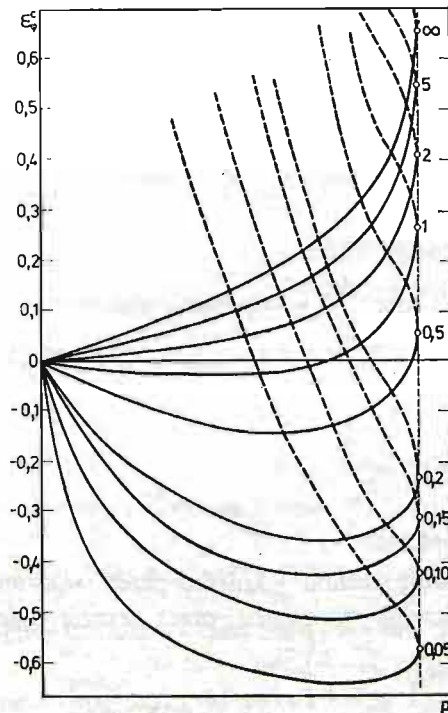
a rolę umownego czasu pełni odkształcenie ε_z^c .

Na wykresie $n = n(\varepsilon_z^c)$ (rys. 11) można zaobserwować dwa odmienne przebiegi krzywych w zależności od współczynnika ξ_3 (wzór (4.2)).

1) Dla $\xi_3 < 0,25$ krzywe przechodzą kolejno przez maksimum, minimum oraz osiągają kres wzdłuż danej ścieżki sterowania przez wyczerpanie nośności maksymalnej (ciśnienie p osiąga wtedy wartość $\frac{2}{e}$).

2) Dla $\xi_3 \geq 0,25$ krzywe nie mają lokalnych ekstremów i osiągają wprost opisany wyżej kres.

Przy rosnącym parametrze sterującym (wzdłuż danej ścieżki) proces osiąga kres w punkcie, w którym ciśnienie osiąga wartość maksymalną. Może on być dalej kontynuowany wzdłuż tej samej ścieżki jedynie przy malejącej wartości tego parametru. Możliwe są przy tym również nowe położenia równowagi układu będące przedłużeniem poprzednich rozwiązań (linia przerywana rys. 11 i 12).

Rys. 11. Zależność $n = n(\epsilon_2^c)$; sterowanie mieszaneRys. 12. Zależność $\epsilon_\varphi^c = \epsilon_\varphi^c(p)$; sterowanie mieszane

5. Wnioski

Badano kresy istnienia rozwiązań dla cienkiej powłoki cylindrycznej rozciąganej dwukierunkowo przy różnych wariantach sterowania procesem.

1. W przypadku sterowania kinematycznego ograniczeniem realizacji procesu jest

zmierzanie odkształcenia ε_{φ}^c do wartości -1 (promień \bar{r} powłoki zmierza do zera), co łączy się z osobliwościami wielkości siłowych.

2. Przy sterowaniu siłowym istnieją dwa rodzaje kresów istnienia rozwiązania wzdłuż zadanej ścieżki sterowania — obydwa przez wyczerpanie nośności maksymalnej.

Jednym z nich jest nośność maksymalna ze względu na ciśnienie p (dla $\xi_1 > 0,5$; praca nadwyżkowa zmierza do $+\infty$), a drugim — nośność maksymalna ze względu na siłę osiową n (dla $\xi_1 < 0,5$; praca nadwyżkowa zmierza do $-\infty$).

Przy parametrze $\xi_1 = 0,5$ istnieje w związku z tym niestabilność rozwiązania w punkcie bifurkacji C_I , polegająca na tym, że dowolnie małe jego odchylenie (od wartości $\xi_1 = 0,5$) może spowodować dwa różne rodzaje kresu istnienia rozwiązania.

3. Możliwa jest kontynuacja procesu po osiągnięciu nośności maksymalnej wzdłuż zadanej ścieżki przy malejącym parametrze umownego czasu.

4. Przy odpowiednim doborze sterowania krzywoliniowego możliwe jest osiągnięcie punktu bifurkacji B (podwójnej nośności maksymalnej). Obie formy równowagi odpowiadające rozdwojonej ścieżce położenia równowagi są przy tym symetryczne.

5. Należy zwrócić uwagę, że możliwość rozdwojenia ścieżki po osiągnięciu punktu bifurkacji może spowodować zaburzenie jednorodności wzdłuż długości powłoki (np. przez równoczesną realizację różnych form równowagi w różnych częściach powłoki). Efekty takie nie były w pracy rozpatrywane.

6. Krzywa (nośności maksymalnej ze względu na siłę osiową n) jest wklęsła w płaszczyźnie sterowania $p-n$.

Literatura

1. D. C. DRUCKER, *On the postulate of stability in the mechanics of continua*, J. de Mecanique, 2, 3, 235 - 249, 1964.
2. W. FLUGGE, *Die stabilität der Kreiscylindershale*, Ing. Arch. 5, 3 463 - 506 (1932).
3. F. D. MURNANGHAN, *The compressibility of solids under extreme pressures*, Kármán Anniv. 121 - 136, 1961.
4. Ch. M. MUSZTARI, A. W. SAWCZENKO, *Ob ustojczivosti cylindriczeskich i koniczeskich oboloczek kruzogogo seczenija pri sowmestnom diejstwji osiewogo szatija i wnieszniego normalnogo dawlenija*, Prikl. Mat. Miecz., 6, 18, 667 - 669, 1954.
5. A. MUC, J. SKRZYPEK, *Duże odkształcenia sprężysto-plastyczne powłok walcowych obciążonych ciśnieniem i siłą osiową przy różnych wariantach sterowania procesem* (w druku).
6. J. SKRZYPEK, *Odkształcenia plastyczne i analiza form utraty nośności geometrycznie nieliniowych powłok toroidalnych*. Zeszyty Nauk. Polit. Krak., Podst. Nauki Techn., 2, 1 - 194, 1979.
7. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
8. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *Principles of classical mechanics and field theory*, Handbuch der Physik 3/1, Springer-Verlag, Berlin 1960.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В СЛУЧАЕ ДВУНАПРАВЛЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ

Рассмотрен процесс двунаправленного растяжения тонкостенной цилиндрической оболочки продольной силой и внутренним давлением. Предположен материал выполняющий закон Гука, обобщенный для случая логарифмических деформаций и действительных напряжений.

Определены зависимости между силовыми и геометрическими величинами для разных вариантов управления процессом. В случае силового управления определены точки потери абсолютной устойчивости используя критерий работы второго порядка. Определены также кривые максимальной несущей способности, а также точки бифуркации для принятых дорожек управления

Summary

STABILITY OF THE PROCESS OF LARGE ELASTIC STRAINS OF A CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO BIAXIAL TENSION

Process of biaxial tension of thin cylindrical shell loaded by the axial force and internal pressure has been analysed. The material has been described by Hooke's law generalized for the logarithmic strains and true stresses.

The relations between forces and geometrical quantities have been determined for the different variants of control of the process. In the case of force-controlled process the points of the loss of absolute stability have been found on the basis of second-order work criterion. Curves of maximal carrying capacity and bifurcation points also have been determined.

Autorzy wyrażają podziękowanie prof. dr hab. inż. Michałowi Życzkowskiemu za cenne sugestie w trakcie realizacji pracy.

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 września 1982 roku
