MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3-4, 22 (1984)

ZREDUKOWANE LINIOWE RÓWNANIA POWŁOK O WOLNO ZMIENNYCH KRZYWIZNACH

ZENON RYCHTER (BIAŁYSTOK)

1. Wstęp

Zginanie sprężystych, izotropowych powłok o małej wyniosłości można opisać w ramach liniowej teorii typu Kirchhoffa-Love'a za pomocą układu dwóch równań względem funkcji naprężeń i ugięcia, otrzymanych przez Donnella [1], Musztari [2] i Własowa [3]. Równania te obowiązują także dla powłok wyniosłych, jeżeli odkształcenia są szybko zmiennymi funkcjami współrzędnych na środkowej powierzchni powłoki (por. [4]). Libai [5] wykazał, że wspomniane równania są również ważne w klasie powłok quasi-połogich, dla których iloczyn krzywizny Gaussa i kwadratu długości fali deformacji jest wielkością pomijalną wobec jedności. Koiter [6] wprowadził w miejsce ugięcia jako niewiadomą funkcję odkształceń, uzyskując równania o strukturze identycznej z równaniami [5]. Łukasiewicz rozwinął w szeregu prac, np. [7], koncepcję powłok o wolno zmiennych krzywiznach, osłabiając założenia przyjęte w [1 - 6]. Jednak otrzymane w [7] dwa równania dla funkcji naprężeń i ugięcia są znacznie bardziej skomplikowane niż równania [1 - 6]. Usunięcie tej niedogodności jest celem niniejszej pracy. Wykażemy, że zginanie powłok o wolno zmiennych krzywiznach można opisać za pomocą prostych równań rozwiązujących teorii powłok quasi-połogich [6]; pewnej komplikacji ulegają przy tym tylko warunki brzegowe oraz wzory na odkształcenia i siły wewnętrzne. Wywód równań powłok o wolno zmiennych krzywiznach, „zredukowanych" w stosunku do [7], oprzemy na założeniach upraszczających nieco odmiennych od przyjętych w [7], ale nie silniejszych.

2. Równania podstawowe

Środkową powierzchnię powłoki parametryzujemy za pomocą krzywoliniowych współrzędnych x^{δ}, przy czym indeksy greckie przyjmują wartości ze zbioru (1, 2). Jako miary odkształceń i sił wewnętrznych wybieramy symetryczne tensory $\gamma_{\alpha\beta}(x^{\delta})$, $\varkappa_{\alpha\beta}(x^{\delta})$, $N_{\alpha\beta}(x^{\delta})$ i $M_{\alpha\beta}(x^{\delta})$, wprowadzone przez Naghdiego [8, 9] (wymienione tensory mają w [8, 9] dodatkowo falę umieszczoną nad symbolem), charakteryzujące odpowiednio odkształcenia błonowe, zmiany krzywizn, siły błonowe i momenty. Wielkości te czynią zadość równaniom równowagi [8]

$$
\begin{aligned}
B^{\alpha} &= N^{\beta\alpha}_{|\beta} - 2b^{\alpha}_{\nu} M^{\nu\beta}_{|\beta} - b^{\alpha}_{\nu|\beta} M^{\nu\beta} + q^{\alpha} - b^{\alpha}_{\nu} m^{\nu} = 0, \\
B &= b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} b^{\alpha}_{\nu} M^{\nu\beta} + q + m^{\alpha}_{|\alpha} = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(z których w zwykły sposób wyeliminowano siły poprzeczne), warunkom nierozdzielności [9]

$$\begin{aligned} A^{\varphi} &= d^{\beta\eta}[d^{\alpha\varphi}\varkappa_{\alpha\beta|\eta}+(d^{\alpha\varphi}b^{\lambda}_{\beta}\gamma_{\lambda\alpha|\eta}+d^{\alpha\delta}b^{\varphi}_{\delta}\gamma_{\alpha\beta|\eta})+d^{\alpha\varphi}b^{\lambda}_{\beta|\eta}\gamma_{\lambda\alpha}] = 0, \\ A &= d^{\alpha\lambda}d^{\beta\eta}(-b_{\lambda\eta}\varkappa_{\alpha\beta}+\gamma_{\alpha\beta|\eta\lambda}-b_{\lambda\eta}b^{\nu}_{\beta}\gamma_{\nu\alpha}) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

oraz równaniom konstytutywnym [8]

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{Eh}[(1+\nu)N_{\alpha\beta}-\nu a_{\alpha\beta}N^{\lambda}_{\lambda}], \\ M_{\alpha\beta} &= D[(1-\nu)\varkappa_{\alpha\beta}+\nu a_{\alpha\beta}\varkappa^{\lambda}_{\lambda}], \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{4}$$

We wzorach tych $q^{\alpha}(x^{\delta})$ jest obciążeniem stycznym, $q(x^{\delta})$ obciążeniem normalnym, $m^{\alpha}(x^{\delta})$ zaś obciążeniem parą sił, przy czym wielkości te są odniesione do jednostki pola środkowej powierzchni powłoki; $a_{\alpha\beta}(x^{\delta})$ $b_{\alpha\beta}(x^{\delta})$ i $d_{\alpha\beta}(x^{\delta})$ oznaczają tensor metryczny, tensor krzywizny i tensor permutacyjny, symbol $(\ )_{|\alpha}$ oznacza powierzchniowe różniczkowanie kowariantne. Ponadto E jest modułem Younga, h zaś grubością powłoki; wielkości te są w niniejszej pracy stałe.

Uproszczenia równań podstawowych oprzemy na apriorycznych oszacowaniach ich składników. W tym celu zakładamy, że współrzędne x^{δ} mają wymiar długości. Wówczas składowe kowariantne, kontrawariantne i mieszane dowolnego tensora mają wymiar składowych fizycznych. W szczególności dla składowych tensora metrycznego i permutacyjnego słuszne są wtedy związki

$$a_{\alpha\beta} = 0(1), \qquad d_{\alpha\beta} = 0(1), \tag{5}$$

gdzie symbol $A = 0(B)$ oznacza istnienie takiej stałej dodatniej d, że zachodzi $|A| \leqslant d|B|$.

Liczby R, γ i $\varkappa$, charakteryzujące amplitudy krzywizn, odkształceń błonowych i odkształceń zgięciowych, definiujemy następująco

$$|b_{\alpha\beta}(x^{\delta})| \leqslant 1/R, \quad |\gamma_{\alpha\beta}(x^{\delta})| \leqslant \gamma, \quad |\varkappa_{\alpha\beta}(x^{\delta})| \leqslant \varkappa. \tag{6}$$

Pochodne krzywizn oraz miar odkształceń błonowych i zgięciowych względem współrzędnych x^{δ} można ocenić za pomocą długości fal L_R, L_N i L_M, zgodnie ze wzorami

$$|b_{\alpha\beta}(x^{\delta})_{|\eta}| \leqslant \frac{1}{RL_R}, \quad |\gamma_{\alpha\beta}(x^{\delta})_{|\eta}| \leqslant \frac{\gamma}{L_N}, \quad |\varkappa_{\alpha\beta}(x^{\delta})_{|\eta}| \leqslant \frac{\varkappa}{L_M}, \tag{7}$$

przy czym przy szacowaniu wyższych pochodnych długości fal nie ulegają zmianie, np.

$$|b_{\alpha\beta}(x^{\delta})_{|\eta\lambda}| \leqslant \frac{1}{RL_R^2}, \quad |\gamma_{\alpha\beta}(x^{\delta})_{|\eta\lambda}| \leqslant \frac{\gamma}{L_N^2}, \quad |\varkappa_{\alpha\beta}(x^{\delta})_{|\eta\lambda}| \leqslant \frac{\varkappa}{L_M^2}.$$

Z równań konstytutywnych (3) otrzymujemy za pomocą (5) i (6) oszacowania sił wewnętrznych

$$N_{\alpha\beta} = 0(Eh\gamma), \qquad M_{\alpha\beta} = 0(Eh^3\varkappa) \tag{8}$$

i ich pochodnych

$$N_{\alpha\beta|\eta} = 0(Eh\gamma/L_N), \qquad M_{\alpha\beta|\eta} = 0(Eh^3\varkappa/L_M). \tag{9}$$

Ze związków (5) - (9) będziemy dalej korzystać bez szczegółowego odwoływania się. Za ich pomocą znajdujemy oszacowania składników równań równowagi (1) (bez członów obciążeniowych)

$$\begin{aligned} B^{\alpha}&: \frac{Eh\gamma}{L_N}\left[0(1)-0\left(\frac{h}{R}\frac{h\varkappa}{\gamma}\frac{L_N}{L_M}\right)-0\left(\frac{h}{R}\frac{h\varkappa}{\gamma}\frac{L_N}{L_R}\right)\right],\\ B&: \frac{Eh\gamma}{R}\left[0(1)+0\left(\frac{h}{R}\frac{R^2}{L_M^2}\frac{h\varkappa}{\gamma}\right)-0\left(\frac{h}{R}\frac{h\varkappa}{\gamma}\right)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

i warunków nierozdzielności (2)

$$\begin{aligned} A^{\varphi}&: \frac{\varkappa}{L_M}\left[0(1)+0\left(\frac{h}{R}\frac{\gamma}{h\varkappa}\frac{L_M}{L_N}\right)+0\left(\frac{h}{R}\frac{\gamma}{h\varkappa}\frac{L_M}{L_R}\right)\right],\\ A&: \frac{\varkappa}{R}\left[-0(1)+0\left(\frac{h}{R}\frac{R^2}{L_N^2}\frac{\gamma}{h\varkappa}\right)-0\left(\frac{h}{R}\frac{\gamma}{h\varkappa}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

3. Równania podstawowe powłok o wolno zmiennych krzywiznach

Formułowanie założeń umożliwiających redukcję równań podstawowych do równań powłok o wolno zmiennych krzywiznach zacznijmy od stwierdzenia, że równania konstytutywne (3) nie są dokładne, ich residualny błąd względny jest wielkością rzędu $h/R+h^2/L^2$ (L jest mniejszą z liczb L_N, L_M), co wykazał Koiter [10]. Człony tego rzędu możemy więc pomijać względem jedności we wszystkich równaniach, co zapisujemy w postaci warunków:

$$h/R \leqslant \vartheta^2, \quad h/L_N \leqslant \vartheta, \quad h/L_M \leqslant \vartheta, \quad \vartheta^2 \ll 1, \tag{12}$$

gdzie ϑ oznacza pomocniczy bezwymiarowy parametr, którego kwadrat i wyższe potęgi są pomijalnie małe wobec jedności; warunkom (12) odpowiadają powłoki cienkie i niezbyt silnie zakrzywione, których deformacje zmieniają się odpowiednio wolno jako funkcje współrzędnych x^{δ}.

Drugie człony w równaniach $(10)_2$ i $(11)_2$ są pomijane w ramach teorii bezmomentowej i przy zginaniu izometrycznym. W teorii zgięciowej, aby zachować te człony, musimy założyć, że

$$\frac{h}{R}\frac{R^2}{L_N^2}\frac{h\varkappa}{\gamma} > \vartheta^2, \quad \frac{h}{R}\frac{R}{L_M^2}\frac{\gamma}{h\varkappa} > \vartheta^2. \tag{13}$$

W przypadku powłok o wolno zmiennych krzywiznach wyrazy zawierające pochodne krzywizn należy odrzucić w równaniach $(10)_1$ i $(11)_1$, co jest możliwe przy spełnieniu warunków

$$\frac{h}{R}\frac{h\varkappa}{\gamma}\frac{L_N}{L_R} \leqslant \vartheta^2, \quad \frac{h}{R}\frac{\gamma}{h\varkappa}\frac{L_M}{L_R} \leqslant \vartheta^2. \tag{14}$$

Rozwiązania ogólne równań $(1)_1$ i $(2)_1$ można wyrazić za pomocą funkcji naprężeń (por. [7]) i funkcji odkształceń (por. [6]), przy czym residualny błąd względny tych rozwiązań nie przekroczy ϑ^2, gdy

$$L_N^3|K|/L_R \leqslant \vartheta^2, \quad L_M^3|K|/L_R \leqslant \vartheta^2, \tag{15}$$

gdzie $|K|$ jest maksymalną wartością absolutną krzywizny Gaussa $K(x^\delta)$. Klasę powłok quasi-połogich określa warunek $L^2|K| \leqslant \vartheta^2$ [6]. W szerszej klasie powłok o wolno zmiennych krzywiznach należy przyjąć słabsze ograniczenie, a więc

$$L_N^2|K| > \vartheta^2, \quad L_M^2|K| > \vartheta^2. \tag{16}$$

Po uwzględnieniu (16), z nierówności (15) otrzymujemy

$$L_N/L_R \leqslant 1, \quad L_M/L_R \leqslant 1. \tag{17}$$

Krzywizna Gaussa dana jest wzorem $K = 1/(R_1 R_2)$, gdzie $R_1(x^\delta)$, $R_2(x^\delta)$ są promieniami głównych krzywizn. Z definicji charakterystycznego promienia krzywizny R mamy $R \leqslant |R_1|$ i $R \leqslant |R_2|$, a więc $|K|$ można przedstawić w postaci $|K| = \theta/R^2$, gdzie $\theta \leqslant 1$. Wprowadzenie parametru θ zezwala na następującą klasyfikację: $\theta \simeq 1$ odpowiada powłokom zbliżonym do sfery, $\theta \ll 1$ charakteryzuje powłoki walcowe i stożkowe, pośrednie wartości θ odnoszą się do powłok elipsoidalnych. Po uwzględnieniu, że $|K| = \theta/R^2$, warunki (15) przyjmują postać

$$\frac{L_N^2}{R^2}\frac{L_N}{L_R}\theta \leqslant \vartheta^2, \quad \frac{L_M^2}{R^2}\frac{L_M}{L_R}\theta \leqslant \vartheta^2. \tag{18}$$

W równaniach powłok o małej wyniosłości odrzucane są wobec jedności człony rzędu L^2/R^2 (por. [4]). W przypadku powłok o łagodnie zmiennych krzywiznach człony tego rzędu należy zachować, tj. przyjąć

$$L_N^2/R^2 > \vartheta^2, \quad L_M^2/R^2 > \vartheta^2. \tag{19}$$

Spełnienie warunków (12) - (19) jest konieczne do otrzymania nietrywialnych (ogólniejszych niż znane równania teorii bezmomentowej, równania powłok o małej wyniosłości i powłok quasi-połogich) i konsekwentnie uproszczonych (przez odrzucenie członów rzędu $\vartheta^2 \ll 1$ i mniejszych) równań powłok o wolno zmiennych krzywiznach. We wspomnianych warunkach występuje szereg bezwymiarowych parametrów. Wartości sześciu z nich można zadać niezależnie (np. h/R, $h\varkappa/\gamma$, θ, L_N/L_M, L_N/R, L_N/L_R). Dalej nie będziemy analizować wszystkich możliwych przypadków, lecz przyjmiemy

$$h/R = \vartheta^2, \quad h\varkappa/\gamma = 1, \quad L_N = L_M = L. \tag{20}$$

Pierwszy z tych warunków oznacza, że powłoka jest cienka (nadając też sens fizyczny parametrowi ϑ), z pozostałych wynika, że deformacja powłoki jest zgięciowa. Po wykorzystaniu (20), warunki (12) - (19) znacznie się redukują, przyjmując postać

$$\vartheta < L/R < 1, \quad (L/R)^2(L/L_R)\theta \leqslant \vartheta^2, \quad L/L_R \leqslant 1, \quad \theta \leqslant 1. \tag{21}$$

Nierówności $(21)_1$ uczynimy zadość kładąc

$$L/R = \sqrt{\vartheta}, \tag{22}$$

co odpowiada deformacjom o umiarkowanej zmienności (dla porównania: $L/R = 1$ oznacza deformacje wolno zmienne, występujące w teorii bezmomentowej, $L/R = \vartheta$ charakteryzuje odkształcenia szybkozmienne, opisywane równaniami powłok o małej wyniosłości). Po uwzględnieniu (22), warunki (21) ulegają uproszczeniu do postaci

$$(L/L_R)\theta \leqslant \vartheta, \quad L/L_R \leqslant 1, \quad \theta \leqslant 1. \tag{23}$$

Czyniąc zadość zależnościom (23), otrzymujemy dwa fizycznie interesujące przypadki

$$(\theta = 1, \quad L/L_R \leqslant \vartheta), \quad (\theta \leqslant \vartheta, \quad L/L_R = 1). \tag{24}$$

Warunkom $(24)_1$ odpowiadają powłoki o prawie równych krzywiznach głównych (zbliżone do sferycznych), zmieniających się wolniej niż odkształcenia. W przypadku $(24)_2$ mamy do czynienia z powłokami o różnych krzywiznach głównych (np. wydłużone elipsoidy), których zmienność jest taka sama jak zmienność deformacji.

Ostatecznie klasę rozważanych w tej pracy powłok o wolno zmiennych krzywiznach określają warunki (20), (22), (24), przy których oszacowania (10), (11) składników równań podstawowych przyjmują postać:

$$\begin{aligned} &B^\alpha: \frac{Eh\gamma}{L}[0(1)-\underline{0(\vartheta^2)}-\underline{0(\vartheta^{3,2})}],\\ &B: \frac{Eh\gamma}{R}[0(1)+0(\vartheta)-\underline{0(\vartheta^2)}] \end{aligned} \tag{25}$$

oraz

$$\begin{aligned} &A^\varphi: \frac{\varkappa}{L}[0(1)+\underline{0(\vartheta^2)}+\underline{0(\vartheta^{3,2})}],\\ &A: \frac{\varkappa}{R}[-0(1)+0(\vartheta)-\underline{0(\vartheta^2)}], \end{aligned} \tag{26}$$

gdzie wykładnik przed przecinkiem odpowiada przypadkowi $(24)_1$, a po przecinku — $(24)_2$. W obu przypadkach podkreślone człony są pomijalnie małe wobec jedności; odrzucając ich odpowiedniki w (1) i (2), otrzymujemy

$$\begin{aligned} B^\alpha &= N^{\beta\alpha}_{|\alpha}+q^\alpha-b^\alpha_\nu m^\nu = 0,\\ B &= b_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta}+q+m^\alpha_{|\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

oraz

$$\begin{aligned} A^\varphi &= d^{\beta\eta}d^{\alpha\varphi}\varkappa_{\alpha\beta|\eta} = 0,\\ A &= d^{\alpha\lambda}d^{\beta\eta}(-b_{\lambda\eta}\varkappa_{\alpha\beta}+\gamma_{\alpha\beta|\eta\lambda}) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Są to zredukowane równania równowagi i warunki nierozdzielności powłok o wolno zmiennych krzywiznach. Formalnie, równania te nie różnią się od równań powłok połogich i quasi-połogich, jednak otrzymano je przy słabszych założeniach, prowadzących do odmiennych rozwiązań.

4. Równania rozwiązujące

Siły wewnętrzne i odkształcenia można wyrazić za pomocą funkcji naprężeń $\Phi(x^\delta)$ i funkcji odkształceń $\Psi(x^\delta)$, tak aby równania $(27)_1$ i $(28)_1$ były spełnione tożsamościowo. W tym celu rozważmy wyrażenia

$$N^{\beta\alpha} = -d^{\beta\lambda}d^{\alpha\mu}\Phi_{\mu\lambda}-a^{\alpha\beta}K\Phi+P^{\beta\alpha}, \qquad \varkappa_{\alpha\beta} = -\Psi_{\alpha\beta}-a_{\alpha\beta}K\Psi, \tag{29}$$

gdzie $P^{\beta\alpha}(x^\delta)$ jest całką szczególną $(27)_1$. Podstawiając (29) do $(27)_1$ i $(28)_1$, i korzystając ze znanych związków geometrycznych (por. [8])

$$d^{\beta\lambda}d^{\alpha\mu} = a^{\beta\alpha}a^{\lambda\mu}-a^{\beta\mu}a^{\lambda\alpha}, \qquad d^{\beta\lambda}v_{\alpha|\beta\lambda} = Kd_{\lambda\alpha}v^\lambda, \tag{30}$$

gdzie $v_\alpha(x^\delta)$ jest dowolnym wektorem, otrzymujemy w $(27)_1$ i $(28)_1$ residualny błąd bezwzględny rzędu $0(\Phi|K|/L_R)$ i $0(\Psi|K|/L_R)$, przy czym największe wyrazy w tych równaniach są rzędu $0(\Phi/L^3)$ i $0(\Psi/L^3)$. Zatem residualny błąd względny jest wielkością rzędu $0(L^3|K|/L_R)$, którą zgodnie z założeniami (15) można pominąć wobec jedności. Po podstawieniu (29) do (3) i uwzględnieniu $(30)_1$ oraz $a^\alpha_\alpha = 2$, znajdujemy wzory uzależniające od Φ i Ψ pozostałe odkształcenia i siły wewnętrzne

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{Eh}[-a_{\alpha\beta}\Delta\Phi+(1+\nu)\Phi_{|\alpha\beta}-(1-\nu)a_{\alpha\beta}K\Phi+(1+\nu)P_{\alpha\beta}-\nu a_{\alpha\beta}P^\lambda_\lambda],\\
M_{\alpha\beta} &= D[-\nu a_{\alpha\beta}\Delta\Psi-(1-\nu)\Psi_{|\alpha\beta}-(1+\nu)a_{\alpha\beta}K\Psi],
\end{aligned}
\tag{31}
$$

gdzie $\Delta(\ ) = (\ )|^\alpha_\alpha$ jest operatorem Laplace'a.

Podstawiając (29) i (31) do $(27)_2$ i $(28)_2$ i korzystając z (30), otrzymujemy równania rozwiązujące dla funkcji Φ i Ψ

$$
\begin{aligned}
B&: D\Delta\Delta\Psi+\Delta_K\Phi = q+m^\alpha_{|\alpha}+b_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta},\\
A&: \Delta\Delta\Phi-Eh\Delta_K\Psi = \Delta P^\alpha_\alpha-(1+\nu)P^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta},
\end{aligned}
\tag{32}
$$

gdzie

$$
\Delta_K(\ ) = b^\alpha_\alpha\Delta(\ )-b^{\alpha\beta}(\ )_{|\alpha\beta}. \tag{33}
$$

W trakcie przekształceń odrzucono małe człony zawierające krzywiznę Gaussa. Korzystając z $(30)_2$ zmieniano też porządek różniczkowania kowariantnego (np. $\Psi|^{\alpha\beta}_{\beta\alpha} = \Delta\Delta\Psi[1+\underline{0(|K|L^2)}]$, a ponieważ przy naszych założeniach mamy $|K|L^2 \leqslant \vartheta$ oraz $D\Delta\Delta\Psi = 0(\vartheta\Delta_K\Phi)$, to wpływ podkreślonego członu jest w równaniu B nie większy niż ϑ^2, a więc pomijalny).

Równania rozwiązujące uzupełnimy statycznymi warunkami brzegowymi (por. np. [11])

$$
\begin{aligned}
Q^\alpha &= N^{\beta\alpha}\nu_\beta+0(Eh^3\varkappa/R),\\
Q &= M^{\alpha\beta}_{|\alpha}\nu_\beta+(M^{\alpha\beta}\nu_\alpha t_\beta)_{|\delta}t^\delta,\\
M &= M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

w których na krawędzi środkowej powierzchni powłoki z jednostkowym wektorem stycznym t_β i normalnym ν_α zadano dwie składowe Q^α siły stycznej do powierzchni środkowej, skalar Q stanowiący kombinację siły poprzecznej i pochodnej w kierunku t_β momentu skręcającego oraz moment zginający M; we wzorze na Q^α pominięto mały człon rzędu $0(\vartheta^2Q^\alpha)$. Podobnie upraszczają się znane (por. [11]) deformacyjne warunki brzegowe

$$
\begin{aligned}
\mu^\alpha &= t^\delta d^{\alpha\beta}\varkappa_{\delta\beta}+0(\gamma/R),\\
\mu &= t^\beta d^{\alpha\delta}\gamma_{\alpha\beta|\delta}+(t^\beta\nu^\delta\gamma_{\delta\beta})_{|\alpha}t^\alpha,\\
\eta &= t^\alpha t^\beta\gamma_{\alpha\beta},
\end{aligned}
\tag{35}
$$

w których dane są składowe μ^α, μ wektora zmian krzywizn konturu powłoki oraz wydłużenie konturu η. Korzystając z (29) i (31) nietrudno jest wyrazić prawe strony warunków brzegowych (34) i (35) przez funkcje Φ i Ψ.

Wyznaczenie przemieszczeń stycznych $u_\alpha(x^\delta)$ i ugięcia $w(x^\delta)$ wymaga scałkowania związków geometrycznych [8]

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta}+u_{\beta|\alpha})-b_{\alpha\beta}w, \\ \varkappa_{\alpha\beta} &= -w_{|\alpha\beta}+b^\nu_\beta b_{\nu\alpha}w-b^\nu_\beta u_{\nu|\beta}-b^\nu_\alpha u_{\nu|\beta}-b^\nu_{\alpha|\beta}u_\nu, \end{aligned} \tag{36}$$

co w ogólnym przypadku jest trudnym zadaniem.

Równania rozwiązujące (32) są bardzo proste i identyczne z równaniami znanymi dla powłok quasi-połogich i połogich (w ostatnim przypadku funkcję odkształceń zastępuje ugięcie, por. [4]), natomiast warunki brzegowe (34), (35) oraz wzory na odkształcenia i siły wewnętrzne (29), (31) są z powodu obecności członów $K\Phi$ i $K\Psi$ nieco bardziej złożone niż odpowiednie warunki i wzory dotyczące powłok o małej wyniosłości i powłok quasi-połogich. W pracy [7] otrzymano dla powłok o wolno zmiennych krzywiznach dwa równania z funkcją naprężeń i ugięciem, znacznie bardziej skomplikowane od równań (32), przy analogicznych założeniach upraszczających (jedyna różnica polega na uwzględnieniu w [7] członów rzędu h/R, które w tej pracy pominięto wobec jedności ze względu na dokładność równań konstytutywnych, por. [10]).

Literatura cytowana w tekście

1. L. H. DONNELL, *Stability of thin-walled tubes under torsion*, NACA, Rep. No. 479, 1933.
2. Х. М. МУШТАРИ, *Некоторые обобщения теории тонких оболочек*, Изв. Физ. Мат. Казанск. Унив., 2, сер. 8, 1938.
3. В. З. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек*, Москва — Ленинград 1949.
4. К. З. ГАЛИМОВ (ред.), Теория оболочек с учетом поперечного сдвига, Издат. Казанск. Унив., 1977.
5. A. LIBAI, *On the nonlinear elastokinetics of shells and beams*, Journ. Aerosp. Sci., **29**, 1190 - 1195, 1962.
6. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., 1, **B69**, 1966.
7. S. ŁUKASIEWICZ, *Równania liniowej zgięciowej teorii powłok o wolno zmiennych krzywiznach*, Mech. Teor. Stos., 2, **19**, 1981.
8. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, vol. 4, 1963.
9. P. M. NAGHDI, *A new derivation of the general equations of elastic shells*, Int. J. Eng. Sci., 1, 1963.
10. W. T. KOITER, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. Delft 1959, North-Holland, Amsterdam 1960.
11. Н. П. АБОВСКИЙ, Н. П. АНДРЕЕВ, А. П. ДЕРУГА, *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*, Наука, Москва 1978.

Резюме

УПРОЩЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КРИВИЗНАМИ

Рассмотрена линейная теория Кирхгофа — Лява тонких упругих оболочек с медленно изменяющимися кривизнами. Приведены два простые уравнения для функции усилий и функции деформаций, подобные уравнениям пологих оболочек [1 - 6], с несколько усложненными выражениями деформаций, усилий, моментов и граничных условий. Предлагаемые уравнения значитэльно проще, чем уравнения оболочек с медленно пзменяющимися кривизнами С. Лукасевича [7].

S u m m a r y

REDUCED LINEAR EQUATIONS OF SHELLS WITH SLOWLY VARYING CURVATURES

The linear Kirchhoff-Love type theory of thin elastic shells with slowly varying curvatures is dealt with. Two simple governing equations in terms of a stress function and a strain funcion are derived, similar to those of shallow and quasi-shallow shells [1 - 6], with only slightly more complex expressions for the strains, internal forces and the boundary conditions. The equations are considerably reduced as compared to the equations of shells with slowly varying curvatures due to Łukasiewicz [7].

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 września 1983 roku