MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2/3, 21 (1983)

WYBRANE PROBLEMY WIELOPARAMETROWYCH LINIOWYCH TEORII POWŁOK SPRĘŻYSTYCH[1)]

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ
ZENON RYCHTER

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Zagadnienia liniowej teorii powłok sprężystych należą do tych klasycznych problemów mechaniki, które nadal stanowią przedmiot dość intensywnych badań. Punkt ciężkości rozważań przeniósł się z teorii Kirchhoffa-Love'a na teorie bardziej złożone, które w tej pracy nazywamy teoriami wieloparametrowymi. Obmyślenie tych teorii wynika z potrzeby dokładniejszego opisu takich problemów, dla których dokładność teorii Kirchhoffa-Love'a może być niezadowalająca. Przypomnimy, że teoria Kirchhoffa-Love'a oraz różne jej warianty dobrze aproksymuje stan trójwymiarowy w przypadku powłok cienkich, izotropowych, o gładkiej geometrii i równomiernym obciążeniu. Wymienione ograniczenia można w skrócie zapisać w postaci warunków $h/R \ll 1$, $(h/L)^2 \ll 1$, $(h/d)^2 \ll 1$, $E/E' \ll 1$, $G/G' \ll 1$, których lewe strony są bezwymiarowymi parametrami, zaś h, R, L, d, E, E', G, G' oznaczają w kolejności grubość powłoki, najmniejszy promień krzywizny środkowej powierzchni powłoki, charakterystyczną długość fali deformacji tej powierzchni, odległość od brzegu (ściślej od miejsca z zaburzonym stanem naprężenia, tj. stanem silnie zmieniającym się na grubości powłoki) do rozważanego punktu powłoki, największy moduł Younga w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej i moduł Younga w kierunku poprzecznym oraz moduły ścinania w płaszczyźnie stycznej i normalnej do środkowej powierzchni. Stosunki modułów sprężystych E/E' i G/G' oczywiście nie wyczerpują wszystkich przypadków ogólnej anizotropii, ale charakteryzują często w praktyce spotykany typ anizotropii, w którym właściwości materiału powłoki są różne w kierunku stycznym i normalnym do powierzchni środkowej (np. materiał poprzecznie izotropowy, materiał ortotropowy, materiał warstwowy).

Dokładność teorii Kirchhoffa-Love'a maleje ze wzrostem wymienionych, bezwymiarowych parametrów geometrycznych i materiałowych i może być niezadowalająca w takich ważnych praktycznie zagadnieniach, jak:

— powłoki o średniej gruności ($h/R \sim 0.3$),

[1)] Praca była przedmiotem referatu problemowego na III-ej Ogólnopolskiej Konferencji „Konstrukcje Powłokowe. Teoria i Zastosowania", (Opole, 1982).

— powłoki poddane działaniu obciążenia o dużej zmienności, zagadnienia kontaktowe, powłoki z otworami,
— powłoki o wyraźnej anizotropii — podatne na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne, tj. gdy $G/G' \gg 1$, $E/E' \gg 1$,
(np. powłoki z polimerów lub trójwarstwowe z miękkim wypełnieniem).

Do opisu m.in. takich problemów są stosowane teorie wieloparametrowe, przy czym pod pojęciem parametr rozumiemy przemieszczenie uogólnione, określone na środkowej podstawowej powierzchni powłoki i podwyższające rząd równań różniczkowych teorii.

Wprowadzenie określenia teorii n-parametrowej zezwala na formalne uporządkowanie różnych jej wariantów. Często bowiem różnice pomiędzy wariantami teorii sprowadzają się do odmiennego wywodu równań, przy praktycznie identycznej ich dokładności (np. jak to ma miejsce w teoriach trójparametrowych BUDIANSKY'EGO-SANDERSA-KOITERA [1,2] oraz NAGHDI'EGO-ZUDANSA [3-5]).

Niekiedy równania teorii nie są formułowane wyłącznie za pomocą przemieszczeń uogólnionych, lecz zawierają inne niewiadome, co utrudnia określenie liczby parametrów kinematycznych. W takim przypadku (poza teorią trójparametrową) połowę liczby równej rzędowi równań różniczkowych teorii można uważać za liczbę parametrów tej teorii (np. równania teorii pięcioparametrowych są dziesiątego rzędu, równania teorii sześcioparametrowych mają rząd dwunasty, itd). Teorie trójparametrowe (trzy składowe wektora przemieszczenia powierzchni podstawowej) są opisane równaniami ósmego rzędu.

Ogólne problemy teorii wieloparametrowych można ująć [6] następująco:

(a) skonstruowanie dla danego przestrzennego zadania teorii sprężystości równań odniesionych do podstawowej powierzchni powłoki i zezwalających na uzyskanie przybliżonej informacji o stanie naprężeń i odkształceń,
(b) analiza poprawności matematycznej równań teorii, zwłaszcza w zakresie istnienia i jednoznaczności rozwiązania,
(c) określenie dokładności i zakresu stosowalności teorii powłok,
(d) poszukiwanie efektywnych metod rozwiązywania równań.

W dalszej części pracy omówimy wieloparametrowe teorie powłok sprężystych w aspekcie powyższych, głównie (a, c, d) problemów.

2. Konstruowanie równań

Wyprowadzenie ogólnych równań teorii powłok jest, przy pominięciu trudnych problemów (b), (c), stosunkowo proste (por. np. [6 - 13]). Generalnie można wyróżnić dwie metody. Jedna polega na wykorzystaniu równań teorii sprężystości ciała trójwymiarowego, druga — zwana bezpośrednią — jest oparta na koncepcji dwuwymiarowej powierzchni sprężystej, o danej liczbie lokalnych stopni swobody. Zaletą metody bezpośredniej (por. np. [6, 14]) jest wyeliminowanie uproszczeń o charakterze analitycznym, a więc otrzymane tak równania można uważać za ścisłe. Wykorzystanie tych równań nie jest jednak możliwe bez ich porównania z równaniami teorii sprężystości w celu ustalenia sensu fizycznego sił wewnętrznych i określenia wielkości współczynników materiałowych (niekiedy są również niezbędne badania doświadczalne). Podobnie kłopotliwa jest [9] analityczna ocena dokładności teorii otrzymanej metodą bezpośrednią. Zatem wywód równań teorii powłok z równań teorii sprężystości jest korzystniejszy. Ponadto wywód ten można w znacznym stopniu sformalizować wykorzystując aparat teorii aproksymacji funkcji [10, 13, 15, 16], analizę asymptotyczną [17, 18], lub metody mechaniki ośrodków z więzami [12].

Równania teorii pięcio- sześcio- ośmio- i dziewięcioparametrowych są najczęściej wyprowadzane przez uproszczenie równań teorii sprężystości za pomocą założeń (zwanych również [12] więzami modelowymi), dotyczących rozkładu przemieszczeń, odkształceń lub naprężeń na grubości powłoki. Wybór fizycznie odpowiednich założeń jest najtrudniejszym elementem takiego podejścia. Można się tu oprzeć na rozwiązaniach prostych zadań teorii belek, płyt i powłok. Główną przesłanką jest uwzględnienie pomijanych w teorii trójparametrowej efektów skończonej grubości powłoki, tj. podatności powłoki na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne, a często i zmienności metryki jako funkcji współrzędnej u^3 — normalnej do powierzchni środkowej (np. we wszystkich teoriach pięcioparametrowych są uwzględnione symetryczne względem powierzchni $u^3 = 0$ odkształcenia postaciowe w przekrojach poprzecznych, natomiast zmienność metryki na grubości powłoki uwzględniono w teorii REISSNERA-NAGHDI'EGO [19] i AMBARCUMIANA [20] a pominięto w teorii TIMOSZENKI [21, 22]).

Równania teorii o sześciu parametrach kinematycznych można otrzymać rozpatrując ośrodek Cosseratów [6], zakładając jednorodność stanu odkształcenia na grubości powłoki [11] lub postulując liniowy rozkład wektora przemieszczenia jako funkcji współrzędnej u^3 [13, 22 - 24]. Stan odkształcenia ujmuje w tej teorii m.in. niesymetryczną względem środkowej powierzchni, poprzeczną deformację postaciową oraz jednorodną na grubości powłoki poprzeczną deformację normalną. Wśród sił wewnętrznych występują w teorii sześcioparametrowej dwie wielkości nie wpływające na globalną równowagę elementu powłoki, a więc reprezentujące samozrównoważone stany naprężeń, o lokalnym znaczeniu.

W teoriach ośmio- [25 - 29] i dziewięcioparametrowych [30, 31] liczba sił wewnętrznych związanych z samozrównoważonymi stanami naprężeń wzrasta. Ponadto w teoriach tych, w odróżnieniu od teorii trój- pięcio- i sześcioparametrowej, rozkład przemieszczeń stycznych nie jest liniowy na grubości powłoki, a więc przekroje poprzeczne zdeformowanej powłoki nie są płaskie. Taki stan odkształcenia charakteryzuje np. powłoki warstwowe o niewielkiej liczbie warstw.

Konstruowanie równań teorii o przeliczalnej, teoretycznie nieskończonej liczbie parametrów jest oparte na twierdzeniu Weierstrassa o jednostajnym przybliżaniu funkcji ciągłej za pomocą szeregu wielomianów [7, 10, 13, 15, 16] lub na rozwinięciu funkcji w szereg Taylora [7, 32]. Ze względu na zbieżność i stabilność rozwiązań, przy wzroście liczby uwzględnionych parametrów i równań, za najlepsze uznaje się [15] rozwinięcie w szereg wielomianów Legendre'a [13, 15, 16], zaproponowane przez WEKUĘ. Rzadziej są stosowane rozwinięcia w „zwykłe" szeregi potęgowe [6, 10].

Efektywność numeryczną teorii z przeliczalną liczbą parametrów można znacznie zwiększyć uwzględniając fakt, że często są znane naprężenia na powierzchniach licowych powłoki. Zezwala to na skonstruowanie i wykorzystanie w obliczeniach - rozkładów poprzecznych naprężeń stycznych i normalnych, spełniających warunki brzegowe na wspomnianych powierzchniach przy dowolnej, ustalonej liczbie parametrów [10, 16]. Natomiast obliczenie tych naprężeń na podstawie związków konstytutywnych wymaga rozwiązania układu równań ze znacznie większą liczbą niewiadomych (por. [15]).

3. Dokładność teorii wieloparametrowych

Określenie dokładności równań teorii powłok, z założenia przybliżonych w stosunku do równań teorii sprężystości, jest trudnym zagadnieniem. Uzyskane dotychczas w tym zakresie wyniki o ogólnym charakterze są w zasadzie ograniczone do teorii trójparametrowej. W przypadku teorii o pięciu i więcej parametrach ocena dokładności jest najczęściej oparta na szczególnych przykładach liczbowych, dla których są znane rozwiązania równań teorii sprężystości. Taka ocena nie może być oczywiście w pełni miarodajna. Pożyteczną byłaby możliwość apriorycznego oszacowania błędu teorii powłok przy danych wartościach niektórych parametrów geometrycznych i materiałowych, np. h/R, h/L, E/E', G/G'. Opracowanie ogólnego kryterium dającego odpowiedź na tak postawiony problem nie jest jednak możliwe, głównie ze względu na wpływ warunków brzegowych. Jak wiadomo, podstawą uproszczeń stosowanych w teorii powłok jest możliwość wydzielenia w cienkiej, sprężystej powłoce obszaru wewnętrznego i obszaru brzegowego. Podziałowi temu towarzyszy rozbicie stanu S naprężeń i odkształceń na dwa stany: wewnętrzny S_w, występujący w całym obszarze powłoki i opisany funkcjami o prostym przebiegu w kierunku normalnym do środkowej powierzchni oraz na stan brzegowy S_b, panujący w tzw. warstwie brzegowej i opisany funkcjami o dużej na ogół zmienności na grubości powłoki, zanikającymi od jej brzegu w kierunku wnętrza. Najczęściej stan brzegowy jest związany z faktem, że rozwiązanie równań teorii powłok nie spełnia danych warunków na powierzchni brzegowej, prostopadłej do powierzchni środkowej. Stan brzegowy występuje również w obszarach gwałtownej zmienności obciążenia, geometrii lub modułów sprężystych powłoki. Przykładem S_b jest tzw. zgięciowy efekt brzegowy występujący wtedy, gdy rozwiązanie równań teorii bezmomentowej nie spełnia warunków brzegowych teorii momentowej. Istnienie efektów brzegowych „wyższego rzędu" jest dodatkowo uwarunkowane podatnością powłoki na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne.

W cienkiej, sprężystej powłoce S_w dominuje ($S_w \gg S_b$) na ogół w obszarze wewnętrznym, natomiast intensywność S_b jest duża w obszarze brzegowym. Wniosek powyższy dotyczy m.in. ugięcia środkowej powierzchni powłoki i wypadkowych naprężeń. W rozkładzie naprężeń na grubości powłoki wpływ stanu brzegowego może przewyższać wpływ stanu wewnętrznego [33]. Należy też pamiętać, że ze wzrostem niektórych parametrów, np. h/R, G/G', E/E' intensywność i zasięg przenikania efektów brzegowych znacznie wzrasta, aż do osiągnięcia stanu, w którym efekty te obejmują całą powłokę. Takie stany brzegowe, zwane zdegenerowanymi, zostały ostatnio zbadane dla powłoki sferycznej, z materiału poprzecznie izotropowego [34] oraz dla powłok o dowolnym kształcie, z materiału ortotropowego [35]. Wykazano m.in. [35], że zdegenerowany efekt brzegowy może powstać, gdy $G'G \sim (h/R)^2$. Z przytoczonej relacji wynika, że w powłoce stosunkowo cienkiej (np. $h/R \sim 0.1$) możliwość wystąpienia zdegenerowanego efektu brzegowego jest niewielka, gdyż podatność powłoki na poprzeczne odkształcenia postaciowe musiałaby być duża ($G'/G \sim 0.01$), co w praktyce się nie zdarza. W powłoce o średniej grubości (np. $h/R \sim 0.3$) stan zdegenerowany może się pojawić już przy stosunkowo słabej anizotropii ($G'/G \sim 0.1$). Oczywiście w takim przypadku rozwiązanie uzyskane na podstawie równań zagadnienia wewnętrznego teorii powłok może być w całym obszarze powłoki nieadekwatne do stanu rzeczywistego.

Z powyższych rozważań wynika generalny wniosek, że w zagadnieniach, w których zastosowanie teorii wieloparametrowej jest celowe (np. powłoki o średniej grubości), wpływ efektów brzegowych nie może być na ogół pominięty w obszarze wewnętrznym, co w znacznej mierze komplikuje problem oceny dokładności teorii wieloparametrowych. Zasadnicza trudność jest też związana z oszacowaniem niektórych wielkości brzegowych. Na krawędzi środkowej powierzchni powłoki można zadać w naturalny sposób tylko pięć wielkości (np. trzy składowe wektora siły i dwie składowe wektora momentu). Określenie dodatkowych wielkości, występujących w teoriach o sześciu i więcej parametrach, nie jest możliwe bez podania rozkładu naprężeń lub przemieszczeń na grubości powłoki, co w ogólnym przypadku wymaga rozważenia sprężystej współpracy powłoki z konstrukcją podporową [36]. Omawiana trudność nie dotyczy powłok zamkniętych, nieograniczonych, powłok o brzegu swobodnym lub zamocowanym w niepodatnej podporze.

Dokładność teorii wieloparametrowych można określić za pomocą znanych metod matematycznych. Przypomnimy, że błąd można odnosić do dokładności równań lub do dokładności rozwiązań. Poza tym można porównywać ze sobą różne teorie powłok, albo odnosić teorię powłok do teorii sprężystości. Oszacowanie błędu może być aprioryczne, lub oparte na znajomości rozwiązania równań teorii powłok. Ponadto błąd można oceniać w sensie globalnym (np. błąd średni kwadratowy — w normie L_2) lub punktowo. Z oceną błędu teorii powłok wiąże się ściśle wymaganie spójności jej równań, oznaczające konieczność jednakowego traktowania przy uproszczeniach wszystkich członów tego samego rzędu w danym równaniu.

Systematyczne przejście od równań teorii sprężystości do równań teorii powłok może być oparte na metodzie asymptotycznej, zezwalającej na ocenę błędu w sensie punktowym [18], gdy korzystamy z równań różniczkowych teorii sprężystości i w sensie globalnym, co ma miejsce w metodzie wariacyjno-asymptotycznej, polegającej na aproksymacji funkcjonałów teorii sprężystości. W literaturze są najczęściej podawane równania pierwszego przybliżenia asymptotycznego. Ostatnio otrzymano [18] dla izotropowych powłok w stanie obrotowosymetrycznym rozwinięcie asymptotyczne gęstości energii sprężystej, zawierające m.in. drugie przybliżenie. Omawiane rozwinięcie jest odmienne dla trzech następujących przypadków: powłok o przeciętnej krzywiźnie i długości, powłok o słabym zakrzywieniu i przeciętnej długości oraz dla długich powłok o łagodnym zakrzywieniu.

Zagadnienie dokładności asymptotycznej zredukowanych warunków brzegowych teorii trójparametrowej zbadano [35] w odniesieniu do powłok ortotropowych o dowolnym kształcie. Przyjmując na powierzchni brzegowej układ współrzędnych $\{u^1, u^2, u^3\}$ z kierunkiem u^1 normalnym do tej powierzchni, kierunkiem u^2 stycznym do krawędzi powierzchni środkowej i z kierunkiem u^3 normalnym do powierzchni środkowej oraz ustalając warunki brzegowe teorii sprężystości w postaci

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = w_3 = 0, \quad (-h/2 \leqslant u^3 \leqslant h/2) \tag{1}$$

gdzie $\sigma_{11}, \sigma_{12}, w_3$ są odpowiednio składowymi tensora naprężenia i ugięciem powłoki, otrzymano następujące, zredukowane warunki brzegowe teorii trójparametrowej, odpowiadające warunkom (1)

$$
\begin{aligned}
&N_{11}+\underline{(h/R_2)(\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_3)(\nu_{23}\nu_{32}/(1-\nu_{21}\nu_{12}))CN_{22}} = 0,\\
(2)\qquad &N_{12}-\underline{(h/A_2)(\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_3)\left(\nu_{23}\nu_{32}/(1-\nu_{12}\nu_{21})\right)C\partial N_{22}/\partial u^2} = 0, \quad (u_3 = 0)\\
&M_{11}-\underline{D(h/A_2)\sqrt{\mathrm{G}_{12}/\mathrm{G}_{23}}\,\partial M_{12}/\partial u^2} = 0, \quad w = 0.
\end{aligned}
$$

W równaniach (2) przez N, M, R, A, E, G, ν oznaczono wypadkową siłę i moment, promień krzywizny powierzchni środkowej, parametr Lamé'go na tej powierzchni, moduł Younga, moduł ścinania i liczbę Poissona - związane z odpowiednimi kierunkami współrzędnych; parametry C i D są rzędu jedności i mają charakter bezwymiarowych współczynników materiałowych.

Podkreślone wyrazy w równaniach (2) reprezentują stany brzegowe związane z podatnością powłoki na poprzeczne odkształcenia postaciowe i normalne. W teorii Kirchhoffa-Love'a te stany nie są uwzględniane, co w ogólnym przypadku uniemożliwia otrzymanie za pomocą tej teorii zadowalającego rozkładu naprężeń w pobliżu powierzchni brzegowej. Warunki (2) wskazują, że dokładność teorii Kirchhoffa-Love'a maleje ze wzrostem stosunków h/R, E_1/E_3 i G_{12}/G_{23}, jeżeli natomiast $E_1 \ll E_3$ i $G_{12} \ll G_{23}$, to teoria ta jest asymptotycznie dokładna.

Spójne równania teorii powłok można otrzymać wykorzystując aprioryczne, globalne oszacowanie powierzchniowej gęstości energii sprężystej. Kryterium energetyczne zastosowano [37] do analizy poprawności teorii trój- pięcio- i sześcioparametrowych, w przypadku materiału poprzecznie izotropowego. Rozważono następujące wyrażenie powierzchniowej gęstości energii

$$
\begin{aligned}
\sum = \{&(1/2)_0B^{\alpha\beta\lambda\eta}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\eta}+(1/2)_2B^{\alpha\beta\lambda\eta}\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa_{\lambda\eta}+{}_1B^{\alpha\beta\lambda\eta}\gamma_{\alpha\beta}\varkappa_{\lambda\eta}\\
(3)\qquad &+(1/2)_0B^{\alpha3\beta3}\gamma_{\alpha3}\gamma_{\beta3}+(1/2)_2B^{\alpha3\beta3}\varkappa_{\alpha3}\varkappa_{\beta3}+{}_1B^{\alpha3\beta3}\gamma_{\alpha3}\varkappa_{\beta3}\\
&+{}_2B^{\alpha\beta\lambda\eta}\gamma_{\alpha\beta}\mu_{\lambda\eta}\}[1+0(\vartheta^4 2\mathrm{G}/\mathrm{E}^1)],
\end{aligned}
$$

gdzie γ_{ij}, $\varkappa_{ij}$, $\mu_{\lambda\eta}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ \alpha, \beta, \lambda, \eta = 1, 2.)$ są określonymi na środkowej powierzchni powłoki, kolejnymi współczynnikami w rozwinięciu składowych tensora odkształcenia w szereg potęgowy zmiennej u^3 — przebiegającej grubość powłoki, $\vartheta^2 = h/R+h^2/L^2$ jest małym parametrem, 0 ( ) oznacza wielkość rzędu ( ), ${}_nB^{ijkl}(n = 0, 1, 2;\ i, j, k, l = 1, 2, 3.)$ — składowe tensorów sztywności, w których w znany [4], niejawny sposób uwzględniono wpływ poprzecznych odkształceń normalnych na energię sprężystą (błąd wynikający z eliminacji tych odkształceń podano w (3) w nawiasach kwadratowych).

Wprowadzając bezwymiarowy współczynnik δ

$$
(4)\qquad \gamma_{\alpha\beta} \sim \delta h\varkappa_{\alpha\beta}, \qquad \delta\gamma_{\alpha3} \sim h\varkappa_{\alpha3},
$$

zezwalający na wyróżnienie stanu bezmomentowego $\delta \gg 1$, momentowego $\delta \sim 1$ i silnie momentowego $\delta \ll 1$, otrzymano w [37] następujące oszacowanie składników wyrażenia energii (3)

$$\Sigma \sim \{ \underset{n \geqslant 3}{\underline{1, \delta^{-2}, \delta^{-1}h/R}}, \underset{n \geqslant 5}{\underline{(\mathrm{G}/\mathrm{G}')\vartheta^2\delta^{-2}, (\mathrm{G}/\mathrm{G}')\vartheta^2}},$$

$$\underset{n \geqslant 5}{\underline{(\mathrm{G}/\mathrm{G}')\vartheta^2\delta^{-1}h/R}}, \underset{n > 6}{\underline{[h/R+(G/G')(h/L)^2]}} \} [1+0(\vartheta^4 2\mathrm{G}/\mathrm{E}'+h^2/R^2)]$$

gdzie liczba pod kreską wskazuje teorie n-parametrowe, w których dany człon pojawia się. Rozpatrując różne, wzajemne proporcje parametrów $\delta, h/R, h/L, G/G'$ i G/E' uzyskano następujące wnioski:

1) Teoria trójparametrowa, w przypadku uwzględnienia tylko dwóch pierwszych członów w wyrażeniu (3), jest konsekwentną teorią pierwszego przybliżenia dla cienkich, równomiernie obciążonych powłok izotropowych, co wykazał wcześniej W. T. KOITER [2].

2) W tej samej klasie zagadnień, lecz przy zgięciowym stanie odkształcenia, teoria zawierająca wszystkie oprócz szóstego składniki (3) jest konsekwentną teorią drugiego przybliżenia (o nieustalonej liczbie parametrów). Odpowiednie rozwinięcie energii podał w tym przypadku W. PIETRASZKIEWICZ [24].

3) Teoria pięcioparametrowa jest poprawna w sensie energetycznym w zagadnieniach silnego zginania ($\delta \ll 1$) cienkich ($h/R \ll 1$) powłok anizotropowych- o dużej podatności na poprzeczne odkształcenia postaciowe ($G/G' \gg 1$) i o niezbyt dużej podatności na poprzeczne odkształcenia normalne ($2G/E' \sim 1$). W tym przypadku w rozwinięciu (3) należy pozostawić drugi i czwarty człon.

4) Teoria sześcioparametrowa nie jest na ogół poprawna energetycznie, tj. nie istnieje układ wartości parametrów $\delta, h/R, h/L, G/G'$ i G/E' gwarantujący wyższą dokładność aproksymacji energii w tej teorii w porównaniu z teorią trój- i pięcioparametrową. Zatem teoria sześcioparametrowa może być pożyteczna tylko w szczególnych przypadkach (w nie których obszarach powłoki, dla określenia wybranych składowych stanu naprężenia itp).

Znaczne możliwości apriorycznej, globalnej i punktowej oceny błędu wykazują metody teorii równań różniczkowych. F. JOHN [38] otrzymał formalne oszacowanie dowolnego rzędu pochodnych tensora naprężenia i tensora odkształcenia. Rozwijając składowe tych tensorów w szeregi potęgowe współrzędnej u^3 i uwzględniając oszacowania [38] można ocenić rząd wielkości współczynników szeregów i skonstruować równania teorii powłok o żądanej dokładności. Sugestia ta nie została dotychczas szerzej wykorzystana, z wyjątkiem cytowanej już pracy [24]. Oszacowania [38] obowiązują w obszarze wewnętrznym izotropowej powłoki, obciążonej na powierzchni brzegowej prostopadłej do powierzchni środkowej. W zagadnieniach powłok o wyraźnej anizotropii do zależności podanych w [38] należy wprowadzić moduły sprężyste, np. G/G' w przypadku powłok podatnych na poprzeczne odkształcenia postaciowe.

Efektywnym narzędziem oceny dokładności, zwłaszcza [39] w zagadnieniach liniowych, są dualne zasady wariacyjne, tj. zasada minimum energii potencjalnej i zasada maksimum energii dopełniającej [40 - 44]. Zasady te zezwalają na oszacowanie z góry i z dołu nieznanego rozwiązania równań teorii sprężystości za pomocą odpowiednio skonstruowanych, kinematycznie i statycznie dopuszczalnych pól naprężeń i przemieszczeń. Na ogół otrzymujemy w ten sposób globalną ocenę błędu. W przypadku, kiedy znana jest funkcja

Greena, można również znaleźć oszacowanie punktowe [39]. D. A. DANIELSON [41], poprawiając mniej dokładne oszacowanie W. T. KOITERA [40] wykazał, że przemieszczenia powłoki, określone na podstawie teorii trójparametrowej, różnią się w normie L_2 od rozwiązania równań teorii sprężystości o wielkość nie przekraczającą $\varepsilon = h/R+h^2/L^2$, przy założeniu tzw. regularnych warunków brzegowych, tj. warunków identycznych dla zagadnienia teorii sprężystości i dla zagadnienia teorii powłok. Skonstruowane w [41] pole przemieszczeń stycznych, zgodnie na środkowej powierzchni z rozwiązaniem równań teorii powłok, jest wielomianem trzeciego stopnia zmiennej u^3, a więc nie pokrywa się z liniowym rozkładem przemieszczeń na grubości powłoki, zakładanym przy wywodzie równań teorii trójparametrowej.

Różne kryteria dokładności i miary błędu można wprowadzić w teorii powłok traktując przemieszczenia i naprężenia jako elementy przestrzeni unormowanych [45]. Jedną z możliwości jest unormowanie błędu residualnego, z jakim rozwiązanie równań teorii powłok spełnia równania równowagi i warunki brzegowe w naprężeniach teorii sprężystości. Na tej podstawie sformułowano kryterium fizycznej poprawności teorii powłok rozpatrywanej w ramach mechaniki ośrodków z więzami [12, 46].

4. Równania rozwiązujące

Równania teorii powłok można przedstawić w postaci różniczkowej lub wariacyjnej. Znalezienie analitycznych rozwiązań równań różniczkowych jest możliwe tylko w najprostszych przypadkach. Na ogół występuje konieczność stosowania metod przybliżonych — wtedy bardziej dogodne jest ujęcie wariacyjne.

Formułowanie równań rozwiązujących zostało najdalej zaawansowane w teorii trójparametrowej. Jednak nawet tutaj np. ogólne równania przemieszczeniowe są bardzo skomplikowane. W ograniczonych klasach zagadnień równania teorii trójparametrowej doprowadzono do stosunkowo prostej postaci, otrzymując m.in. równania zespolone (por. np. [47]), równania Meissnera i typu Meissnera (por. np. [48]) dla powłok obrotowych w stanie symetrii i antysymetrii obrotowej oraz równania powłok quasi-połogich [49, 50]. Dużo uzyskanych rozwiązań dotyczy powłok o szczególnych kształtach i obciążeniach, nad czym nie będziemy się jednak zatrzymywać. W dwóch najlepiej opracowanych wersjach teorii trójparametrowej: BUDIANSKY'EGO-SANDERSA-KOITERA [1, 2] oraz NAGHDI'EGO-ZUDANSA [3 - 5] wykazano istnienie analogii statyczno-geometrycznej oraz słuszność zasad wariacyjnych i twierdzeń o wzajemności, analogicznych do zasad i twierdzeń teorii sprężystości. Skonstruowano i zbadano własności ekstremalne różnych funkcjonałów teorii Budiansky'ego-Sandersa-Koitera, przy uwzględnieniu anizotropii i nieciągłości parametrów powłoki, w obszarach jedno- i wielospójnych [45].

Niektóre rodzaje równań teorii trójparametrowej uogólniono rozpatrując model pięcioparametrowy. W tzw. teorii Timoszenki uzyskano m.in. równania zespolone [21] i równania powłok o małej wyniosłości [21, 22], w teorii REISSNERA-NAHGDI'EGO [19] wyprowadzono równania izotropowych [51] i ortotropowych [52] powłok w stanie symetrii obrotowej. Dla powłok o łagodnie zmiennych krzywiznach otrzymano [53] układ równań dwunastego rzędu, podczas gdy poprawny układ równań teorii pięcioparametrowej powinien być dziesiątego rzędu, co można osiągnąć przez wyrażenie sił poprzecznych za pomocą dwóch potencjałów skalarnych [22, 37]. Zbadano zagadnienie analogii statyczno-geometrycznej i zbudowano równania zespolone [21]. Rozważono też niektóre zagadnienia w ujęciu wariacyjnym [21, 22, 54].

Rezultaty uzyskane w teorii sześcioparametrowej są skromniejsze. WEKUA otrzymał [13] dla cienkich powłok izotropowych równania przemieszczeniowe o strukturze zezwalającej na poszukiwanie rozwiązania za pomocą metody funkcji zmiennej zespolonej. Dla powłok poprzecznie izotropowych o średniej grubości wyprowadzono uogólnione równania Meissnera i równania powłok quasi-połogich [37]. Zbadano zagadnienie analogii statyczno-geometrycznej [37]. Rozważono [22, 37, 55] niektóre funkcjonały wariacyjne. W zagadnieniach sprzężonej termosprężystości udowodniono [55] twierdzenie o wzajemności, zezwalające na przedstawienie poszukiwanego pola naprężeń lub nieznanego rozkładu temperatury w powłoce w postaci całki.

W teoriach ośmio- [25 - 29] i dziewięcioparametrowych [30, 31] uzyskano wyniki fragmentaryczne. Równania tych teorii są dość skomplikowane, a więc należałoby formułować je w sposób ukierunkowany na zastosowanie metod przybliżonych i numerycznych. Z tego punktu widzenia celowe jest zbadanie własności operatorów różniczkowych, co dotychczas zrobiono w odniesieniu do niektórych zagadnień teorii trójparametrowej [56, 57] i pięcioparametrowej [58].

5. Uwagi końcowe

Z przedstawionych rozważań wynika, że dużo niejasności wiąże się z dokładnością i zakresem stosowalności teorii wieloparametrowych. Nie opracowano dotychczas pełnej, konsekwentnej teorii drugiego przybliżenia np. energetycznego lub asymptotycznego. Mało uwagi poświęcono zagadnieniu zredukowanych warunków brzegowych. Nie są dostatecznie zbadane własności operatorów różniczkowych w równaniach teorii wieloparametrowych. Brak jest odpowiednio dobrej analizy wpływu efektów nieliniowych. Należy bowiem pamiętać, że ze wzrostem wymaganej dokładności teorii, maleje dopuszczalne obciążenie, przy którym równania liniowe są poprawne [18]. Z innych, nieopracowanych dotychczas problemów w teoriach wieloparametrowych należy wymienić zagadnienia termosprężystości i sprzężonych pól mechano-elektromagnetycznych. Mało jest również badań z zakresu stateczności sprężystej dźwigarów powierzchniowych, opisanej za pomocą równań teorii o większej niż trzy liczbie parametrów. Pozostają też do uwzględnienia w teoriach wieloparametrowych materiały sprężyście niejednorodne oraz materiały o innych związkach konstytutywnych, np. lepkosprężyste.

Wykaz literatury

1. B. BUDIANSKY, J. L. SANDERS, *On the best first order linear shell theory*, Progress in Appl. Mech., t. 192. McMillan, New York 1963, s. 129 - 140.
2. W. T. KOITER, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Theory of Thin Elastic Shells, Proc. IUTAM Symp. Delft 1959, North Holland, Amsterdam 1960, s. 12 - 33.
3. P. M. NAGHDI, *A new derivation of the general equations of elastic shells*, Int. J. Eng. Sci., 1963, nr 1, s. 509 - 522.

4. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, t. 4, 1963.
5. Z. ZUDANS, *New formulation and evaluation of elastic shell theory*, Univ. of Pennsylvania Ph. D., 1966.
6. P. M. NAGHDI, *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physik t. VIa/2, Springer Verlag, Berlin--Heidelberg-New York 1972.
7. Н. А. Кильчевский, *Основы аналитической механики оболочек*, Киев 1963.
8. А. К. Галиньш, *Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям*, Исслед. по теории пластин и оболочек, 1967, nr 5, s. 66-92, 1970, nr 6-7, s. 23-65.
9. W. T. KOITER, *Foundations and basic equations of shell theory*, A survey of recent progress, Theory of thin shells, IUTAM Symp. Copenhagen 1967, Springer Verlag 1969, s. 93 - 105.
10. L. LIBRESCU, *Elastostatics and kinetics of anisotropic and heterogeneous shell type structures*, Noordhof, Leyden 1975.
11. Cz. Woźniak, *Nieliniowa teoria powlok*, PWN, Warszawa 1966.
12. Cz. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN, Warszawa-Poznań 1982.
13. И. Н. Векуа, *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*, Наука, Москва 1982.
14. H. L. LANGHAAR, *Elastic surfaces and theories of shells*, Acta Mechanica 1974, t. 19, s. 109 - 128.
15. В. И. Гуляев, В. А. Баженов, П. П. Лизунов, *Некласическая теория оболочек и её применение к решению инженерных задач*, Львов, Вища-Школа, 1978.
В. Л. Пелех, И. А. Сухорольский, *Контактные задачи теории упругости анизотропных оболочек*, Наукова Думка, Киев 1980.
17. H. S. RUTTEN, *Asymptotic approximation in the threedimensional theory of thin and thick elastic shells*, Theory of thin shells, IUTAM Symp. Copenhagen 1967, Springer Verlag 1969, 115 - 134.
18. M. SAYIR, C. MITROPOULOS, *On elementary theories of linear elastic beams plates and shells* (review paper) ZAMP 1980 t. 31, nr 1, s. 1 - 55.
19. P. M. NAGHDI, *On the theory of thin elastic shells*, Quart. Appl. Math. 1957, t. 14, nr 4, s. 369 - 380.
20. С. А. Амбарцумян, *Общая теория анизотропных оболочек*, Наука, Москва 1974.
21. В. Л. Пелех, *Теория обалочек с конечной сдвиговой жесткостью*, Наукова Думка, Киев 1973.
22. К. З. Галимов (red.), *Теория оболочек с учетом поперечного сдвига*, Издат. Казанск. Унив, Казань 1977.
23. L. M. ḤABIP, *Theory of elastic shells in the reference state*, Ing. Archiv 1965, t. 34, s. 228 - 237.
24. W. PIETRASZKIEWICZ, *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, PWN, Warszawa-Poznań 1979.
25. А. Н. Ульяшина, *Уравнения технической теории оболочек с учетом сдвиговой и поперечной деформаций*, Мех. Полим. 1977, nr 2, s. 270 - 277.
26. А. Н. Чльяшина, *К уточненной теории краевого эффекта в ортотропных цилиндрических оболочках*, Исслед. по упруг. и пласт. 1980, nr 13, s. 73 - 81.
27. А. О. Рассказов, *К теории колебаний многослойных оболочек*, Прикл. мех. 1977, t. 13, nr 8, s. 23 - 29.
28. А. П. Мукоед, *Об одном варианте уточненной теории оболочек*, Прикл. мех. 1979, t. 15, nr 12, s. 43 - 50.
29. Ю. И. Немчинов, *К теории анизотропных оболочек и пластин*, Прикл. мех. 1981, t. 17, nr 12, s. 57 - 64.
30. J. HAMMEL, *Geometrisch nichtlineare Schalengleichungen als Approximation des dreidimensionalen Kontinuums unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung*, Ing. Archiv 1978, t. 47, nr 2, s. 75 - 93.
31. А. В. Саченков, И. Ю. Красновский, *Изгиб цилиндрических оболочек и плит с учемом поперечной деформации*, Изв. Вузов, Мат. 1981, nr 11, s. 49 - 57.
32. Н. А. Базаренко, *Построение уточненных прикладных теорий для оболочек произвольной формы*, Прикл. мат. мех. 1980, t. 44, nr 4, s. 727 - 736.
33. S. NAIR, E. REISSNER, *Two- and three-dimensional results for rotationally symmetric deformations of circular cylindrical shells*, Int. J. Sol. Struct. 1978, t. 14, nr 11, s. 905 - 924.

34. Т. В. Виленская, *К вопросу пострения теории сферических оболочек из трансверсально-изотропного материала*, Расчет оболочек и пластин, Ростов-Н/Д 1978, s. 37 - 44.
35. Л. А. Агаловян, *О приьедении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий*, Докл. АН Арм. ССР 1979, nr 3, s. 151 - 156.
36. W. T. Koiter, J. G. Simmonds, *Foundations of shell theory*, Theor. Appl. Mech., Proc. 13th Int. Congr. Theor. Appl. Mech., Moscow Univ. 1972, Springer Verlag 1973, s. 150 - 176.
37. Z. Rychter, *Analiza statyczna powłok poprzecznie izotropowych o średniej grubości* (rozprawa doktorska), Politechnika Warszawska 1982.
38. F. John, *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*, Comm. Pure Appl. Math. 1965, t. 18, s. 235 - 267.
39. H. Stumpf, *Some applications of convex analysis to non-linear elastic boundary value problems*, Kompleksnyj Analiz i Jego Pril. Nauka, Moskwa 1978, s. 608 - 617.
40. W. T. Koiter, *On the foundations of the linear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. 1970 ser B, t 73, nr 3, s 169 - 195
41. D. A. Danielson, *Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. 1971, ser. B, t. 74, s. 294 - 300.
42. C. L. Ho, J. K. Knowles, *Energy inequalities and error estimates for torsion of elastic shells of revolution*, ZAMP 1970, t. 21, s. 352 - 377.
43. C. O. Horgan, L. T. Wheeler, *Maximum principles and pointwise error estimates for torsion of shells* of *revolution*, CANCAM 77 Proc. 6th Can. Congr. Appl. Mech., Vancouver 1977, vol, 1, s. 37 - 38.
44. W. Prager, J. L. Synge, *Approximations in elasticity based on the concept of function space*, Quart. Appl. Math. 1947, t. 5, s. 241 - 269.
45. Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга, *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*, Наука, Москва 1978.
46. Z. F. Baczyński, *Structure of equations and estimation of solutions in non-linear shell theory*, Arch. Mech. 1975, t. 27, nr 3, s. 375 - 384.
47. К. Ф. Черных, *Линейная теория оболочек* t. 2, Ленинград 1964.
48. В. С., Чернина, *Статика тонкостенных оболочек вращения*, Наука, Москва 1968.
49. W. T. Koiter, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. 1966, ser. B, t. 69, nr 1, s. 1 - 54.
50. A. Libai, *On the nonlinear elastokinetics of shells and beams*, Journ. Aerosp. Sci. 1962, t. 29, s. 1190 - 1195.
51. P. M. Naghdi, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic shells of revolution*, Quart. Appl. Math. 1957 - 58, t. 15, nr 1.
52. Z. Mazurkiewicz, R. Nagórski, *O równaniach teorii liniowej powłok z uwzględnieniem poprzecznych odkształceń postaciowych*, Rozprawy Inż. 1981, t. 29, nr 2, s. 321 - 342.
53. S. Łukasiewicz, *Obciążenia skupione w tarczach płytach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
54. Л. Я. Айнола, *Вариационные методы для нелинейных урабнений движения оболочек*, Прикл. мат. мех. 1968, t. 32, nr 1, s. 154 - 158.
55. Р. Н. Швец, В. М. Флячук, *Вариационные принципы и теорема взаимности в задачах динамики термоупругих анизотропных оболочек*, Мат. методы и фпз.-мех. поля 1981, nr 14, s. 70 - 75.
56. В. Т. Корнеев, *О дифференциальных операторах теории тонких оболочек и теории оболочек Рейсснера*, Исслед. по теории упруг. пластич. 1974, nr 10, s. 160 - 173.
57. Н. Т. Медведев, *О разрешимости задач теории ортотропных некруговых цилиндрических оболочек*, Докл. АН УССР, Сер. А, 1978, nr 10, s. 908 - 911.
58. Н. Т. Медведев, В. В. Емельяненко, *К обоснованию разрешимости задач теории ортотропных оболочек вращения с конечной сдвиговой жесткостью*, Прикл. мех. 1981, t. 17, nr 12, s. 122 - 125.

Резюме

ИЗБРАННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МУЛЬТИПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЙ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В работе рассмотрены следующие проблемы мультипараметрических линейных теорий упругих оболочек: конструкция уравнений, оценка точности, область применимости отдельных теорий, формулирование решающих уравнений. Приведены сведения о многих работах по этой проблематике.

Указаны также проблемы, которые по мнению авторов до сих пор не разработаны.

Summary

SELECTED PROBLEMS IN THE MULTI-PARAMETRIC LINEAR THEORIES OF ELASTIC SHELLS

We deal with the following problems in the multi-parametric linear theories of elastic shells: construction of equations, accuracy estimation, the scope of application of respective theories, formulation of solving equations. Many papers concerning the subject have been discussed. Some problems which according to authors' knowledge have not been elaborated so far are also indicated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lipca 1983 roku