MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2/3, 21 (1983)

NOWA METODA WYZNACZANIA POLA ODKSZTAŁCENIA W PRZYPADKU TRÓJWYMIAROWYM, WYKORZYSTUJĄCA ZJAWISKO ŚWIATŁA ROZPROSZONEGO W ELASTOOPTYCE

W. KARMOWSKI

Politechnika Krakowska

S. MAZURKIEWICZ

Politechnika Krakowska

1. Wstęp

Wykorzystanie zjawiska rozpraszania światła w elastooptyce zaproponowano po raz pierwszy w roku 1938, w pracy [1] a następnie w [2, 3], DRUCKER i MINDLIN [4] przedstawili analizę możliwości zastosowania zjawiska rozpraszania światła do badania trójwymiarowych stanów naprężenia, rozważając zagadnienie obrotu kierunków wtórnych naprężeń głównych (naprężeń optycznie czynnych) wzdłuż drogi światła, przebiegającego przez model. Analizie tego zjawiska poświęcone były dalsze prace [5, 6], co miało istotne znaczenie dla rozwoju tej metody.

W przypadku płaskim, gdy nie występuje rotacja wtórnych naprężeń głównych, uzyskuje się prostsze zależności. W pracach [7, 8, 9] a następnie [10, 11, 12, 13] podano teorię izodyn oraz ich własności, które pozwalają na pełne rozwiązanie zagadnienia płaskiego korzystając jedynie dodatkowo z warunków równowagi wewnętrznej. Istnieje już szereg prac, w których wykorzystano zjawisko światła rozproszonego do analizy płaskich zagadnień konstrukcyjnych [14, 15, 16, 17]. W przypadku trójwymiarowym wykorzystuje się konwencjonalną metodę zamrażania [18], metodę naprężeń stycznych [19] lub tzw. metodę podwójnej obserwacji [20, 21]. Dalszy rozwój tej metody wymaga głębszej analizy teorii rozpraszania światła, zjawiska dwójłomności w oparciu o równania Maxwella, jak również udoskonalenia techniki pomiarowej z zastosowaniem automatyzacji procesu pomiaru i metod numerycznych opracowania wyników pomiaru [22]. Jak wykazano w niniejszej pracy, zjawisko rozpraszania w modelach elastooptycznych pozwala na uzyskanie prawie pełnej informacji o stanie odkształcenia, przyjmując opisany równaniami Maxwella elektromagnetyczny model fali świetlnej, rozproszenie wg modelu Rayleigha oraz prostoliniowe propagowanie się promienia świetlnego w ośrodku quasiizotropowym [23].

Jak wiadomo zjawisko rozpraszania (scattering) jest szczególnym rodzajem dyfrakcji i występuje według prawa Rayleigha w przypadku, gdy stosunek wymiarów cząsteczki do długości fali $a/\lambda < 0{,}05$. Fala promieniowania elektromagnetycznego wypromieniowana przez wzbudzoną do drgań cząsteczkę jest falą rozchodzącą się we wszystkich kierunkach, spolaryzowaną o rozkładzie intensywności będącej funkcją kierunku promieniowania. Efekt światła rozproszonego i dwójłomności wymuszonej opierają się na tym samym zjawisku zdolności do polaryzacji przez materię. Asymetria chmury elektronów otaczających cząsteczkę jest ściśle związana ze zdolnością cząsteczki do polaryzacji. Istnieją dwa rodzaje asymetrii — naturalna oraz spowodowana polem odkształceń. Światło rozproszone jest efektem obu tych rodzajów asymetrii.

W badaniach elastooptycznych, pierwszy z nich jest to błąd pomiarowy, a drugi to właściwa wielkość mierzona.

2. Przechodzenie światła przez ośrodek quasiizotropowy

Ośrodek quasiizotropowy definiujemy jako ośrodek, dla którego tensor stałej dielektrycznej niewiele się różni od tensora jednostkowego pomnożonego przez pewną liczbę. Jeżeli za normę tensora przyjmiemy:

$$\|\check{\varkappa}\| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{tr}(\check{\varkappa}^T \check{\varkappa})}{\operatorname{tr} \check{I}}, \tag{1}$$

to warunek powyższy można wyrazić przez

$$\|\check{\varkappa} - \varkappa_0\| \ll \varkappa_0. \tag{2}$$

Przypadek ten występuje w ośrodkach izotropowych poddanych obciążeniom poniżej granicy sprężystości. Tensor stałej dielektrycznej można wtedy wyrazić przez [23]

$$\check{\varkappa} = \varkappa_0 + \varkappa_1 \check{\varepsilon} + \varkappa_2 \operatorname{tr} \check{\varepsilon}. \tag{3}$$

Z powyższego wzoru widać, że pomiar wielkości dielektrycznych takiego ośrodka pozwala na wyznaczenie wielkości mechanicznych scharakteryzowanych przez tensor odkształcenia. W praktyce analiza tensora dielektrycznego jest dokonywana przez pomiar parametrów opisujących płaską falę elektromagnetyczną, przechodzącą przez dany ośrodek. Fala płaska wchodząca do modelu scharakteryzowana jest przez: kierunek propagacji, częstość i kierunek pola elektrycznego (prostopadły do kierunku propagacji). W omawianym przybliżeniu występuje modulowanie fazy, bez zmiany częstotliwości. Jak wynika z rozwiązań równań Maxwella dla fali elektromagnetycznej pola elektryczne można przedstawić w postaci równania fali

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \tag{4}$$

gdzie: $\vec{r}$ — kierunek propagacji;
ω — częstość fali;
$\vec{k}$ — wektor falowy;

Wektor indukcji magnetycznej jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektor $\vec{k}$ i $\vec{E}$. W przypadku ośrodka izotropowego kierunek propagacji (s) i kierunek wektora falowego są zgodne.

W ośrodku anizotropowym już tak nie jest. Wektor $\vec{D}$ Jest dalej prostopadły do wektora $\vec{k}$, a wektor $\vec{E}$ do wektora $\vec{s}$, ale kierunek propagacji i kierunek wektora falowego są różne. W przypadku ośrodka quasiizotropowego, jaki będzie rozpatrywany, w pierwszym przybliżeniu można przyjąć jednak, że dalej zachodzi współliniowość wektorów $\vec{k}$ i $\vec{s}$. Konsekwencją tego jest przyjęcie współliniowości obydwu promieni, na które rozszczepia się promień wchodzący. Interferują one wobec tego z sobą, podczas przechodzenia przez model oraz nie zachodzi zjawisko odchylenia promienia od prostoliniowości.

W drugim przybliżeniu należy efekt rozszczepiania promieni oraz efekt nieprostoliniowości uwzględnić, co wykorzystuje elastooptyka gradientowa [24]. W omawianym przybliżeniu wektor $\vec{E}$ wskutek interferencji wiruje wokół promienia a koniec jego zakreśla elipsę. W granicznym przypadku elipsa redukuje się do odcinka a wektor $\vec{E}$ pulsuje wokół jego środka (polaryzacja liniowa). Dowolny stan polaryzacji można opisać przez podanie następujących wielkości:

A — wielkość elipsy, spełnia ona zależność:

$$\overline{E^2} = A^2 \tag{5}$$

γ — moduł z tangensa γ, jest to stosunek półosi małej do dużej. Znak γ jest zależny od tego, czy wektor obraca się lewo $(-)$ czy prawoskrętnie $(+)$, γ zawiera się w granicach $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

φ — kąt obrotu elipsy do położenia takiego, że duża półoś pokrywa się z kierunkiem os „x”, a mała z kierunkiem osi „y”;

ψ — kąt pomiędzy końcem wektora $\vec{E}$ a osią x;

Przyjmując wielkość bezwymiarową $\tau = \omega t$ oraz wektor czasowy $\vec{\Theta}(\cos\tau_1 \sin\tau)$ można zapisać wektor natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej propagującej się w kierunku „z” w postaci:

$$\vec{E} = \sqrt{2}\, A \check{T}^{\varphi} \check{D}^{\gamma} \check{T} - \psi \vec{\Theta}, \tag{6}$$

gdzie: $\check{T}^{\varphi}$ — tensor obrotu $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\check{D}^{\gamma}$ — macierz $\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi \end{pmatrix}$

Zapisane wzorem (6) wyrażenie na natężenie pola elektrycznego pozwala na szczegółowe przeanalizowanie zmian tego pola w trakcie przechodzenia promienia przez model. Należy w tym celu znaleźć zależność pomiędzy wektorem falowym a tensorem dielektrycznym. W ogólnym przypadku zależność ta jest następująca:

$$\det(n^2 \delta_{ik} - n_i n_k - \varkappa_{ik}) = 0, \tag{7}$$

gdzie n jest wektorem bezwymiarowym.

$$\vec{u} = \frac{c}{\omega} \vec{k}. \tag{8}$$

W wyrażeniach tych występuje bezwymiarowy tensor dielektryczny, jako stosunek właściwego tensora dielektrycznego do stałej dielektrycznej w próżni. Jeżeli oś „z” zostanie wybrana wzdłuż wektora falowego, to w przypadku quasiizotropowym uzyskuje się proste wyrażenie

$$\det(n^2\delta_{\alpha\beta}-\varkappa_{\alpha\beta}) = 0. \tag{9}$$

Występuje w nim dwuwymiarowy tensor dielektryczny $\varkappa_{\alpha\beta}$, będący projekcją tensora na płaszczyznę prostopadłą do wektora falowego. Przez obrót tej płaszczyzny wokół wektora falowego można doprowadzić macierz występującą w (9) do postaci diagonalnej. Uzyskane wtedy dwa rozwiązania na „n" są to współczynniki załamania dla fal propagujących się w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach, odpowiednie wektory $\vec{E}$, są to wektory własne macierzy w równaniach (9). Na ogół wartości własne „n" są różne, uzyskuje się dwie fale propagujące się w tym samym kierunku ale o zmiennej fazie wzajemnej. Kąt o jaki należy obrócić układ współrzędnych płaskich zmienia się od punktu do punktu. Różnica faz między obydwoma promieniami jest proporcjonalna do różnicy odkształceń głównych we wtórnym układzie współrzędnych płaskich. Współczynnik proporcjonalności nazywa się stałą elastooptyczną b. W dalszych rozważaniach przyjmuje się laboratoryjny układ współrzędnych, którego oś „z" jest skierowana wzdłuż promienia świetlnego, orientacja pozostałych osi natomiast jest dowolna ale niezmienna. Z powyższych rozważań wynika, że z pomiaru elastooptycznego możliwe jest uzyskanie informacji o różnicy wtórnych odkształceń głównych oraz o kącie pod jakim występuje układ główny względem układu laboratoryjnego. Odpowiada to w klasycznym eksperymencie elastooptycznym izochromom i izoklinom. Tam jednakże można uzyskiwać rozwiązania wyłącznie dla modeli płaskich, gdyż w technikach tych otrzymuje się pomiar wycałkowany po grubości modelu. Problemem do rozwiązania jest analiza elementu trójwymiarowego o dowolnym kształcie, interesujące są zwłaszcza przypadki trudno analizowalne przez metody numeryczne. Stosowana obecnie technika zamrażania, posiada szereg niedogodności i opiera się na uproszczeniach. Celowe jest wobec tego poszukiwanie technik optycznych, które nie wprowadzając zaburzeń do obiektu, pozwalałyby na uzyskiwanie informacji o istniejącym w nim polu odkształcenia. Nowe możliwości otwierają się dzięki wykorzystaniu zjawiska światła rozproszonego. W metodzie tej pomiarowi podlega jedynie natężenie światła rozproszonego w danym punkcie obiektu (pobudzonego do drgań przez promień świetlny), w kierunkach do tego promienia prostopadłych. Natężenie to jest proporcjonalne do wielkości emisji światła w tym punkcie. Anizotropia ośrodka wpływa jedynie na zmiany polaryzacji i fazy światła. Aby uzyskać zależności ilościowe należy przeanalizować natężenie pola elektrycznego wzdłuż biegu promienia padającego, wykorzystuje się tutaj wnioski z równania (9). Dla dwóch infinitezymalnie bliskich punktów zachodzi zależność

$$\vec{E}(z+dz, \tau) = \check{T}^{\vartheta}\hat{\Lambda}(-\vec{k}dz)\check{T}^{-\vartheta}\vec{E}(z, \tau), \tag{10}$$

gdzie: $\hat{\Lambda}(\vec{\zeta})$ — operator przesunięcia fazy sinusoidy o wartość ζ_1 dla osi „x" i o ζ_2 dla osi „y";

$\vec{\zeta}$ — para wielkości (ζ_1, ζ_2);

$\check{T}$ — transformacja obrotu wokół osi „z" o kąt ϑ;

Sens powyższego wzoru jest następujący. Z laboratoryjnego układu współrzędnych przechodzi się przez obrót o kąt $-\vartheta$ do układu wtórnych odkształceń głównych, tam dokonuje się przesunięcia poszczególnych faz o $-\vec{k}dz$, po czym obrót o kąt ϑ przywraca orientację laboratoryjną. Po napisaniu $\vec{E}$ w postaci (6) i wykonaniu działań uzyskuje się wyrażenie na $\vec{E}(z+dz_1\tau)$ w postaci:

$$\vec{E}(z+dz, \tau) = \sqrt{2}\, A(\check{P}+dz\,\check{S}\check{P}\check{T}^{\frac{\pi}{2}})\vec{\Theta}^{\tau}, \tag{11}$$

gdzie: $\check{P}$ — macierz $\check{T}^{\varphi}\check{D}^{\gamma}\check{T}^{-\psi}$ (12)

b — stała elastooptyczna

$\check{S}$ — macierz $-\frac{b}{2}[\varepsilon^{(1)}+\varepsilon^{(2)}+(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})\hat{T}^{2\vartheta}\check{V}]$ (13)

$\check{V}$ — macierz $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (14)

Z drugiej zaś strony w punkcie $z+dz$ obowiązuje równanie

$$\vec{E}(z+dz, \tau) = \sqrt{2}(A+dA)\check{P}(z+dz)\vec{\Theta}^{\tau}. \tag{15}$$

Przyrównanie prawych stron równań (11) i (15) i wyrugowanie wektora czasowego $\vec{\Theta}^{\tau}$ daje równanie różniczkowe na parametry A, γ, φ, ψ charakteryzujące stan polaryzacji w danym punkcie na osi „z".

$$(A+dA)\check{P}(z+dz) = A(\check{P}+dz\,\check{S}\check{P}\check{T}^{\frac{\pi}{2}}). \tag{16}$$

Zamiast równaniem (16), wygodniej jest posługiwać się równaniem zsymetryzowanym z pominięciem wyrazów drugiego rzędu

$$(A^2+2A\cdot dA)(\check{P}\check{P}^T)_{(z+dz)} = A^2[\check{P}\check{P}^T+dz(\check{S}\check{P}\check{T}^{\frac{\pi}{2}}\check{P}^T+\check{P}\check{T}^{-\frac{\pi}{2}}\check{P}^T\check{S}^T)]. \tag{17}$$

W wyniku bezpośredniego rachunku uzyskuje się

$$(A^2+2A\cdot dA)(\check{P}\check{P}^T)_{(z+dz)} = A^2[\check{P}\check{P}^T-b(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})\sin 2\gamma\check{T}^{2\vartheta-\frac{\pi}{2}}\check{V}dz]. \tag{18}$$

Równanie to zawiera trzy wielkości niewiadome: A, γ, φ. Została wyeliminowana niemierzona faza ψ. Przyrównanie śladów macierzy po obydwu stronach równania (18) daje $dA = 0$, co jest konsekwencją przyjęcia braku strat podczas przechodzenia promienia przez model. Z pozostałych elementów macierzy wygodnie jest utworzyć jedno wyrażenie algebraiczne na wielkości zespolone.

Definiuje się funkcję macierzowo liczbową o postaci

$$\operatorname{com}\check{H} \overset{\text{def}}{=} (H_{11}-H_{22})+i(H_{12}+H_{21}). \tag{19}$$

Przy jej pomocy można zapisać wyrażenie

$$\frac{d}{dz}[\operatorname{com}(\check{P}\check{P}^T)] = -b(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})\sin 2\gamma\cdot\operatorname{com}(\check{T}^{2\vartheta-\frac{\pi}{2}}\check{V}). \tag{20}$$

prowadzące do następującego równania różniczkowego

$$\frac{1}{\sin 2\gamma}\frac{d}{dz}(-i\cos 2\gamma e^{2\varphi i}) = b(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})e^{2\vartheta i}. \tag{21}$$

W równaniu tym udało się dokonać podziału występujących wielkości na optyczne (po lewej stronie) i mechaniczne (po prawej). Można teraz zdefiniować jedną wielkość odpowiedzialną za zjawiska mechaniczne tzn.

$$\tilde{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)})e^{2\vartheta i}. \tag{22}$$

(Wielkość tę proponujemy nazwać zespolonym odkształceniem kierunkowym — dotyczy wybranego kierunku osi „z") oraz dwie wielkości odpowiedzialne za zjawiska elastooptyczne tzn.

$$Q = -i\cos 2\gamma e^{2\varphi i} \quad \text{i} \quad s = \operatorname{sgn}\gamma. \tag{23}$$

Wielkość „s" jest skrętnością obiegu wektora $\vec{E}$ dokoła elipsy polaryzacji. Równanie może być teraz zapisane w postaci

$$b\tilde{\varepsilon} = \frac{\dot{Q}}{s\sqrt{1-Q^*Q}}. \tag{24}$$

Nadaje się ono do bezpośredniego obliczania zespolonego parametru odkształcenia. Wielkość Q pochodzi z eksperymentu a $\dot{Q}$ wyznacza się przez numeryczne różniczkowanie.

3. Wykorzystanie zjawiska rozpraszania Rayleigha do pomiaru wielkości elastooptycznych

Przekrój czynny na rozpraszanie Rayleigha można wyrazić jako

$$d\sigma = \frac{3\sigma_0}{8\pi}(\operatorname{vers}\vec{E}\times\vec{N})^2 d_0, \tag{25}$$

gdzie $\vec{N}$ jest wektorem kierunkowym od punktu rozpraszającego do punktu obserwacji. Najdokładniejsze pomiary uzyskuje się wtedy gdy wektor $\vec{N}$ jest prostopadły do biegu promieni, czyli w przyjętym układzie współrzędnych ma postać $\vec{N}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$. Ze względu na dużą częstość stosowanego promieniowania (np. laser He-Ne) pomiarowi podlega jedynie średnia wartość natężenia światła czyli wielkość

$$I \sim \overline{(\vec{N}\times\vec{E})^2}. \tag{26}$$

Podstawiając w miejsce $\vec{E}$ wyrażenie (6) i dokonując uśrednienia po czasie uzyskuje się wyrażenie wiążące natężenie światła rozpraszanego i wielkości elastooptyczne.

$$I(\alpha) = I_0 A^2[l - \cos 2\gamma \cdot \cos(2\varphi - 2\alpha)]. \tag{27}$$

We wzorze powyższym I_0 jest to stała proporcjonalności zależna od jasności źródła, częstości i zdolności do rozpraszania i pochłaniania światła w modelu. Dokonując pomiarów natężenia światła pod trzema kątami uzyskuje się trójkę liczb

$$I(0), \quad I\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad I\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{28}$$

Z tej trójki można utworzyć jedną wielkość

$$J = \frac{\left[I(0) + I\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2I\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + i\left[I(0) - I\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}{I(0) + I\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{29}$$

Jest to wielkość pomiarowa, wiąże ona obserwacje z parametrem elastooptycznym gdyż

$$J = Q. \tag{30}$$

Dokonując pomiarów natężenia światła dochodzącego do rejestratora (element fotoelektryczny) poprzez układ zobrazowania tak, aby rejestrować promieniowanie dochodzące z wybranego kierunku, można otrzymać funkcję parametru elastooptycznego z argumentem będącym punktem bieżącym drogi promienia.

Przez wprowadzenie wielkości tej do wyrażenia (24) można obliczać w każdym punkcie zespolone odkształcenie kierunkowe. Do wyznaczenia pozostaje jedynie skrętność s. Problem polega na tym, że po przejściu wartości γ przez zero nie wiadomo, czy wartość ta oddala się od zera w kierunku dodatnim czy ujemnym. Żaden pomiar w układzie tym nie daje informacji o znaku s. Można go jednak uzyskać przez wykonanie pomiarów analogicznych dla dwu różnych stanów polaryzacji wejściowej, tzn. przy dwu różnych wartościach γ. Wtedy te dwie wartości γ_1 i γ_2 nie osiągają zera równocześnie, można wobec tego określić przez pomiary równoległe skrętność w danym punkcie promienia świetlnego.

4. Pomiary stanu odkształcenia w przypadku trójwymiarowym

Przedstawiona w poprzednim rozdziale metoda pomiaru zespolonego odkształcenia kierunkowego pozwala na uzyskiwanie dwóch informacji o tensorze odkształcenia (różnica odkształceń głównych i kąt wtórnego układu głównego) w danym układzie współrzędnych laboratoryjnych. Pomiary takie, przez obrót ciała lub obrót układu optycznego można dokonywać w różnych kierunkach.

Powstaje pytanie, czy dokonując tych obserwacji dla trzech kierunków można uzyskać pełną informację o tensorze odkształcenia. Odpowiedź jest negatywna, gdyż w przypadku odkształcenia hydrostatycznego (tensor odkształcenia jest liczbowy tzn. jednostkowy pomnożony przez liczbę) wszystkie pomiary mianowane są zerowe. Wynika stąd, że metoda daje odpowiedź na zadanie znalezienia tensora odkształcenia w stanie trójwymiarowym, z dokładnością jednakże do ciśnienia hydrostatycznego. Potrzebny do tego układ równań można uzyskać następująco: dokonuje się pomiarów elastooptycznych według podanego wyżej schematu w trzech kierunkach biegu promienia świetlnego, wzajemnie niewspółpłaszczyznowych. Dla danego kierunku oblicza się następnie kąt obrotu dokoła tego kierunku tak aby uzyskać wtórny układ główny. Wynik operacji można zapisać następująco:

$$\check{T}^{-1}\check{\varepsilon}\check{T} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)\prime} & 0 & \varepsilon_{31}' \\ 0 & \varepsilon^{(2)\prime} & \varepsilon_{23}' \\ \varepsilon_{31}' & \varepsilon_{23}' & \varepsilon_{33}' \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Po prawej stronie równości dana jest różnica $\varepsilon^{(1)\prime}-\varepsilon^{(2)\prime}$, ponieważ mierzona jest wielkość Q i obowiązuje (24). Otrzymuje się stąd dwa równania na niewiadome $\check{\varepsilon}$. Są to

$$\begin{gathered} (\check{T}^{-1}\check{\varepsilon}\check{T})_{12} = 0, \\ (\check{T}^{-1}\check{\varepsilon}\check{T})_{11}-(\check{T}^{-1}\check{\varepsilon}\check{T})_{22} = \varepsilon^{(1)\prime}-\varepsilon^{(2)\prime}. \end{gathered} \tag{32}$$

Tensor obrotów $\check{T}$ jest złożeniem operacji obrotu układu laboratoryjnego do takiego układu, w którym nowa oś „z" jest kierunkiem biegu promienia $\check{T}_c$ i operacji obrotu do wtórnego układu głównego $\check{T}^{\vartheta}$.

$$\check{T} = \check{T}^{\vartheta}\check{T}_c. \tag{33}$$

Za macierze $\check{T}_c$ wygodnie jest przyjąć macierze obrotów dokoła osi „x" i „y".

$$\check{T}_{c1} = 1, \quad \check{T}_{c2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\xi & -\sin\xi \\ 0 & \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix}, \quad \check{T}_{c3} = \begin{pmatrix} \cos\eta & 0 & \sin\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\eta & 0 & \cos\eta \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Uzyskuje się w ten sposób sześć równań o sześciu niewiadomych. Układ ten jest jednak nieokreślony, co zostało wyżej pokazane. Do tego układu dołączamy wobec tego siódme równanie o postaci

$$\mathrm{tr}\,\check{\varepsilon} = 0. \tag{35}$$

Zakłada się tutaj, że odkształcenie hydrostatyczne jest zero. Nie zmienia to równań pozostałych, o czym można się przekonać dodając do tensora $\check{\varepsilon}$ dowolny tensor liczbowy. Zmianie ulega tylko równanie (35), które wobec tego kasuje nieoznaczoność. Otrzymany teraz układ równań jest układem nadokreślonym. Skreślenie któregokolwiek równania poprzedniego jest niecelowe, gdyż traci się jedną informację. Należy wobec tego rozwiązywać otrzymany układ jako nadokreślony, przez minimalizację normy kwadratowej;

$$||G\varepsilon - g||, \tag{36}$$

gdzie: ε — układ liczb $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31})$

G — macierz współczynników z trzech układów równań typu (32) dla $\check{T}_{c1}, \check{T}_{c2}, \check{T}_{c3}$,

g — układ wyrazów wolnych z prawych stron (32);

co daje równanie:

$$G^T G\varepsilon = G^T g. \tag{37}$$

5. Przypadek płaski

Wspólną cechą obydwu przypadków płaskich (PSO i PSN) jest zerowanie się dwu składowych mieszanych tensora odkształcenia. Jeżeli przepuszcza się promień świetlny przez model prostopadle do kierunku wyznaczającego stan płaski, to wtórny układ główny jest stały w całym modelu i zgodny z osiami układu laboratoryjnego.

Przyjmując, że oś „y" wyznacza układ płaski uzyskuje się następujące wyrażenie na tensor odkształcenia

$$\check{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{31} \\ 0 & k(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33}) & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

gdzie współczynnik k jest równy 0 dla PSO a $\dfrac{-\nu}{1-\nu}$ dla PSN. Wtórny tensor odkształcenia ma wtedy postać

$$\check{\varepsilon}_s = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Kąt ϑ wynosi wobec tego zero. Zespolone odkształcenie kierunkowe (wzdłuż osi „z") jest wtedy rzeczywiste a co za tym idzie i pochodna parametru elastooptycznego. Po rozpisaniu równań otrzymuje się dwa równania

$$\begin{aligned} 2\dot{\varphi} &= b(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})\operatorname{tg}2\gamma\cdot\cos 2\varphi, \\ 2\dot{\gamma} &= -b(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})\sin 2\varphi. \end{aligned} \tag{40}$$

Układ ten może być jednokrotnie przecałkowany analitycznie (w ogólnym przypadku) po wyrugowaniu $\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}$. Faktycznie, podzielenie obydwu powyższych równań przez siebie prowadzi do równania:

$$2\dot{\varphi}\operatorname{tg}2\varphi = -2\dot{\gamma}\operatorname{tg}2\gamma. \tag{41}$$

Całką tego równania jest zależność:

$$\cos 2\gamma|\cos 2\varphi| = \mathrm{const}. \tag{42}$$

Wykorzystano tutaj fakt, że $\gamma\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Jeżeli iloczyn ten dla promienia wnikającego do modelu będzie różny od zera, to $\cos 2\varphi$ będzie miał stały znak, np. plus i wtedy

$$\cos 2\gamma\cdot\cos 2\varphi = \cos 2\gamma_0\cdot\cos 2\varphi_0, \tag{43}$$

(γ_0, φ_0 — są to wartości γ, φ dla promienia wchodzącego). Podstawiając powyższą zależność do równań (40) otrzymuje się równanie na γ:

$$\begin{aligned} &\arcsin\left(\frac{\sin 2\gamma}{\sqrt{1-\cos^2 2\gamma_0\cdot\cos^2 2\varphi_0}}\right)-\arcsin\left(\frac{\sin 2\gamma_0}{\sqrt{1-\cos^2 2\gamma_0\cdot\cos^2 2\varphi_0}}\right)= \\ &= -b\int_0^z dz(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)})\operatorname{sgn}\varphi. \end{aligned} \tag{43a}$$

Ze względu na praktyczne zastosowania interesujący jest przypadek $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, wtedy równania (40) upraszczają się do

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= 0 \\ \dot{\gamma} &= -\frac{b}{2}(\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}). \end{aligned} \tag{44}$$

Przypadek ten był już wcześniej realizowany zarówno teoretycznie jak i praktycznie [7, 8, 9] w technice izodyn.

Jeżeli układ pomiarowy jest wycechowany (wyznaczony iloczyn I_0A^2) wystarczy mierzyć intensywności pod jednym kątem. Ze wzoru (27) widać, że najkorzystniej robić to dla $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$. Na ewentualnie wykonanej fotografii z obrazu intensywności ukazują się czarne prążki będące miejscem geometrycznym punktów, dla których intensywność jest zero. Wykonywanie jednakże pomiarów fotometrycznych jest korzystniejsze, gdyż pozwala zapisać na cyfrowym nośniku informacji (taśma magnetyczna lub tasiemka papierowa) liniowo dane o rozkładzie intensywności.

Odpowiednio przygotowany program umożliwia uzyskanie rozkładu różnicy odkształceń głównych w danym przypadku. Dla płaskiego stanu odkształcenia będzie to ε_{11} a płaskiego stanu naprężenia σ_{11}.

Drugi z tych przypadków był analizowany w np. pracach [7, 8], [9]. W. KARMOWSKI i S. MAZURKIEWICZ [7] wykorzystali informację o wartości σ_{11} do rozwiązania równań równowagi — równania te stają się określone a co więcej pozwalają na uzyskanie informacji o składowych pola naprężenia przez bezpośrednie całkowanie, rozpoczynając proces obliczania od miejsca wnikania promieni do modelu. Podane tam wzory pozwalają na praktyczne rozwiązanie zadania znalezienia pola odkształceń w przypadku płaskiego pola naprężenia.

Inną metodę przyjęto w pracach [25].

Wprowadzono tam pojęcie izodyn sprężystych, jako miejsc geometrycznych punktów, dla których dana składowa siły działającej między dwoma izoklinami jest stała. Definicja taka nie jest jednak jednoznaczna. Bardziej celowym wydaje się zdefiniowanie siły działającej na przekrój równoległy do danej osi układu współrzędnych od brzegu ciała do danej linii w następujący sposób:

$$f_i^{(x)}(x, y) = \int_{b(x)}^{y} d\eta\, \sigma_{xi}(x, \eta), \tag{45}$$

gdzie: $b(x)$ – równanie brzegu

$$i - x, y$$

Wielkość fizyczną $\vec{f}^{(x)}$ proponujemy nazwać dyną.

Izodyną natomiast będzie linia o stałej wartości składowej $f_i^{(x)}$. Oczywiście ze względu na izotropowość przestrzeni kierunek „x" i związany z nim „y" może być wybrany dowolnie. Pomiarowi elastooptycznemu podlega składowa normalna, czyli $f_x^{(x)}$. Wysoką elegancję wzorów metody izodyn uzyskuje się przez wyrażenie składowych naprężenia jako pochodnych funkcji Airy'ego [25].

Występuje tutaj również nieoznaczoność w funkcji Airy'ego. Można jej uniknąć przez zdefiniowanie tej funkcji dla danego stanu jako funkcji, która spełnia równanie biharmoniczne, warunki brzegowe na naprężenia oraz warunki początkowe w dowolnym punkcie brzegu (x_0, y_0) przyjętym za zerowy.

$$\Phi_0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 = 0. \tag{46}$$

Jest to możliwe ponieważ do funkcji Airy'ego można dodać dowolną funkcję liniową. Wtedy

$$f_x^{(x)}(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \int_0^l dl q_x, \tag{47}$$

gdzie $\vec{q}$ jest obciążeniem brzegu a całkowanie przebiega prawoskrętnie od punktu zerowego

(x_0, y_0) do punktu na brzegu ciała, dla którego składowa x-sowa jest równa tej składowej dla badanego punktu.

Analogiczny wzór można napisać dla składowej $f_y^{(y)}$, który daje $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Wzory te pozwalają na uzyskiwanie funkcji Airy'ego Φ bez rozwiązywania równania biharmonicznego. Trzeba jednak dysponować ciągłym polem dyn $f_x^{(x)}$, $f_y^{(y)}$, co uzyskuje się np. metodą aproksymacji zastosowaną w [22].

6. Podsumowanie

Przedstawiona metoda analizy przestrzennego przypadku teorii sprężystości daje możliwość uzyskania informacji o polu odkształcenia w dowolnym punkcie modelu, jednak bez składowej hydrostatycznej. W problemach mechaniki ciał stałych takich jak ocena wytężenia, taka analiza jest wystarczająca. Przez zaproponowanie pomiarów równoległych, dla dwu różnych polaryzacji wejściowych promienia świetlnego uzyskano możliwość oceny znaku wielkości mechanicznych bez odwoływania się do dodatkowych eksperymentów, które przede wszystkim są trudne do interpretacji i nie dają się automatyzować, co przy ogromie pracy pomiarowej praktycznie wyklucza ich zastosowanie. Dla prawidłowego opisu zjawisk świetlnych w obszarze pomiarowym wprowadzono dwie nowe wielkości fizyczne tj. zespolone odkształcenie kierunkowe opisujące składowe tensora odkształcenia analizowane w danym kierunku oraz parametr elastooptyczny charakteryzujący stan polaryzacji światła w danym punkcie modelu na drodze promienia świetlnego. Podano efektywne wzory pozwalające na obliczanie składowych tensora odkształcenia w dowolnym punkcie modelu bez odkształcenia równomiernego. W drugiej części pracy przedstawiono przypadek płaski w nawiązaniu do stosowanej w tym zakresie techniki izodyn. Zostały podane zależności uściślające proponowane w innych pracach wielkości fizyczne.

Literatura cytowana w tekście

1. R. WELLER, J. K. BUSSEY, *Photoelastic Analysis of Threedimensional Stress Systems Using Scattered Light*, NACA Techn. Note 737 Nov. 1938.
2. R. WELLER, *Three Dimensional Photoelasticity Using Scattered Light*, J. Appl. Phys., 12 1941.
3. R. WELLER, *A New Method for Photoelasticity in Three-Dimensions*, J. of Appl. Phys., 10 (4) 1939.
4. D. C. DRUCKER, R. D. MINDLIN, *Stress Analysis by Threedimensional Photoelastic Method*, J. Appl. Phys., Vol. II, No I, 1940.
5. H. T. Jessop, *The Scattered Light Method of Exploration of Stress in Two and Three-dimensional Models*, British J. of Appl. Phys., 2. 1951.
6. E. M. SALAME, *Three-dimensional Photoelastic Analysis by Scattered Light*, Proc. Soc. Exp. Stress. Analys, 5.N.2.
7. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, *Photoelastic Isodynes — A New Type of Stress-Modulated Ligh Intensity Distribution*, Mech. Res. Com., Vol. 4 (4) 1977.
8. S. B. MAZURKIEWICZ, J. T. PINDERA, *Integrated — plane Photoelastic Method-Application of Photoelastic Isodynes*, Exp. Mech., Vol. 19 No 7, July 1979.

9. J. T. PINDERA, *Analytical Foundation of The Isodyne Photoelasticity*, Mech. Res. Com., Vol. 8 (6) 1981.
10. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, R. B. KRASNOWSKI, *Assessment of the Reliability of Some Typical Mathematical Models of Plane Stress States Using Isodyne Photoelasticity*, CANCAM 1981, Monctom. June 1981.
11. J. T. PINDERA, S B. MAZURKIEWICZ, *Optimization of Photoelastic Stress Analysis Using Isodynes Method*, Eight All-Union Conference on Photoelasticity, Tallin, Sept. 1979, Vol. I.
12. J. T. PINDERA, S. B. MAZURKIEWICZ, T. KEPICH, *Photoelastic Isodynes in Static and Dynamic Stress Analysis*, 7-th Congress on Material Testing, Budapest, IX 1978.
13. W. KARMOWSKI, S. B. MAZURKIEWICZ, *Application of The Isodyne Method to Determine the Components of Stress in Plane Stress State*, 8-th Congress on Material Testing, Budapest, IX 1982
14. S. MAZURKIEWICZ, *Zastosowanie metody światła rozproszonego w elastooptyce do badania zagadnień płaskich*. Czas. Techn., M-2.4.1977.
15. S. MAZURKIEWICZ, *O metodzie światła rozproszonego w elastooptyce*, Czas. Techn. Z. 2 (201) M. 1977.
16. S. MAZURKIEWICZ, L. KUC, M. SIKOŃ, *Rozpraszanie światła przy skośnym prześwietleniu w zastosowaniu do analizy naprężeń w szkle hartowanym*, Mech. Teoret. i Stos., 3. 17 (1979).
17. S. MAZURKIEWICZ, *Zastosowanie metody światła rozproszonego do badania naprężeń w dwóch belkach obciążonych siłami skupionymi*, VII Symp. Bad. Dośw. w Mech. Ciała Stałego, IX. 1976, W-wa.
18. M. M. FROCHT, R. GUERNSEY, *Further Work On The General Three-Dimensional Models*, J. of Appl. Mech., Vol. 22, June 1955.
19. M. M. FROCHT, L. S. SRINATH, *A non-destructive Method for Three-Dimensional Photoelasticity*, Proc. of the Third U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., 1958 ASME, N. York.
20. Y. E. CHENG, *A Dual Observation Method for Determining Photoelastic Parameters in Scattered Light*, Exp. Mech., Vol. 7 No 3. 1967.
21. A. ROBERT, E. GILLEMENT, *New Scattered Light Method in Three-Dimensional Photoelasticity*, British J. of Appl. Phys., 15, 1964.
22. W. KARMOWSKI, *Aproksymacja funkcji określonej w obszarze płaskim zbiorem wartości eksperymentalnych w dowolnie rozmieszczonych punktach*, Konf. Problemy losowe w mechanice konstrukcji, Gdańsk 1980.
23. L. LANDAU, E. LIFSZYC, *Elektrodynamika ośrodków ciągłych* PWN, Warszawa 1960.
24. J. T. PINDERA, F. W. HECKER, B. R. KRASNOWSKI, *Gradient Photoelasticity*, Mech. Res. Com., Vol. 9 (3) 1982.
25. J. T. PINDERA, *Analytical Foundations of the Isodyne Photoelasticity*, Mech. Res. Com., vol. 8 (6) 1981.

Резюме

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЯ РАССЕЯНОГО СВЕТА

В работе представляется новый метод фотоупругости, использующий явление рассеянного света для измерения тензора деформации в трехмерном состоянии. Определяются две новые физические величины, описывающие состояние деформации (комплексная направляющая деформация), а также состояние поляризации в данной точке объекта (параметр фотоупругости).

Получены эффективные сочстания соединяющие обе эти величины, которые делают возможным получение значений составляющих поля деформаций нумерическим путем.

Измерениям подвергаются значения интенсивности света по трем перпендикулярным направлениям к ходу лучей. Путем измерения двух состояний входной поляризации получается информация о знаке роста значения поля деформации. Рассматривается плоский случай, вводится понятие дин с помощью которого можно привести эффективные вычеслительные формулы для этого случая, а также получить сочетания соединяющие значения фотоупругости и функцию Эри.

Summary

NEW METHOD OF STRAIN FIELD IN THREE-DIMENSIONAL STATE

The new method of photoelasticity with the use of light scattering phenomenon to measure 3-D strain tensor is presented. Two new physical quantities describing at any point of the object as well the strain state of the body (i.e. complex directional strain) as the polarization state (i.e. polaritzation parameter) have been defined. Relations between these two quantities have been obtained making it possible to solve strain problem by numerical procedure. Light intensities in three directions perpendicular to the light beam have to be measured in proposed method. These measurements have to be made for two input beams (with different polarization states) to evaluate the sign of strain change. New quantity (the dyne) which is effective in calculation formulae for 2-D case has been introduced. The relationships between the dyne and Airy's function has been obtained.

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 15 marca 1983 roku