

O PEWNYCH WIĘZACH BRZEGOWYCH W KLASYCZNEJ TEORII PŁYT

KAZIMIERZ MYŚLECKI

Politechnika Wroclawska

1. Wstęp

W pracy rozpatruje się, w sposób ogólny, zagadnienie współpracy cienkiej płyty z innymi konstrukcjami np. powłoką, belką, prętem cienkościennym itp. Zakłada się, że połączone są one z płytą na jej brzegu. Analiza takiej złożonej konstrukcji jest często niemożliwa, pomimo dysponowania dobrym aparatem numerycznym (metodą elementów skończonych). Rozmiar zagadnienia przekracza zwykle wtedy możliwości dostępnego sprzętu obliczeniowego. Dlatego też istotne jest niezależne rozwiązanie poszczególnych elementów złożonej konstrukcji z uwzględnieniem ich współpracy.

W połączeniach płyty z innymi dźwigarami powierzchniowymi można przyjmować, z dobrym przybliżeniem w wielu przypadkach, sztywne zespolenie dźwigara z płytą (ze względu na dużą sztywność dźwigarów powierzchniowych w niektórych kierunkach). Natomiast oparcie płyty na belce jest swego rodzaju podparciem sprężystym.

Analitycznym narzędziem, które zastosujemy do rozwiązania przedstawionego wyżej zagadnienia jest mechanika ciała stałego z więzami [1, 2, 3, 4]. Punktem wyjścia będzie klasyczna teoria płyt [5].

2. Podstawowe równania klasycznej teorii płyt

Na płaszczyźnie środkowej S cienkiej płyty o grubości h przyjmujemy krzywoliniowy układ współrzędnych Θ^1, Θ^2 . Współrzędne tensora metrycznego oznaczamy przez $A^{\alpha\beta}$, współrzędne alternatora $-\varepsilon_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), a różniczkowanie kowariantne kreską pionową. Wówczas zagadnienie zginania płyty poddanej obciążeniu $q(\Theta^1, \Theta^2)$ prostopadłemu do płaszczyzny środkowej można opisać grupami równań:

warunek równowagi dla tensora napięć momentowych $M_{\alpha\beta}$

$$(2.1) \quad M^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} + q = 0,$$

związki geometryczne

$$(2.2) \quad \kappa_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta},$$

relacje konstytutywne

$$(2.3) \quad M^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta},$$

gdzie w jest ugięciem płyty, a $\varkappa_{\gamma\delta}$ — tensorem zmian krzywizny płaszczyzny środkowej. Tensor sprężystości $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ dla płyty izotropowej o sztywności zgięciowej D przyjmuje postać

$$(2.4) \quad C^{\alpha\beta\gamma\delta} = D \left[\nu A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} + \frac{1-\nu}{2} (A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\beta\gamma}) \right]^{1)}$$

Na krzywej C będącej śladem płaszczyzny środkowej S na powierzchni brzegowej płyty zadaje się geometryczne i statyczne warunki brzegowe. Krzywą C parametryzujemy współrzędną długości łuku λ i określamy wektor n_α normalny do C .

Definiujemy następujące operatory:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi_n(\cdot) &= \frac{\partial}{\partial n}(\cdot), \\ M_n(\cdot) &= n_\alpha n_\beta(\cdot), \\ V_n(\cdot) &= n_\beta(\cdot) |_\alpha - \frac{\partial}{\partial \lambda} [\varepsilon_{\alpha\gamma}(\cdot) n_\beta n^\gamma], \end{aligned}$$

które służą do określenia geometrycznych

$$(2.6) \quad \begin{aligned} w &= w_0, \\ \varphi_n(w) &= \varphi_0, \end{aligned}$$

i statycznych warunków brzegowych

$$(2.7) \quad \begin{aligned} M_n(M^{\alpha\beta}) &= m_0, \\ V_n(M^{\alpha\beta}) &= p_0, \end{aligned}$$

gdzie w_0 , φ_0 , m_0 i p_0 są znanymi funkcjami określonymi na C .

W dalszych rozważaniach, w celu uproszczenia wzorów, będziemy pomijać argumenty operatorów brzegowych (2.5).

3. Równania więzów brzegowych i zasada idealności więzów

Rozpatrzmy dwa rodzaje więzów brzegowych danych na częściach C_1 i C_2 krzywej C .

Pierwszy rodzaj więzów opisuje współpracę płyty ze sztywną konstrukcją i można go przedstawić przy pomocy równań

$$(3.1) \quad \alpha_i(\lambda, w, \varphi_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \text{ na } C_1.$$

Nieznane parametry $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M$ nie zależą od współrzędnej λ .

Na krzywej C_2 przyjmujemy równania więzów

$$(3.2) \quad \gamma_i(\lambda, M_n, V_n, \varphi_n, \Delta\varphi_n, \dots, \nabla^k \varphi_n, w, w, \dots, \nabla^L w) = 0. \\ (i = 1, 2, \dots, s)$$

Opisują one wiele przypadków sprężystego współdziałania płyty z innymi elementami

¹⁾ Równania (2.1)÷(2.3) z tensorem sprężystości (2.4) można sprowadzić do jednego różniczkowego równania zginania płyty $\Delta\Delta w = q/D$ ($\Delta\Delta$ — bilaplasjan)

konstrukcyjnymi na brzegu C_2 . Operatory ∇^j oznaczają różniczkowanie po λ ($\nabla^j(\cdot) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j}(\cdot)$)

Funkcje α_i, γ_i są liniowymi funkcjami swoich argumentów (z wyjątkiem argumentu λ).

Równania więzów (3.1), (3.2) modyfikują warunki brzegowe (2.6), (2.7) na C_1 i C_2 , które można obecnie zapisać w postaci [4]

$$(3.3) \quad \begin{aligned} M_n &= m_r + m_0, \\ V_n &= p_r + p_0 \quad \text{na } C_1, \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} w &= -w_r + w_0, \\ \varphi_n &= -\varphi_r + \varphi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n &= m_r + m_0, \\ V_n &= p_r + p_0 \quad \text{na } C_2. \end{aligned}$$

Nieznanne funkcje φ_r, w_r, m_r i p_r są przemieszczeniami i siłami reakcyjnymi na krzywych C_1 i C_2 powstałymi na wskutek nałożenia więzów (3.1) i (3.2).

Dla więzów (3.1) i (3.2) przyjmujemy zasadę idealności więzów [3, 4]

$$(3.5) \quad \int_{C_1} (m_r \delta \varphi_n + p_r \delta w) d\lambda + \int_{C_2} (m_r \delta \varphi_n + p_r \delta w + \varphi_r \delta M_n + w_r \delta V_n) d\lambda + \\ + \sum_{N=0}^{K-1} [M_r^N \delta \nabla^N \varphi_n]_{\lambda_0}^{\lambda_k} + \sum_{N=0}^{L-1} [P_r^N \delta \nabla^N w]_{\lambda_0}^{\lambda_k} = 0.$$

Nawiasem kwadratowym w ostatnich składnikach (3.5) oznaczono różnicę wyrażenia w nawiasie na końcach krzywej C_2 ($\lambda = \lambda_0$ i $\lambda = \lambda_k$), a M_r^N ($N = 0, 1, \dots, K-1$) i P_r^N ($N = 0, 1, \dots, L-1$) są występującymi tam reakcjami.

Przemieszczenia i siły wirtualne w (3.5) (oznaczone symbolem δ) spełniają równania [4]

$$(3.6) \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial w} \delta w + \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_n} \delta \varphi_n + \sum_{N=1}^M \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_N} \delta \beta_N = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad \text{na } C_1,$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial M_n} \delta M_n + \frac{\partial \gamma_i}{\partial V_n} \delta V_n + \sum_{N=0}^K \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nabla^N \varphi_n} \delta \nabla^N \varphi_n + \\ + \sum_{N=0}^L \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nabla^N w} \delta \nabla^N w = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \text{na } C_2.$$

Oznaczmy przez $\psi_i = \psi_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) i $\mu_i = \mu_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) mnożniki Lagrange'a na C_1 i C_2 oraz pomnożmy przez nie równania (3.6) i (3.7) wykonując jednocześnie sumowanie po i . W pierwszym przypadku otrzymamy

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^P \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial w} \delta w + \sum_{i=1}^P \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_n} \delta \varphi_n + \sum_{i=1}^P \sum_{N=1}^M \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_N} \delta \beta_N = 0.$$

Natomiast w drugim — po stosownych przekształceniach mamy

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial M_n} \delta M_n + \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial V_n} \delta V_n + (a + \nabla X^0) \delta \varphi_n - \nabla \left(\sum_{N=0}^{K-1} X^N \nabla \delta \varphi_n \right) + \\ + (b + \nabla Y^0) \delta w - \nabla \left(\sum_{N=0}^{L-1} Y^N \nabla \delta w \right) = 0.$$

We wzorach (3.9) uwzględniono oznaczenia

$$(3.10) \quad a = \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \varphi_n}, \\ X^N = - \sum_{i=1}^S \sum_{J=0}^{K-1-N} (-1)^J \nabla^J \left(\mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nabla^{N+J+1} \varphi_n} \right)$$

$$(3.11) \quad b = \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial w}, \\ Y^N = - \sum_{i=1}^S \sum_{J=0}^{L-1-N} (-1)^J \nabla^J \left(\mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nabla^{N+J+1} w} \right).$$

Całkując (3.8) i (3.9) odpowiednio po krzywych C_1 i C_2 i dodając następnie do równania (3.5) możemy, po wykorzystaniu lematu du Bois-Reymonda, otrzymać przemieszczenia i siły reakcyjne [1]

$$(3.12) \quad m_r = \sum_{i=1}^P \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi_n}, \\ p_r = \sum_{i=1}^P \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial w},$$

$$\sum_{i=1}^P \int_{C_1} \psi_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_N} d\lambda = 0 \quad (N = 1, 2, \dots, M) \text{ na } C_1$$

i

$$(3.13) \quad m_r = a + \nabla X^0, \quad p_r = b + \nabla Y^0, \\ \varphi_r = \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial M_n}, \quad w_r = \sum_{i=1}^S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial V_n} \text{ na } C_2$$

oraz

$$(3.14) \quad \begin{aligned} M_r^J &= -X^J \quad (J = 0, 1, \dots, K-1), \\ P_r^J &= -Y^J \quad (J = 0, 1, \dots, L-1) \end{aligned}$$

na końcach krzywej C_2 ($\lambda = \lambda_0$ i $\lambda = \lambda_k$).

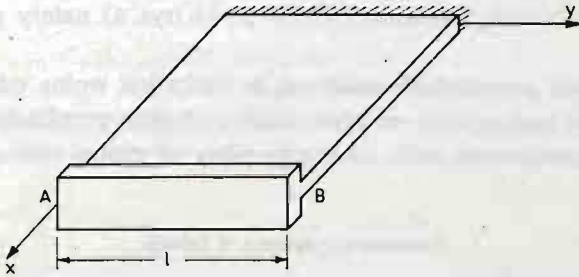
Równania (3.1), (3.2), (3.4), (3.3), (3.12), (3.13) i (3.14) łącznie ze związkami (2.1), (2.2) i (2.3) stanowią kompletny układ równań, który może służyć do rozwiązania zagadnienia zginania płyt z więzami (3.1) i (3.2).

Zauważmy, że więzy typów (3.1) i (3.2) mogą być dane na tej samej części brzegu C ($C_1 = C_2$), co nieznacznie modyfikuje przedstawione wyżej rozważania.

4. Przykłady więzów brzegowych

Weźmy najpierw pod uwagę więzy opisywane równaniami (3.1). W tym celu rozpatrzymy płytę prostokątną, na której jednym boku jest przymocowana sztywna belka (rys. 1). Więzy (3.1) mają tutaj postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \alpha^1: \varphi_n - \beta_3 &= 0, \\ \alpha_2: w - \beta_1 y - \beta_2 &= 0, \end{aligned}$$



Rys. 1

gdyż ugięcie sztywnej belki jest funkcją liniową, a kąt obrotu względem osi belki jest stały. Z równań (3.12) obliczamy siły reakcyjne

$$(4.2) \quad \begin{aligned} m_r &= \psi_1, \\ p_r &= \psi_2 \text{ na odcinku } AB \end{aligned}$$

oraz

$$(4.3) \quad \int_0^l \psi_1 dy = 0, \quad \int_0^l \psi_2 dy = 0, \quad \int_0^l \psi_2 y dy = 0.$$

Warunki (4.3) wobec (4.2) są równaniami równowagi sił reakcyjnych działających na sztywną belkę.

Przykładem konstrukcji z więzami (3.2) jest płyta z rys. 1 połączona ze sprężystą belką

o sztywności skrętej D_s i giętej D_g . Wówczas równania więzów można przyjąć w postaci

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \gamma_1: D_s \frac{d^2 \varphi_n}{dy^2} + M_n &= 0, \\ \gamma_2: D_g \frac{d^4 w}{dy^4} + V_n &= 0. \end{aligned}$$

Siły brzegowe M_n i V_n występują w równaniach (4.4) w miejscu obciążeń skręcanej i zginanej belki. Na podstawie odpowiednich wzorów z rozdziału 3. otrzymujemy przemieszczenia i siły reakcyjne

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varphi_r &= \mu_1, & w_r &= \mu_2, \\ m_r &= D_s \frac{d^2 \mu_1}{dy^2}, & p_r &= D_g \frac{d^4 \mu_2}{dy^4} \text{ na odcinku } AB \end{aligned}$$

oraz

$$(4.6) \quad \begin{aligned} M_r^0 &= -D_s \frac{d\mu_1}{dy}, & M_r^1 &= D_s \mu_1, \\ P_r^0 &= -D_g \frac{d^3 \mu_2}{dy^3}, & P_r^1 &= D_g \frac{d^2 \mu_2}{dy^2}, \\ P_r^2 &= -D_g \frac{d\mu_2}{dy}, & P_r^3 &= D_g \mu_2 \text{ w punktach } A \text{ i } B. \end{aligned}$$

Gdy weźmie się pod uwagę swobodę końców belki (rys. 1) należy przyjąć $M_r^0 = P_r^0 = P_r^1 = 0$.

W obu powyższych przykładach założono, że belka jest wolna od obciążeń zewnętrznych (z wyjątkiem sił reakcyjnych od płyty) oraz w drugim przykładzie pominięto wpływ przesunięcia osi przyrzutowej belki od brzegu płyty na postać równania (4.4)₁.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Non-linear mechanics of constrained material continua*. I., Arch. Mech., 1, 26, 1974.
2. Cz. WOŹNIAK, *On the Elastodynamics of Material Continua with Internal Constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., vol. XXII, No. 7-8, 1974.
3. Cz. WOŹNIAK, *Elastic Bodies with Constraints Imposed on Deformations, Stresses and Momenta*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., vol. XXII, No. 7-8, 1974.
4. Cz. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN, Warszawa-Poznań 1982.
5. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty — obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1980.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ СВЯЗЯХ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

В работе рассматривается „в обобщенном виде” проблема сотрудничества пластины с другими типами конструкции (балкой, оболочкой и т.п.) соединенными с пластиной на ее краях. Этот вопрос решается с точки зрения механики конструкции со связями. В настоящей работе подробно исследованы два примера краевых связей.

Summary

ON CERTAIN BOUNDARY CONSTRAINTS IN CLASSICAL THEORY OF PLATES

The problem of co-operation of bent plate with other elements (beam, shell etc.) connected on the edge with the plate is discussed. The problem is solved as a case of the structural mechanics with constraints. Two examples of boundary constraints are given and analysed.

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1983 roku