

NUMERYCZNE OBLICZANIE KRZYWOLINIOWYCH ŚCIEŻEK RÓWNOWAGI DLA JEDNOWYMIAROWYCH UKŁADÓW SPRĘŻYSTYCH

ZYGMUNT KASPERSKI

WSI Opole

W pracy podaje się metodę obliczeń punktów równowagi dla jednowymiarowych układów sprężystych. Przykładem takich układów są pręty (łuki) lub powłoki obrotowe obciążone osiowosymetrycznie. Obliczanie krzywoliniowych ścieżek równowagi jest podstawowym elementem nieliniowej analizy konstrukcji. Dodatkowo zakłada się, że rozważany układ jest poddany obciążeniom zachowawczym, charakteryzowanym jednym parametrem skalarnym λ . Metoda rozwiązania nieliniowych układów równań równowagi wykorzystuje wszystkie własności macierzy występujących w analizie tych konstrukcji metodą elementów skończonych i charakteryzuje się dużą stabilnością oraz stosunkowo krótkim czasem obliczeń. Dodatkową ceną zaletą jest w przybliżeniu liniowy wzrost czasu obliczeń w zależności od liczby elementów podziału konstrukcji. Podaje się szereg przykładów liczbowych dla powłok obrotowych, a dla zachowania względnej spójności opracowania podstawowe informacje o dyskretyzacji powłoki podano w Uzupełnieniu.

1. Sformułowanie problemu

Będziemy rozważać jednowymiarowe układy sprężyste, których pole przemieszczeń jest funkcją jednej zmiennej $u = u(\xi)$, $\xi \in [\xi_a, \xi_b]$. Załóżmy ponadto, że rozważany układ jest poddany obciążeniom zachowawczym charakteryzowanym parametrem skalarnym λ . Energia potencjalna takiego układu może być zapisana w postaci

$$(1.1) \quad P(u, \lambda) = U(u) + \lambda V(u),$$

gdzie $U(u)$ jest energią sprężystą, a $V(u)$ energią potencjalną obciążeń. W stanie równowagi energia potencjalna jest stacjonarna, tj. wariacja (różniczka Gateaux) jest równa zeru

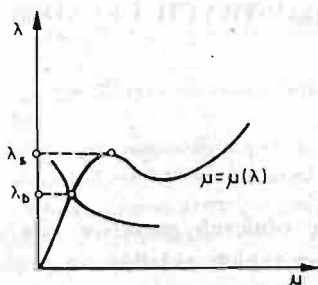
$$(1.2) \quad \delta P(u, \lambda; \delta u) = 0,$$

dla każdej, kinematycznie dozwolonej wariacji δu pola przemieszczeń. Równania Eulera-Lagrange'a zagadnienia wariacyjnego (1.2) stanowią układ równań różniczkowych, w ogólnym przypadku nieliniowych, który w zapisie operatorowym ma postać

$$(1.3) \quad F(u, \lambda) = 0.$$

Podstawowym zagadnieniem analizy omawianych układów jest wyznaczenie wszystkich

rozwiązań (w tym osobliwych) $u = u(\lambda)$ równania (1.3) dla wartości parametru λ z pewnego przedziału oraz zbadania stabilności tych rozwiązań. Szczególnie ważnym jest wyznaczenie tych wartości λ_b , które odpowiadają punktom rozgałęzienia oraz tych λ_s , które odpowiadają punktom maksimum lub minimum obciążenia, tj. w których $\frac{du}{d\lambda} = 0$ (rys. 1).



Rys. 1

Tak postawiony problem jest obszerny i na ogół trudny. Do jego rozwiązania stosuje się zwykle jedną z bezpośrednich metod rachunku wariacyjnego. Wówczas niewiadomym jest wektor uogólnionych współrzędnych bądź przemieszczeń węzłowych q . Dobrym przykładem jest tutaj metoda elementów skończonych zastosowana do obliczeń powłok obrotowych obciążonych osiowoosymetrycznie.

Dla przyjętych funkcji bazowych (funkcji kształtu) otrzymuje się

$$u(\xi) = N(\xi)q,$$

a wówczas energia potencjalna jest funkcją N zmiennych $q_i (i = 1, 2, \dots, N)$ współrzędnych wektora $q^T = [q_1, q_2, \dots, q_N]$, tj.

$$(1.4) \quad P(q, \lambda) = U(q) + \lambda V(q).$$

Energę sprężystą U można zapisać w postaci sumy

$$(1.5) \quad U(q) = U_L(q) + U_{NL}(q),$$

gdzie

$$(1.6) \quad U_L(q) = \frac{1}{2} q^T K q,$$

a w części $U_{NL}(q)$ składowe wektora q występują w potęgach wyższej niż dwa. Symetryczna macierz K w (1.6) o wymiarach $N \times N$ jest nazywana macierzą sztywności, a forma kwadratowa (1.6) jest nieujemna, tj. $U_L(q) \geq 0$ dla każdego $q \in R^N$, a dla warunków brzegowych uniemożliwiających sztywny ruch układu jest dodatnio określona, to znaczy $U_L(q) > 0$ dla $q \neq 0$.

Jeśli ograniczymy się do tzw. obciążeń typu martwego, to energia potencjalna $V(q)$ jest funkcją liniową

$$(1.7) \quad V(q) = q^T Q,$$

gdzie stały wektor $Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N]$ jest tzw. wektorem obciążeń jednostkowych. Obliczając teraz wariację funkcjonału (1.4) w klasie kinematycznie dozwolonych wariacji wektora q otrzymamy

$$(1.8) \quad \delta P(q, \lambda; \delta q) = \delta q^T f(q, \lambda) = 0,$$

a stąd układ równań równowagi przyjmuje postać

$$(1.9) \quad f(q, \lambda) \equiv Kq + \frac{\partial U_{NL}}{\partial q}(q) - \lambda Q = 0,$$

lub definiując tzw. wektor pseudo-sił

$$(1.10) \quad R(q) = \frac{\partial U_{NL}}{\partial q}(q),$$

postać

$$(1.11) \quad Kq + R(q) = \lambda Q,$$

gdzie $R(q) = [R_1(q), R_2(q), \dots, R_N(q)]^T$.

W ten sposób znalezienie ścieżki równowagi sprowadza się do rozwiązania nieliniowego układu równań algebraicznych (1.11).

2. Numeryczne rozwiązanie nieliniowych układów równań

Weźmy pod uwagę układ (1.11) i ustalając wartość parametru $\lambda = \tilde{\lambda}$ zastosujemy do niego iteracyjną metodę Newtona-Raphsona [7]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & q^0 \text{ — przybliżenie początkowe,} \\ & q^{m+1} = q^m - \left[K + \frac{\partial R}{\partial q}(q^m) \right]^{-1} \{ Kq^m + R(q^m) - \tilde{\lambda} Q \} \end{aligned}$$

dla $m = 0, 1, 2, \dots$ (m oznacza numer iteracji).

Jeśli metoda (2.1) jest zbieżna, to w granicy otrzymamy rozwiązanie

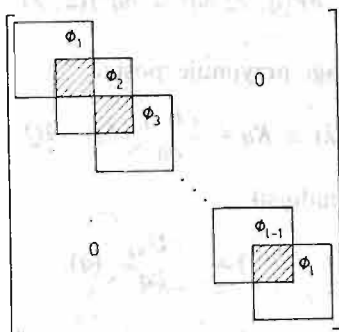
$$q(\tilde{\lambda}) = \lim_{m \rightarrow \infty} q^m.$$

We wzorze (2.1) macierz $\frac{\partial R}{\partial q}$ jest macierzą funkcyjną postaci

$$(2.2) \quad \frac{\partial R}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial q_1} & \frac{\partial R_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial q_N} \\ \frac{\partial R_2}{\partial q_1} & \frac{\partial R_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial R_2}{\partial q_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial R_N}{\partial q_1} & \frac{\partial R_N}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial R_N}{\partial q_N} \end{bmatrix}$$

a jej wartości liczbowe są w punktach q^m .

W jednowymiarowych układach macierze K i (2.2) mają postać przedstawioną na rys. 2, gdzie podmacierze $\Phi_j (j = 1, 2, \dots, l)$ są macierzami odpowiadającymi podziałowi powłoki na elementy, a wyrazy zakreskowane na rysunku są dodawane.



Rys. 2

Zgodnie z zasadą dodawania macierzy, taką samą strukturę ma również macierz $K + \frac{\partial R}{\partial q}$.

W dalszym ciągu tego rozdziału założymy, że elementy macierzy K i wektora Q są dane oraz znany jest algorytm obliczania wartości $R(q)$ i $\frac{\partial R}{\partial q}(q)$ dla dowolnego $q \in R^N$.

Przy nieliniowym zachowaniu się konstrukcji dla pewnych wartości parametru λ macierz $\frac{\partial R}{\partial q} + K$ jest macierzą źle uwarunkowaną, a nawet osobliwą [5]. W tych przypadkach (szczególnie interesujących z fizycznego punktu widzenia) nie można stosować metody Newtona-Raphsona w postaci (2.1). Zapiszmy (2.1) w innej równoważnej postaci:

q^0 — przybliżenie początkowe,

$$(2.3) \quad \left[K + \frac{\partial R}{\partial q}(q^m) \right] \Delta q^{m+1} = - \{ K q^m + R(q^m) - \tilde{\lambda} Q \},$$

gdzie $\Delta q^{m+1} = q^{m+1} - q^m$ dla $m = 0, 1, 2, \dots$ i rozważmy dwa możliwe przypadki:

- 1) macierz $K + \frac{\partial R}{\partial q}$ w pewnym otoczeniu rozwiązania $q = q(\tilde{\lambda})$ jest macierzą dobrze uwarunkowaną,
- 2) macierz $K + \frac{\partial R}{\partial q}$ jest macierzą bliską osobliwej.

(Praktyczne kryteria rozróżniania tych przypadków zostaną podane przy omawianiu przykładów obliczeń).

W pierwszym przypadku każdy krok iteracyjny metody Newtona-Raphsona wymaga rozwiązania liniowego układu równań (2.3), którego macierz współczynników $K + \frac{\partial R}{\partial q}$

jest postaci podanej na rys. 2. Bardzo efektywna metoda rozwiązania tego typu układów jest opisana w pracy [3]. Tutaj ograniczymy się jedynie do podania informacji, że jest to

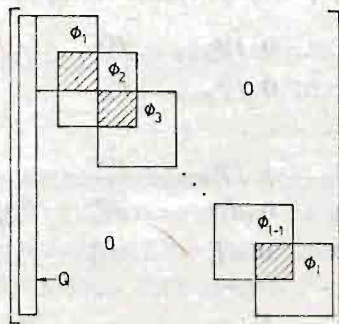
odpowiednio dostosowana metoda eliminacji z wyborem elementu głównego i że wszystkie operacje przeprowadza się jedynie na elementach niezerowych macierzy. W trakcie obliczeń wymagany jest niewielki obszar pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej. Macierz układu nie musi być macierzą symetryczną.

W drugim przypadku niekorzystną sytuację można ominąć, jeśli parametr λ potraktujemy jako jedną z niewiadomych układu (1.11), natomiast dowolnie wybraną składową q_r wektora q ($1 \leq r \leq N$) przyjmiemy jako daną. Mówi się wówczas o tzw. zamianie parametru sterującego [5]. Przy takiej zamianie wzór (2.3) przyjmie postać

$$(2.4) \quad \left[\tilde{K} + \frac{\partial R}{\partial q} (\tilde{q}^m) \right] \Delta \tilde{q}^{m+1} = - \{ K \tilde{q}^m + R(\tilde{q}^m) - q_r T \},$$

w którym macierz \tilde{K} powstaje z macierzy K przez zastąpienie r -tej kolumny wektorem Q wektor T jest r -tą kolumną macierzy K , natomiast

$$\tilde{q}^m = [q_1^m, \dots, q_{r-1}^m, \tilde{\lambda}^m, q_{r+1}^m, \dots, q_N^m]^T.$$



Rys. 3

W tym przypadku macierz $K + \frac{\partial R}{\partial q}$ jest postaci przedstawionej na rys. 3, gdzie bez zmniejszenia ogólności rozważań przyjęto $r = 1$. Ze względu na pojawienie się niezerowej kolumny w macierzy $\tilde{K} + \frac{\partial R}{\partial q}$ nie można stosować procedury opisanej w [3]. Można natomiast podać prostą modyfikację tej procedury, która będzie przydatna do rozwiązywania układów o macierzach w postaci przedstawionej na rys. 3, zachowując wszystkie pożądane własności (m.in. operacje tylko na niezerowych elementach). W tym celu, podobnie jak w pracy [3] założmy, że podmacierze Φ_i są wymiarów $n \times n$ (n -liczba parzysta) i wprowadźmy następujące oznaczenia:

$p = \frac{1}{2} n$, f_{ts}^i — element leżący w t -tym wierszu i s -tej kolumnie podmacierzy Φ_i ($t, s = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, l$).

Eliminację niewiadomych układu (2.4) będziemy przeprowadzać w l etapach. W i -tym etapie eliminacji potrzebne są podmacierze Φ_i oraz Φ_{i+1} . Fragment macierzy $K + \frac{\partial R}{\partial q}$

zawierający te podmacierze przed eliminacją wygląda następująco:

$$\begin{array}{cccccccc}
 Q_t & \dots & 0 & f_{11}^i & f_{12}^i & \dots & f_{1p}^i & f_{1,p+1}^i \dots f_{1n}^i \\
 Q_{t+1} & \dots & 0 & f_{21}^i & f_{22}^i & \dots & f_{2p}^i & f_{2,p+1}^i \dots f_{2n}^i & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q_{t+p} & \dots & 0 & f_{p1}^i & f_{p2}^i & \dots & f_{pp}^i & f_{p,p+1}^i \dots f_{pn}^i \\
 Q_{t+p+1} & \dots & 0 & f_{p+1,1}^i & f_{p+1,2}^i & \dots & f_{p+1,p}^i & d_{11}^i \dots d_{1p}^i & f_{1,p+1}^{i+1} \dots f_{1n}^{i+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q_{t+n} & \dots & 0 & f_{n1}^i & f_{n2}^i & \dots & f_{np}^i & d_{p1}^i \dots d_{pp}^i & f_{p,p+1}^{i+1} \dots f_{pn}^{i+1} \\
 Q_{t+n+1} & & & & & & & f_{p+1,1}^{i+1} \dots f_{p+1,p}^{i+1} & f_{p+1,p+1}^{i+1} \dots f_{p+1,n}^{i+1} \\
 \vdots & & & 0 & & & & \dots & \dots \\
 Q_{t+n+p} & & & & & & & f_{n1}^{i+1} \dots f_{np}^{i+1} & f_{n,p+1}^{i+1} \dots f_{nn}^{i+1}
 \end{array}$$

gdzie $d_{iq}^i = f_{iq}^{i+1} + f_{i+p,q+p}^i$ ($t, q = 1, 2, \dots, p$).

Eliminując metodą Jordana [7] p pierwszych niewiadomych z tego fragmentu otrzymamy:

$$\begin{array}{cccccccc}
 Q_t^* & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & f_{1,p+1}^{i*} \dots f_{1n}^{i*} \\
 Q_{t+1}^* & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & f_{2,p+1}^{i*} \dots f_{2n}^{i*} & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q_{t+p}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & f_{p,p+1}^{i*} \dots f_{pn}^{i*} \\
 Q_{t+p+1}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{11}^{i*} \dots d_{1p}^{i*} & f_{1,p+1}^{i+1} \dots f_{1n}^{i+1} \\
 Q_{t+p+2}^* & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{21}^{i*} \dots d_{2p}^{i*} & f_{2,p+1}^{i+1} \dots f_{2n}^{i+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 Q_{t+n}^* & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{p1}^{i*} \dots d_{pp}^{i*} & f_{p,p+1}^{i+1} \dots f_{pn}^{i+1} \\
 Q_{t+n+1} & & & & & & & f_{p+1,1}^{i+1} \dots f_{p+1,p}^{i+1} & f_{p+1,p+1}^{i+1} \dots f_{p+1,n}^{i+1} \\
 \vdots & & & & & & & 0 & \dots \\
 Q_{t+n+p} & & & & & & & f_{n1}^{i+1} \dots f_{np}^{i+1} & f_{n,p+1}^{i+1} \dots f_{nn}^{i+1}
 \end{array}$$

(Symbolem * oznaczono te elementy, które ulegają zmianie w procesie eliminacji niewiadomych układu).

W ten sposób po wykonaniu l etapów zostaną wyeliminowane wszystkie niewiadome za wyjątkiem λ . Wyliczając niewiadome w kolejności $\Delta \tilde{q}_N^m, \Delta \tilde{q}_{N-1}^m, \dots, \Delta \tilde{q}_2^m$ wyrazimy je wszystkie jako funkcje liniowe λ , a następnie po wyliczeniu λ z pierwszego równania otrzymamy rozwiązanie Δq^{m+1} układu (2.4). Zwróćmy uwagę na fakt, że układy (2.3) i (2.4) są rozwiązywane dużą ilością razy (dla każdego punktu na ścieżce wielokrotnie), wobec tego szybkie i numerycznie stabilne metody rozwiązywania takich układów mają istotne znaczenie dla całego procesu obliczeń. Autorowi nieznane są efektywniejsze niż opisane wyżej metody rozwiązywania tego typu układów. Korzystanie z wzoru (2.1) jest w tym przypadku niewskazane, ze względu na to, że przy odwracaniu macierzy zatracają się ich strukturę przedstawioną na rysunkach 2 i 3.

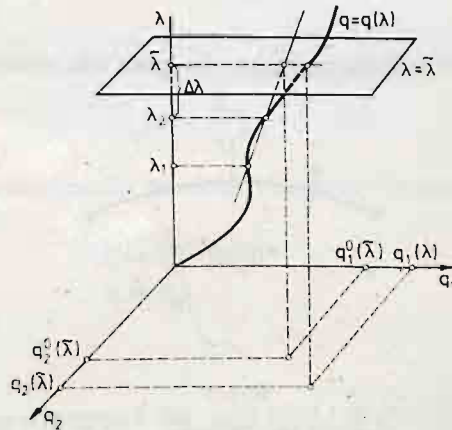
3. Obliczanie przybliżeń początkowych

Punkty na ścieżce równowagi oblicza się w ten sposób, że po rozwiązaniu układu (1.11) dla $\lambda = \tilde{\lambda}$ (lub dla $q_r = \tilde{q}_r$) przechodzi się do rozwiązania tego układu dla $\lambda = \tilde{\lambda} + \Delta\lambda$ ($q_r = \tilde{q}_r + \Delta q_r$) metodą (2.3) lub (2.4). W każdym z tych przypadków należy wybrać przybliżenie początkowe q^0 (lub q^0). Jak wiadomo, w metodzie Newtona-Raphsona bardzo istotne znaczenie ma właściwy wybór przybliżenia początkowego. Jeśli np. za przybliżenie początkowe dla $\lambda = \tilde{\lambda} + \Delta\lambda$ przyjmiemy $q^0 = q(\tilde{\lambda})$, to w przypadkach dużych przyrostów przemieszczeń znajdzie konieczność zmniejszenia $\Delta\lambda$ (co wydłuża czas obliczeń) gdyż w przeciwnym razie można otrzymać proces iteracyjny rozbieżny bądź ominąć część krzywej na ścieżce równowagi. Analogiczna sytuacja występuje w przypadku sterowania parametrem q_r . Dobre rezultaty daje następujący sposób obliczania przybliżeń początkowych: założmy, że mamy rozwiązania $q(\lambda_1)$ i $q(\lambda_2)$ dla dwóch parametrów λ_1 i λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) (w początkowej części ścieżki dla λ bliskich zeru rozwiązania takie otrzymuje się łatwo). Wówczas dla $\tilde{\lambda} = \lambda_2 + \Delta\lambda$ przybliżenie $q^0(\tilde{\lambda})$ otrzymuje się z wzorów

$$(3.1) \quad q_j^0(\tilde{\lambda}) = q_j(\lambda_2) + \Delta\lambda \frac{q_j(\lambda_2) - q_j(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

dla $j = 1, 2, \dots, N$.

Analogiczny wzór na przybliżenie początkowe wektora $\tilde{q}^0(q_r)$ można podać w przypadku sterowania składową q_r (wystarczy zamienić λ z q_r). Wzór (3.1) stanowi liniową ekstrapolację rozwiązania dla znanych dwóch poprzednich rozwiązań na ścieżce równowagi, a jego geometryczną interpretację w przypadku $N = 2$ przedstawia rys. 4.



Rys. 4

Oczywiście można podać wzory ekstrapolacyjne wyższych stopni, jednakże liczne przykłady obliczeń dla powłok obrotowych wskazują na wystarczająco dobre przybliżenia rozwiązań wg (3.1).

Mnożąc skalarnie stronami równanie (1.11) przez wektor Q , otrzymamy

$$(3.2) \quad \lambda = \frac{\langle Kq + R(q), Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle},$$

gdzie symbol $\langle \dots \rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów. Oznacza to, że jeśli q jest rozwiązaniem układu (1.11), to odpowiadająca mu wartość parametru λ wyraża się wzorem (3.2). W przypadku sterowania składową q_r , dla zadanego $\Delta\lambda$ oblicza się wielkości q_j^0 wg wzoru (3.1), a następnie przybliżenie początkowe $\tilde{\lambda}^0$ niewiadomej λ wg (3.2), wstawiając w miejsce q wektor q^0 .

4. Przykłady obliczeń ścieżek równowagi dla powłok obrotowych

W rozdziale tym podamy przykłady obliczeń dla powłok obrotowych. Wszystkie one liczone były na EMC Odra 1204. Obliczenia związane z całkowaniem numerycznym macierzy sztywności, składaniem macierzy, uwzględnianiem warunków brzegowych itp. wykonuje się przy pomocy metod opisanych szczegółowo w [2].

Wzory (2.3) i (2.4) opisują proces iteracyjny, który należy zakończyć, gdy osiągnięto zadaną dokładność obliczeń składowych wektora Δq (lub $\Delta \tilde{q}$). Najczęściej jako kryterium dokładności obliczeń przyjmuje się spełnienie przez kolejne wektory Δq^{m-1} i Δq^m relacji

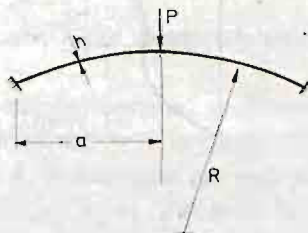
$$(4.1) \quad \|\Delta q^m - \Delta q^{m-1}\| < \varepsilon,$$

gdzie ε — zadana liczba dodatnia, a symbol $\|q\|$ oznacza normę wektora $q = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T$. We wszystkich przykładach przyjęto normę

$$(4.2) \quad \|q\| = \max_{1 \leq i \leq N} |q_i|$$

oraz $\varepsilon = 10^{-6}$.

Przykład 1. Małowyniosła powłoka sferyczna obciążona siłą skupioną w wierzchołku (rys. 5).



Rys. 5

Dane: $R = 4,76$ m

$E = 2 \cdot 10^5$ N/mm²

$a = 0,9$ m

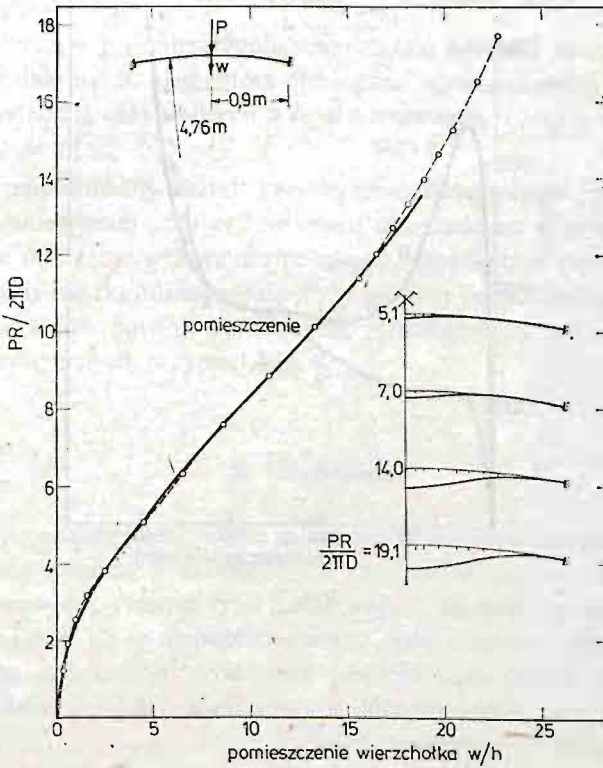
$\nu = \frac{1}{3}$

$H = 85,89$ mm

$h = 4,637$ mm

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}$ — sztywność zgięciowa powłoki.

Na rys. 6 przedstawiono przemieszczenie wierzchołka powłoki otrzymane przy podziale na 10 równych elementów. Linią ciągłą zaznaczono rozwiązanie otrzymane w pracy [1]. Ze względu na brak wierzchołków, takie przykłady rozwiązuje się łatwo, bez konieczności zamiany parametru sterującego. Każdy punkt na ścieżce obliczono wykonując 3 - 4 iteracje wg wzoru (2.3) i przybliżenia początkowego (3.1).



Rys. 6

Przykład 2. Małowyniosła powłoka sferyczna obciążona pierścieniowo.

Liczba elementów — 10.

Dane: $R = 4,758 \text{ in}$

$E = 10^7 \text{ lb/in}^2$

$a = 0,9 \text{ in}$

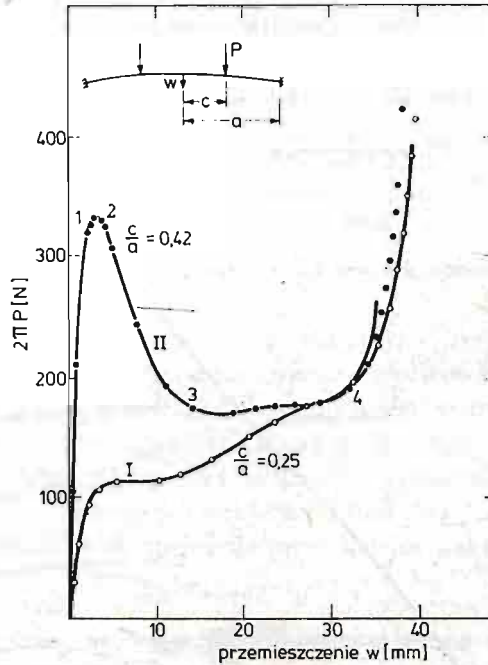
$\nu = 0,3$

$H = 0,08589 \text{ in}$

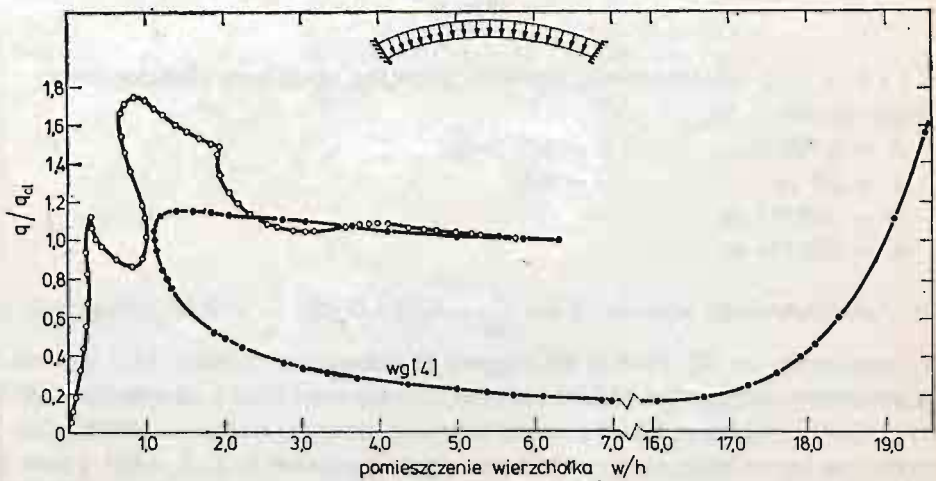
$h = 0,01576 \text{ in}$

Na rys. 7 przedstawiono wykresy: I dla $\frac{c}{a} = 0,25$ i II dla $\frac{c}{a} = 0,42$. Linią ciągłą zaznaczono rozwiązanie wg [6]. Punkty na krzywej II zaznaczone cyframi 1, 2, 3, 4 oznaczają zmianę parametru sterującego. Odcinki krzywej między punktami 1 - 2 oraz 3 - 4 obliczono wg wzoru (2.4) przyjmując jako parametr sterujący przemieszczenie w wierzchołku. Charakterystyczną cechą obliczeń przy zbliżaniu się do punktów 1, 2, 3, 4 był wzrost liczby iteracji potrzebnych do obliczeń przemieszczeń z dokładnością (4.1). W programie istnieje

możliwość automatycznej zmiany sterowania jeśli liczba iteracji przekracza zadaną wartość lub małym przyrostom parametru odpowiadają duże przyrosty przemieszczeń (oznacza to np. możliwość pominięcia odcinka 2-4 na krzywej II, rys. 7).



Rys. 7



Rys. 8

Przykład 3. Małowyniosła powłoka sferyczna obciążona równomiernie.

$$\text{Dane: } R = 202 \text{ mm} \quad E = 2 \cdot 10^{+5} \text{ N/mm}^2$$

$$a = 40 \text{ mm}$$

$$H = 4 \text{ mm}$$

$$h = 0,4096 \text{ mm}$$

$$\nu = \frac{1}{3}$$

$$q_{ct} = \frac{2}{3(1-\nu^2)^{1/2}} \frac{Eh^2}{R^2} = 1,007 \text{ N/mm}^2 \text{ — klasyczne obciążenie krytyczne.}$$

Na rys. 8 przedstawiono przemieszczenie wierzchołka powłoki przy podziale na 10 elementów. Przy podziale na 20 elementów otrzymano wyniki niewiele różniące się (na rysunku nierozróżnialne), a czas obliczeń wzrósł dwukrotnie. Linią ciągłą zaznaczono rozwiązania uzyskane w pracy [4].

Ze względu na skomplikowany kształt krzywej przedstawionej na rys. 8 jest to przykład dość trudny do numerycznej analizy i wymaga doświadczeń w prowadzeniu tego typu obliczeń. Jednakże umiejętne wykorzystanie metod opisanych w punktach 2 i 3 pozwala liczyć takie przykłady z dużą dokładnością. Przy pomocy opracowanego programu liczono szereg innych przykładów powłok obrotowych, jednakże tutaj zamieszczono wyniki najbardziej charakterystycznych przypadków.

5. Uzupelnienie

W uzupełnieniu podamy podstawowe zależności i równania algorytmu obliczeń powłok obrotowych metodą elementów skończonych, przy założeniu, że powłoka poddana jest obciążeniom osiowosymetrycznym typu „martwego”. Bardziej szczegółowe opracowanie tych zagadnień znajduje się w niepublikowanych opracowaniach [8].

Niech tworząca powierzchni środkowej powłoki dana będzie równaniem $r = r(z)$, $z \in [z_1, z_{N+1}]$. Podział powłoki na elementy skończone jest dokonywany przez ustalenie ciągu wartości z_1, z_2, \dots, z_{N+1} . W ten sposób otrzymuje się element skończony jako stożek o krzywoliniowej tworzącej $r = r(z)$, $z \in [z_i, z_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, N$. W celu otrzymania zależności na poziomie elementu, wprowadza się lokalną parametryzację łukową tworzącej

$$(5.1) \quad s(z) = \int_{z_1}^z \alpha_z dz, \quad \alpha_z^2 = \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + 1, \quad s \in [0, L_i],$$

gdzie L_i jest długością tworzącej i -tego elementu. Dla przypadku obciążenia osiowosymetrycznego pole przemieszczeń powierzchni środkowej powłoki jest funkcją zmiennej s , $\tilde{u} = \tilde{u}(s)$. Składową styczną i składową normalną tego pola oznaczmy odpowiednio przez u i w . Energia potencjalna powłoki jest sumą energii sprężystej U i energii potencjalnej V obciążenia

$$(5.2) \quad P(\tilde{u}) = U(\tilde{u}) + V(\tilde{u}).$$

W dalszym ciągu zakładając będziemy, że powłoka jest cienka, materiał powłoki jest jednorodny i izotropowy, a odkształcenia w powłoce są małe. Wówczas energia sprężysta wy-

nosi

$$(5.3) \quad U(\bar{u}) = \pi \int \{C(\epsilon_s^2 + \epsilon_\theta^2 + 2\nu\epsilon_s\epsilon_\theta) + D(\kappa_s^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu\kappa_s\kappa_\theta)\} r ds,$$

$$(5.4) \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

gdzie h oznacza grubość powłoki, E i ν są odpowiednio modułem sprężystości i współczynnikiem Poissona.

Ograniczając się do teorii powłok Sandersa-Koitera, związki między odkształceniami i przemieszczeniami mają postać

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \epsilon_s &= \epsilon_s + \frac{1}{2} \beta_s^2, \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta, \\ \kappa_s &= -\beta_s, \\ \kappa_\theta &= -\frac{\sin \Phi}{r} \beta_s', \quad ()' = \frac{d}{ds} () \end{aligned}$$

gdzie liniowe odkształcenia błonowe oraz parametr obrotu wyrażają się przez przemieszczenia następująco:

$$(5.6) \quad \epsilon_s = u' - \Phi' w, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} (\sin \Phi u + \cos \Phi w), \quad \beta_s = w' + \Phi' u.$$

Na podstawie związków (5.5) energię sprężystą (5.3) można zapisać w postaci

$$(5.7) \quad U = U_L + U_{NL},$$

gdzie

$$(5.8) \quad U_L = \pi \int \{C(\epsilon_s^2 + \epsilon_\theta^2 + 2\nu\epsilon_s\epsilon_\theta) + D(\kappa_s^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu\kappa_s\kappa_\theta)\} r ds,$$

$$(5.9) \quad U_{NL} = \pi \int C \left\{ (\epsilon_s + \nu\epsilon_\theta) \beta_s^2 + \frac{1}{4} \beta_s^4 \right\} r ds.$$

Oznaczając przez $q(i)$ p składowe normalną i styczną obciążenia powierzchniowego, energia potencjalna tego obciążenia wynosi

$$(5.10) \quad V(\bar{u}) = -2\pi \int (pu + qw) r ds.$$

Definiując wektor przemieszczeń węzłowych elementu

$$(5.11) \quad \{q_e\}^T = [u_i, u_i', w_i, \beta_{s1}, u_{i+1}, u_{i+1}', w_{i+1}, \beta_{s,i+1}]$$

oraz przyjmując wielomianową aproksymację składowych przemieszczenia wewnątrz elementu

$$(5.12) \quad \begin{aligned} u(s) &= \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3, \\ w(s) &= \alpha_5 + \alpha_6 s + \alpha_7 s^2 + \alpha_8 s^3, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$(5.13) \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [P][A] \{q_e\},$$

gdzie macierz $[P]$ zależy tylko od parametru s , a macierz $[A]$ zależy tylko od parametrów geometrycznych elementu. Korzystając teraz z (5.13) można wyrazić liniowe odkształcenia oraz parametr obrotu przez wektor przemieszczeń węzłowych elementu

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = [B_1][A] \{q_e\}, \\ \{\varkappa\} &= \begin{Bmatrix} \varkappa_s \\ \varkappa_\theta \end{Bmatrix} = [B_2][A] \{q_e\}, \\ \beta_s &= [b][A] \{q_e\}. \end{aligned}$$

Równania równowagi elementu otrzymane z warunku stacjonarności energii potencjalnej mają postać

$$(5.15) \quad [K] \{q_e\} = \{Q_e\} - \{Q_e^*(\{q\}_e)\},$$

gdzie macierz sztywności elementu $[K]$, wektor obciążeń węzłowych $\{Q_e\}$ oraz tzw. wektor pseudo-sił $\{Q_e^*\}$ wyznacza się wykorzystując zależności (5.13) i (5.14) oraz postać energii sprężystej (5.7), (5.8) i (5.9) i energii potencjalnej obciążenia (5.10):

$$(5.16) \quad [K] = [A]^T 2\pi \int_0^{L_i} ([B_1]^T [C][B_1] + [B_2]^T [D][B_2]) r ds [A],$$

$$(5.17) \quad \{Q_e\} = [A]^T 2\pi \int_0^{L_i} [P]^T \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} r ds,$$

$$(5.18) \quad \{Q_e^*\} = [A]^T \pi \int_0^{L_i} C \left\{ \beta_s^2 [B_1]^T \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \end{bmatrix} + (2(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta) \beta_s + \beta_s^3) \cdot [b]^T \right\} r ds.$$

We wzorze (5.16) macierz $[C]$ i $[D]$ są zdefiniowane następująco:

$$(5.19) \quad [C] = C \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad [D] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując teraz postać (5.18) wektora pseudo-sił możemy wyznaczyć macierz $\frac{\partial \{Q_e\}}{\partial q}$ elementu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{Q_e\}}{\partial q} &= [A]^T \pi \int_0^{L_i} C \left\{ 2\beta_s \left([B_1]^T \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \end{bmatrix} [b] + [b]^T \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} [B_1] \right) + \right. \\ &\quad \left. + (2(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_\theta) + 3\beta_s^2) [b]^T [b] \right\} r ds [A]. \end{aligned}$$

Literatura cytowana w tekście

1. J. R. FITCH, *The buckling and post-buckling behavior of spherical caps under concentrated load*, Int. J. Solids Struct., vol. 4 (1968), 421 - 446.
2. J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, *Obliczenia numeryczne powłok obrotowych metodą elementów skończonych*, PWN, Warszawa-Wrocław 1978.
3. Z. KASPERSKI, *The solution of a certain linear equation system*, Applicationes Mathematicae., XVI, 2 (1978).
4. J. MESCOLL, *Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution*, AIAA J., vol. 4 (1966), 2041 - 2043.
5. Z. WASZCZYŹYŃ, *Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych*, Wykłady Konferencji Szkoleniowej, Janowice 1980.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, The 3rd ed., Mc Graw-Hill Book Co. Limited 1977.
7. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN Warszawa 1976.
8. J. GOŁAŚ i inni, *Numeryczne rozwiązanie powłok obrotowych w oparciu o liniową i geometrycznie nieliniową teorię powłok sprężystych oraz metodę elementów skończonych*, prace w ramach problemu węzłowego 05.12, Zakład Mechaniki Konstrukcji WSI w Opolu

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ РАВНОВЕСИЯ В СЛУЧАЕ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

В работе представлен численный метод исследования точек равновесия в случае одномерных упругих систем. Примерами таких систем являются стержни (арки) или оболочки вращения, нагруженные осесимметрично. Предполагается, что система нагружена консервативно и описывается скалярным параметром λ .

Метод решения нелинейных систем уравнений равновесия использует все свойства матриц, которые появляются во время решения задачи методом конечных элементов. Достоинством метода является также и то, что время вычислений на ЭВМ меняется приблизительно линейно в зависимости от количества конечных элементов конструкции. Статья содержит ряд численных примеров, касающихся оболочек вращения, а основные сведения о дискретизации оболочки поданы в Приложении.

Summary

NUMERICAL CALCULATION OF THE NON-LINEAR EQUILIBRIUM PATHS OF THE ONE-DIMENSIONAL ELASTIC SYSTEMS

A method of calculation of the equilibrium states of the onedimensional elastic systems like rods (arches) and shells of revolution under axisymmetric loading is presented. It is assumed that loads are conservative and intensity of loads is characterized by single parameter λ . The solution method of the non-linear equilibrium equations utilizes all properties of matrices is stable and less time consuming. The main feature of this method is that computation time approximately grows linearly with the number of finite elements. Numerical examples of shells of revolution and basic relations are presented.