MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2/3, 21 (1983)

KSZTAŁTOWANIE PŁASKICH USTROJÓW NOŚNYCH O NAJWIĘKSZEJ SZTYWNOŚCI[1)]

JÓZEF KAPŁANEK
Politechnika Gliwicka

1. Wstęp

Współczesne projektowanie powinno uwzględniać aspekt optymalizacji konstrukcji z uwagi na spełnienie określonych kryteriów. Wymogi natury technicznej często formułuje się w postaci kryteriów wyrównanego wytężenia lub największej sztywności. Optymalizację prowadzi się najczęściej na zadanym szkielecie geometrycznym konstrukcji. Przez szkielet geometryczny rozumie się tu układ osi podłużnych prętów stanowiących o konfiguracji połączeń węzłów prętowego ustroju nośnego, a w przypadku tarcz powierzchnię środkową ograniczoną przez jej kontur. O ile dla kratownic można znaleźć prace, w których poszukuje się optymalnego szkieletu geometrycznygo [3], o tyle w układach ramowych w szczególności hiperstatycznych prace ograniczają się do poszukiwania optymalnych przekrojów poprzecznych pozostawiając na ogół dobór konfiguracji prętów intuicji konstruktora. W przypadku tarcz zagadnienie wymaga opisu w kategoriach teorii sprężystości. Wynikłe stąd trudności analityczne najczęściej pokonuje się na drodze rozwiązań numerycznych [2, 3, 8]. Ogólne sformułowanie problemu optymalizacyjnego dla zagadnień płaskich prowadzi do równania różniczkowego czwartego rzędu o pochodnych cząstkowych [3, 8]. Równanie takie zawiera dwie niewiadome: funkcję naprężeń oraz zmienną grubość tarczy. Formułując dodatkowe równanie wynikające z przyjętego kryterium optymalizacji otrzymuje się układ równań, którego ogólne rozwiązanie nie jest znane.

Odrębnym zagadnieniem jest dobór metody optymalizacji. Ogólnie można stwierdzić, że nie ma dotychczas metody uniwersalnej nadającej się do rozwiązywania szerokiej klasy zagadnień optymalizacyjnych.

2. Sformułowanie problemu

W pracy rozważa się optymalizację płaskich ustrojów ze względu na spełnienie kryterium największej sztywności przy założonej stałej objętości tworzywa. Pod pojęciem płaskich ustrojów należy rozumieć tu szeroką klasę płaskich układów zarówno prętowych, jak i tarczowych.

[1)] Praca jest częścią rozprawy doktorskiej przygotowanej pod kierunkiem prof. dr inż. Antoniego Jakubowicza

Przy niezmiennym układzie obciążeń i więzów sztywność ustroju można mierzyć pracą sił na przemieszczeniach równoważną energii sprężystej.

Problem optymalizacji płaskich ustrojów można wówczas sformułować następująco:

znaleźć zbiór grubości $x_i \in X$

wyznaczający postać ustroju płaskiego $UP_j \subset UP$

przy stałej objętości $V = \text{const}$

taki, by:

energia sprężysta $U = \text{MIN}\,(U_j)$.

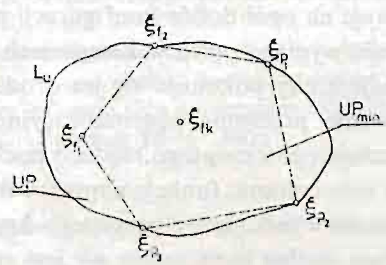
Należy zauważyć, że w wyniku zerowania się niektórych elementów zbioru X może zmieniać się kontur tarczy UP.

W szczególności istnieje możliwość przejścia z początkowego na ogół jednospójnego obszaru UP do obszaru wielospójnego.

3. Metoda rozwiązania

Przeprowadzona analiza różnych metod rozwiązania problemu na gruncie teorii sprężystości wskazuje, że najbardziej efektywną jest tu metoda przemieszczeń [1]. W związku z tym rozwiązania poszukuje się na drodze numerycznej wprowadzając do opisu dyskretyzację ośrodka ciągłego, a w konsekwencji wykorzystanie metody elementów skończonych [10].

Płaski ustrój dany jest w postaci zbioru geometrycznego UP ograniczonego początkowym konturem L_u (rys. 1).



Rys. 1

Zbiór ten musi zawierać punkty ξ_f, w których skupione jest obciążenie zewnętrzne oraz punkty ξ_p, gdzie na ustrój narzucono więzy geometryczne. Wnętrze konturu L_u wypełniono elementami skończonymi. Każdemu elementowi można przyporządkować pewną zmienną grubość ustroju w tym elemencie. Dla tak zadanego zbioru geometrycznego określa się zbiór obciążeń, zbiór więzów oraz zbiór własności tworzywa traktując je jako niezmienne. Zbiór geometryczny elementów może być w czasie kształtowania modyfikowany tak, by zachować jego stałą objętość. Celem tych przekształceń jest uzyskanie ustroju nośnego o największej sztywności.

Kształtowanie można prowadzić w skończonej n-wymiarowej przestrzeni R^n, w której każdej osi przyporządkowano zmienne grubości poszczególnych elementów skończonych. Zmienne te tworzą wektor grubości $\{X\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Każdy punkt przestrzeni optymalizacyjnej przedstawia określony ustrój płaski, zaś każdy wektor $\{X\}$ zawierający się w dopuszczalnym obszarze tej przestrzeni przedstawia tarczę utworzoną przez zbiór elementów skończonych stanowiących rozwiązanie dopuszczalne.

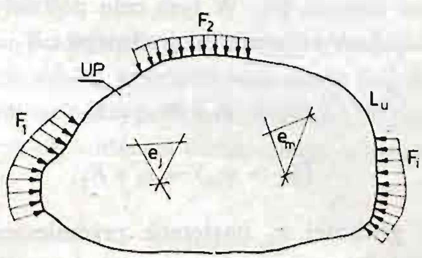
Dla porównania poszczególnych wektorów $\{X\}$ wprowadzono funkcję celu w postaci energii sprężystej jako sumę energii sprężystej elementów skończonych:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i. \tag{1}$$

Miarą tak określonej funkcji celu może być potencjał sprężysty:

$$\psi = \frac{U}{V}. \tag{2}$$

Dla spełnienia kryterium kształtowania zastosowano twierdzenie Wasiutyńskiego o wyrównanym potencjale sprężystym [9].



Rys. 2.

Załóżmy istnienie w ustroju takich dwóch elementów e_j i e_m (rys. 2), w których potencjały jednostkowe ψ_j i ψ_m są różne i ponadto

$$\psi_j > \psi_m. \tag{3}$$

Ujęcie w elemencie „m" małej objętości tworzywa ΔV spowoduje w tym elemencie wzrost energii sprężystej

$$\Delta U_m = \frac{1}{2} \psi_m \Delta V, \tag{4}$$

zaś dodanie tej samej objętości do elementu „j" spowoduje spadek energii sprężystej w tym elemencie

$$\Delta U_j = -\frac{1}{2} \psi_j \Delta V. \tag{5}$$

Całkowita zmiana energii sprężystej w ustroju będzie sumą zmian w tych elementach

$$\Delta U = \Delta U_j + \Delta U_m = -\frac{1}{2} (\psi_j - \psi_m) \Delta V, \tag{6}$$

a więc jest ujemna z założenia

$$\Delta U < 0. \tag{7}$$

Ustrój płaski złożony z n elementów skończonych osiągnie minimum energii sprężystej wówczas, gdy potencjały sprężyste wszystkich elementów będą wyrównane.

Dla zadanego układu obciążeń i więzów nałożonych na tarczę określono metodą elementów skończonych składowe przemieszczeń w_{ij} oraz sił f_{ij} poszczególnych węzłów. Stanowi to podstawę obliczenia potencjału sprężystego elementu

$$\psi_i = \frac{1}{V_i}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6} w_{ij} f_{ij}, \tag{8}$$

jak i potencjału średniego całego ustroju płaskiego

$$\psi_{śr} = \frac{1}{V}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{6} w_{ij} f_{ij}. \tag{9}$$

Przejście do ustroju nośnego o niższym stanie energetycznym odbywa się przez modyfikację grubości x_i poszczególnych elementów skończonych przy równoczesnym zachowaniu warunku stałej objętości ustroju [6]. W tym celu podzielono wszystkie elementy na dwa podzbiory: E_1 o potencjałach niższych od średniego i E_2 o potencjałach wyższych od średniego

$$\begin{aligned} &\bigwedge_{e_i} (\psi_i < \psi_{śr}) \Rightarrow e_i \in E_1, \\ &\bigwedge_{e_k} (\psi_k > \psi_{śr}) \Rightarrow e_k \in E_2. \end{aligned} \tag{10}$$

W trakcie modyfikacji grubości x_i następuje przemieszczenie tworzywa ze zbioru E_1 do zbioru E_2. Ten iteracyjny proces może odbywać się według zależności

$$\begin{aligned} &\bigwedge_{e_i} e_i \in E_1 \Rightarrow x_i^{(r+1)} = x^{(r)} - h^{(r)} \\ &\bigwedge_{k} e_k \in E_2 \Rightarrow x_k^{(r+1)} = \frac{\psi_k^{(r)} - \psi_{śr}^{(r)}}{\Delta\psi^{(r)}} \frac{\Delta V^{(r)}}{A_k} + x_k^{(r)} \\ &\Delta\psi^{(r)} = \sum_{k=1}^{m} (\psi_k^{(r)} - \psi_{śr}^{(r)}), \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie:

r — numer iteracji,

$h^{(r)}$ — zmiana grubości r-tej iteracji,

$\Delta V^{(r)}$ — sumaryczna objętość tworzywa przekazywana w r-tej iteracji ze zbioru E_1 do E_2,

A_k — pole powierzchni k-tego elementu.

Proces ten przebiega aż do osiągnięcia żądanej dokładności różnicy ekstremalnych potencjałów sprężystych.

Efektem takiego kształtowania jest tarcza o zmiennej grubości. Rozkład grubości tarczy w wielu przypadkach pozwala wyznaczyć optymalny szkielet geometryczny płaskiej konstrukcji prętowej. Wymaga to wprowadzenia dodatkowego warunku w wyniku zastosowania którego, eliminuje się elementy o grubościach mniejszych od założonej grubości minimalnej. Uzyskuje się wówczas kontur tarczy na ogół wielospójny. Stanowi on wytyczną określenia poszukiwanego szkieletu geometrycznego konstrukcji prętowej [5, 6, 7].

4. Związek kryterium kształtowania na największą sztywność z kryterium kształtowania według wyrównanych wytężeń

Chcąc porównywać kształtowanie na największą sztywność z kształtowaniem na wyrównany stan wytężenia należy przyjąć w obu działaniach optymalizacyjnych te same ograniczenia. Dotyczą one niezmienności objętości ustroju. Optymalizacja ze względu na wyrównany stan wytężenia odbywać się może w identyczny sposób jak w opisanej metodzie przez przemieszczenie tworzywa w obrębie określonego konturu początkowego. Mimo analogicznego sposobu kształtowania nie zawsze musi prowadzić to do konstrukcji takich samych. Kształt płaskiego ustroju o wyrównanym stanie wytężenia uzależniony jest od rodzaju tworzywa oraz od przyjętej hipotezy wytężeniowej. Zbieżność obu kryteriów wystąpi wówczas, gdy jako miarę wytężenia σ_{red} przyjmie się potencjał sprężysty ψ co ma miejsce w hipotezie Beltramiego [4].

$$\sigma_{red} = \sqrt{2E\psi}, \tag{12}$$

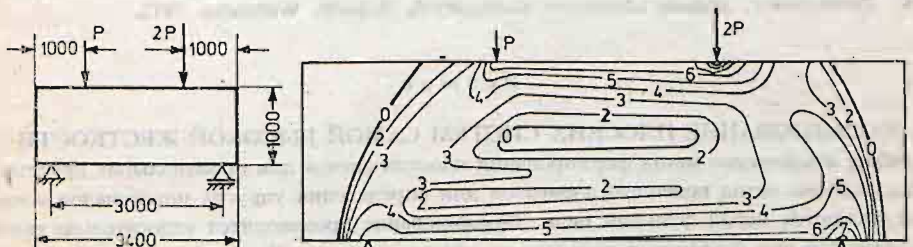
gdzie:

E — moduł sprężystości podłużnej.

Dla tworzyw, w których miarą wytężenia nie może być jednostkowy potencjał sprężysty, zbieżność taka w ogólnym przypadku nie istnieje. W przypadku płaskich zagadnień rozbieżności są jednak z punktu widzenia technicznego nieznaczne.

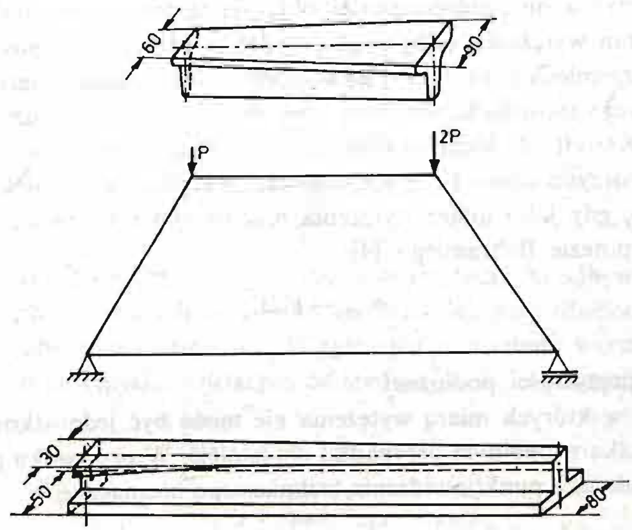
5. Przykład

Tarcza o wymiarach 3,4×1,0 m i początkowej stałej grubości h = 30 mm podparta jest w dwóch punktach i obciążona siłami P = 10 kN i $2P$ = 20 kN jak pokazano na rysunku 3. W wyniku kształtowania na największą sztywność uzyskano kształt tarczy przedstawiony warstwicami grubości (rys. 3). Kształtowanie pozwoliło obniżyć całkowitą energię sprężystą układu z wartości U_0 = 11,3 Nm do U_k = 5,6 Nm oraz zmniejszyć różnicę ekstremalnych potencjałów sprężystych z $\Delta\psi_0$ = 0,78 N/m² do $\Delta\psi_k$ = 0,04 N/m². Maksymalna różnica naprężeń redukowanych w układzie o stałej grubości wynosi $\Delta\sigma^0_{red}$ = = 31,28 MPa, zaś w układzie końcowym $\Delta\sigma^k_{red}$ = 7,69 MPa. Rozkład masy tworzywa w tarczy przedstawionej na rysunku 3 pozwala wnioskować o szkielecie geometrycznym ewentualnego ustroju prętowego. Szkielet ten złożony z cztrech prętów sztywno połączo-



Rys. 3.

nych przedstawia rysunek 4. Ponadto rozkład warstwic grubości pozwala wnioskować o wstępnej postaci geometrycznej dwóch równoległych pasów nośnych. Tak określony teoretyczny ustrój prętowy może podlegać dalszej optymalizacji na gruncie teorii prętów, w szczególności w celu określenia ich wymiarów przekrojów poprzecznych.



Rys. 4.

Literatura cytowana w tekście

1. A. Borkowski, *Programowanie matematyczne w analizie i optymalizacji konstrukcji*, Mechanika i Komputer, 3, 1980.
2. A M. Brandt, *Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji*, PWN, Warszawa 1977.
3. A. M. Brandt, *Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych*, PWN, Warszawa 1978.
4. M. M. Fiłonienko-Borodicz, *Mechaničeskie teorii pročnosti*, Izd. Mosk. Uniw., 1961.
5. A. Jakubowicz, J. Kapłanek, *Metoda doboru szkieletu geometrycznego płaskich ustrojów prętowych*, Sympozjon „Modelowanie w mechanice", Wisła 1983.
6. A. Jakubowicz, J. Kapałnek, *Shaping of disks with regard to highast stiffness*, 4-th Seminar about finite element method and variational method, Plzeň 1981.
7. J. Kapłanek, *Rozprawa doktorska*, Politechnika Śląska 1981.
8. S. Łukasiewicz, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
9. Z. Wasiutyński, *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, Akad. Nauk Techn., Warszawa 1939.
10. O. C. Zienkiewicz, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Р е з ю м е

ФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ СИСТЕМ САМОЙ ВЫСОКОЙ ЖЕСТКОСТИ

В работе предложено метод формирования плоских систем для произвольных краевых условий. Использован метод конечных элементов для определения упругих потенциалов элементов, которые являются мерой функции цели. Формирование производится относительно самой высокой жесткости при сохранении неизменного объема системы. При этом использован критерий Васютинского о сравненным упругом потенциале. Исключая элементы, которых толщины являются маленькими — получаем контур стержневой системы.

Summary

SHAPING OF DISCS WITH RESPECT TO MAXIMUM STIFFNESS

A method for geometric shaping of planar beam structure for arbitrary boundary conditions has been described. The finite element method has been used and the elastic potentials of elements which were a measure of objective function have been defined. Beam shaping with respect to maximum stiffness with invariable structure volume has beeb carried out.

Wasiutyński's criterion of the comparative elastic potential has been used. By elimination of elements of small thickness a profile of beam structure can by obtained.

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1983 roku