MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 20 (1982)

POLA SPRZĘŻONE I NIEKLASYCZNE OŚRODKI CIĄGŁE

DOMINIK ROGULA

IPPT PAN
Warszawa

1. Wstęp

Inspiracją badań naukowych rozważanych w niniejszej pracy była refleksja nad podstawowymi problemami mechaniki ciał deformowalnych i jej związkami z innymi zjawiskami fizycznymi. Podstawowe pojęcia mechaniki ośrodków ciągłych, w postaci odpowiedniej do opisu deformowalnych ciał stałych były prawie całkowicie sformułowane w pierwszej połowie XIX wieku, a ściślej w latach 1820 - 1840, w historycznych pracach Naviera, Cauchy'ego i Greena. Pojęcia te do dnia dzisiejszego stanowią podstawę mechaniki ciał odkształcalnych i jej ogromnych osiągnięć w pobudzaniu i kształtowaniu ludzkiej działalności technologicznej. Idee te okazały się tak żywotne, że przez półtora wieku były i pozostają nadal bogatym źródłem inspiracji w stosowanych gałęziach mechaniki.

Sytuacja taka jest dla naukowców niekwestionowanym powodem do satysfakcji. Z wyjątkiem może elektrodynamiki Maxwella, trudno byłoby znaleźć teorię naukową o porównywalnych osiągnięciach praktycznych.

Z drugiej jednak strony sytuacja ta była powodem do nie zawsze łatwego do odparcia zarzutu pewnej stagnacji w mechanice, przynajmniej jeśli chodzi o jej głębszy rozwój. Bez wątpienia można dowodzić, że mechanika klasyczna daje sobie radę w prawie wszystkich praktycznie interesujących problemach mechanicznych, nie jest więc usprawiedliwione ani pogłębianie jej rozwoju, ani rewolucjonizowanie podstaw, jako że takie próby będą przypominały przysłowiowe szukanie dziury w całym. Obrona taka jednakże nie wytrzymała próby historii. We wczesnych latach sześćdziesiątych pojawiła się fala prac przedstawiających nowe idee w dziedzinie mechaniki ośrodków materialnych. Zrewolucjonizowały one podstawy mechaniki ośrodków ciągłych i odsłoniły perspektywy dalszego rozwoju i poszerzenia zakresu jej zastosowań. Idee te pojawiły się niezależnie w wielu ośrodkach naukowych całego świata, w tym również i Polski. Udział polskiej nauki związany jest w przeważającej części albo z profesorem Nowackim osobiście, albo z jego uczniami, a większość tych prac dotyczyła problemów sprzężonych pól mechanicznych, termicznych i elektromagnetycznych i (lub) nieklasycznych modeli ośrodków materialnych ze wzbogaconą strukturą kinematyczną lub dynamiczną. Czytelnikowi głębiej zaintere-

Referat wygłoszony na zebraniu Komitetu Mechaniki PAN z okazji 70-lecia profesora Witolda Nowackiego.

sowanemu tą problematyką radzimy sięgnąć do monografii Nowackiego [1 - 5] i podanej w nich literatury.

2. Klasyczny ośrodek ciągły.

Wprawdzie interesujemy się tutaj nieklasyczną, uogólnioną teorią ośrodków ciągłych, przedstawimy jednak krótko podstawowe założenia klasycznej mechaniki kontinuów. Będziemy się dalej na nie powoływali. Zamierzeniem danego tu sformułowania założeń jest przedstawienie idei stanowiących podstawową architekturę mechaniki ośrodków ciągłych, bez wdawania się w szczegóły czy formalizację.

1. Podstawowe założenie kinematyczne: ciało materialne jest ciągłym zbiorem bezstrukturalnych obiektów zachowujących się jak punkty materialne.

Kinematyka ciała jest w pełni określona przez funkcję

$$x : B \times T \to E, \tag{2.1}$$

gdzie B, T i E przedstawiają odpowiednio materialny ośrodek ciągły, czas fizyczny i przestrzeń fizyczną. Odwzorowanie to przedstawia konfigurację ciała w funkcji czasu.

2. Podstawowe założenia dynamiczne: oddziaływania wewnętrzne w materii są w każdej chwili jednoznacznie określone przez pole symetrycznego tensora naprężeń. Dokładniej mówiąc jest to czteropoziomowa hierarchia następujących stwierdzeń:

(i) istnieją tylko oddziaływania kontaktowe,
(ii) oddziaływania te są dane przez wektory sił,
(iii) wektory sił są określone przez tensor naprężeń,
(iv) tensor naprężeń jest symetryczny.

Mówiąc bardziej szczegółowo znaczenie założenia (i) polega na dopuszczeniu tylko „dwuciałowych" lub „binarnych" wzajemnych oddziaływań pomiędzy nieskończenie bliskimi cząstkami materialnymi. Przy tym założeniu ma sens pojęcie „oddziaływania przez element powierzchni". O oddziaływaniu przez rozłączone obszary powierzchni zakłada się, że jest addytywne.

Zgodnie z założeniem (iii) siły oddziaływania działającego przez elementy powierzchni mogą być wyprowadzone z wektora p_l danego wzorem:

$$p_k = \sigma_{lk} n_l, \tag{2.2}$$

gdzie tensor naprężeń σ_{lk} nie zależy od elementu powierzchni. W szczególności oznacza to, że wektor naprężeń p_l zależy od wektora normalnego n_k. Założenie (iv) mówi, że od oddziaływań między cząstkami nie może pochodzić żaden moment sił działający na cząstkę.

3. Podstawowe założenie konstytutywne: tensor naprężeń w punkcie materialnym X może być całkowicie określony na podstawie tensora deformacji w tym samym punkcie.

Opierając się na powyższych założeniach mechanika ośrodków ciągłych osiągnęła wiele sukcesów w rozwiązywaniu rozmaitych problemów. Jednak w wielu okolicznościach niektóre z tych założeń są całkowicie lub częściowo naruszone. Można tu przytoczyć następujące przykłady: Koncentracje naprężeń w pobliżu mikrodefektów, drgania o wysokiej częstotliwości i bardzo małej fali, efektywne własności kompozytów i innych materiałów posiadających mezostrukturę, materiały makromolekularne, oddziaływanie z polem elektromagnetycznym poprzez silną polaryzację elektryczną lub magnetyczną itd.

Efektem szeregu prób usunięcia tych braków teorii klasycznej było powstanie wielu uogólnionych, nieklasycznych modeli ośrodków materialnych.

Autorzy kierowali się różnymi koncepcjami. Wiele z nich, jak np. oddziaływania przez momenty kontaktowe lub siły nielokalne, czy też uogólniona kinematyka z dodatkowymi stopniami swobody może być wyprowadzone z klasycznych prac Cauchy'ego, Voigta, i Duhema.

3. Nieklasyczne ośrodki ciągłe

Dopuszczając pewną swobodę wyrażeń, przez nieklasyczny ośrodek ciągły będziemy rozumieć matematyczny model ciała materialnego, który narusza (lub przynajmniej nie w pełni honoruje) jedno lub więcej założeń klasycznych, pozostawiając jednakże ideę ciągłego rozkładu materii. Zależnie od rodzaju i stopnia naruszania tych założeń powstają różne nieklasyczne teorie materialnych ośrodków ciągłych.

1. Założenie kinematyczne można naruszyć przez obdarzenie ośrodka rodzajem struktury lokalnej definiowanej dla każdej cząstki ciała. Struktura taka, a priori niezależna od konfiguracji (2.1), do przedstawienia stanu kinematycznego ciała wymaga pewnych dodatkowych definiowanych nad nim pól. Ze względu na dodatkowe wynikające z takiej struktury stopnie swobody pole wektora przemieszczeń nie wystarcza już do tego celu. Przez specyfikację określonych struktur lokalnych można otrzymać różne teorie nieklasyczne.

W znanej pracy COSSERATÓW [6] każdy punkt materialnego ośrodka ciągłego został wyposażony w sztywną prostokątną triadę, której osie zależą od punktu materialnego i mogą zmieniać się w czasie, definiując w ten sposób lokalną strukturę z dodatkowymi stopniami swobody typu rotacyjnego.

We współczesnej historii problemu niektórzy autorzy, kierowani ideami fizycznymi, wyprowadzili nieklasyczne ośrodki ciągłe takie jak ciecz wirująca WAYSSENHOFFA i RAABE'EGO [7] lub ciecz cząsteczek dwuatomowych ŻELAZNEGO [8].

Z fenomenologicznego punktu widzenia najprostsza fizycznie spójna struktura lokalna polega na przyjęciu mikrorotacji, niezależnych od lokalnych rotacji pochodzących od pola przemieszczeń. Idea ta prowadzi do tzw. teorii mikropolarnej, omówionej szerzej w następnym rozdziale.

Następnym krokiem w uogólnieniu kinematyki materialnego ośrodka ciągłego jest dopuszczenie deformowalnej mikrostruktury, w przeciwieństwie do sztywnej mikrostruktury w teorii mikropolarnej. Tutaj najlepiej znane są: teoria multipolarna Greena i Rivlina [9] oraz Toupina teoria kontinuum obdarzonego dowolnym układem wektorów kierunkowych [10].

Dalsze uogólnienie polega na traktowaniu cząstek materialnego ośrodka ciągłego jako oddzielnych mikrokontinuów, niezależnych kinematycznie od przemieszczeń w zwykłym makro-poziomie kontinuum. Na takiej idei oparta jest mikromorficzna teoria ERINGENA i SUHUBI'EGO [1]. Przy takim podejściu każdy punkt materialnego kontinuum posiada nieskończenie wiele lokalnych stopni swobody. Jednakże często trzeba ograniczyć mikrokontinuum do skończonej wartości liczbę lokalnych stopni swobody, co efektywnie redukuje ten przypadek do poprzedniego.

Ogólnie, stan wzbogaconej struktury kinematycznej materialnego kontinuum może być przedstawiony przez funkcję o następującej postaci

$$\chi: B \to E \times Y \tag{3.1}$$

gdzie Y oznacza odpowiednią przestrzeń struktury lokalnej. Chociaż w najprostszych przypadkach Y jest przestrzenią wektorową, w ogólności założenie takie nie jest konieczne. Nawet więcej: istnieje wiele fizycznie uzasadnionych przykładów przestrzeni struktur lokalnych które nie mogą być wyposażone w sensowną strukturę wektorową, jak świadczą o tym przykłady skończonych rotacji, nasyconego spinu czy przestrzeń sieci Bravaisa rozważana w pracy [12].

2. Najprostsza możliwa modyfikacja założenia dynamicznego polega na odrzuceniu stwierdzenia (iv) przy pozostawieniu trzech poprzednich (i - iii). Tym sposobem dopuszcza się niesymetryczne tensory naprężeń. Podejście takie, na gruncie czysto mechanicznym proponował BODASZEWSKI [66]. Bardziej konsekwentne wydaje się jednak wprowadzenie asymetrycznego tensora naprężeń przez połączenie tej modyfikacji z inną, kinematyczną lub konstytutywną.

Następna modyfikacja mogłaby polegać na odrzuceniu stwierdzenia (iii), przy pozostawieniu (i - ii). W tym kierunku nie wykonywano jednak żadnych badań. Idea ta może prowadzić do zależnego od krzywizny przenoszenia sił przez elementy powierzchni.

Jeśli bowiem założy się, że przekazywanie sił nie zależy od zakrzywienia, wtedy przy pomocy podręcznikowych argumentów wnioskuje się, że zależność przekazywanej siły od wektora normalnego do elementu powierzchni jest liniowa. W konsekwencji powinien istnieć tensor naprężeń i założenie (iii) byłoby spełnione.

Przy modyfikacji stwierdzenia (ii) można stworzyć wiele nieklasycznych modeli ośrodków ciągłych. Najprostsza modyfikacja tego typu polega na pozostawieniu założenia (i) i modyfikacji (ii) przez dopuszczenie, oprócz oddziaływania przez wektory sił, dodatkowych oddziaływań przez wektory momentów sił. Prowadzi to do tzw. teorii n a p r ę ż e ń m o m e n t o w y c h. Zgodnie z tą teorią oddziaływania kontaktowe pochodzą od ogólniejszego stanu naprężeń, który może być opisany przez dwa pola tensorów: zwykły tensor naprężeń siłowych σ_{ik} i dodatkowy tensor naprężeń momentowych μ_{ik}.

Wektor naprężeń momentowych dany jest wzorem

$$m_l = \mu_{kl} n_k, \tag{3.2}$$

a tensor μ_{kl} wchodzi do bilansu momentu pędu. Ani σ_{ik}, ani μ_{ik} nie muszą być symetryczne.

Wprowadzone powyżej dodatkowe oddziaływania mogą być założone w sposób ogólniejszy. Można mianowicie wprowadzać h i p e r n a p r ę ż e n i a coraz wyższych rzędów, opisujących nieklasyczne oddziaływania przez multipole sił wyższych rzędów. Jako przykład można wskazać teorię TOUPINA [10], nieprostych materiałów z hipernaprężeniami najniższego rzędu.

Hipernaprężenia w węższym sensie definiują oddziaływania kontaktowe, które nie wchodzą bezpośrednio do bilansu sił i pędów. Jednakże zawsze wchodzą one do bilansu energii.

Również stwierdzenie (i) może być modyfikowane. Daje to pewien rodzaj nielokalnych dynamicznie modeli typu całkowego [14, 15].

3. Klasyczne założenie konstytutywne również może być naruszane w sposób różny. Można je modyfikować przez branie tensora naprężeń zależnego nie tylko od tensora deformacji, ale również od jego gradientu, lub nawet gradientów wyższych rzędów. W teoriach ze strukturą lokalną w odpowiednich związkach konstytutywnych mogą również pojawiać się odpowiednie dodatkowe stopnie swobody, jak np. w sprężystości mikropolarnej. Można również założyć, że tensor naprężeń zależy od temperatury i/lub pola elektromagnetycznego, co prowadzi do teorii pól sprzężonych. Nie mniej ważna jest możliwość odrzucenia zasady lokalności zawartej w klasycznym założeniu konstytutywnym, przez przyjęcie, że tensor naprężeń w punkcie X zależy od sytuacji w punkcie Y położonym w skończonej odległości od X. W ten sposób otrzymano modele kontinuum z nielokalnym związkiem naprężeń z odkształceniami [16 - 19].

4. Możliwe, a czasem nawet konieczne są również odpowiednie kombinacje powyższych modyfikacji, z należytym wszakże uwzględnieniem ich wzajemnych zależności. Następne rozdziały będą poświęcone kilku przykładom.

4. Ośrodki mikropolarne

Jak wspomnieliśmy poprzednio pomysł ośrodka mikropolarnego był wynikiem dopuszczenia lokalnie sztywnej mikrostruktury z niezależnymi mikro-rotacyjnymi stopniami swobody. Oznacza to, że klasyczne założenie kinematyczne zmodyfikowano przez wprowadzenie zamiast (2.1) następującej postaci funkcji

$$x \times \vartheta \colon B \times T \to E \times \vartheta, \tag{4.1}$$

gdzie ϑ przedstawia przestrzeń mikrorotacji. Element tej przestrzeni może być reprezentowany matematycznie jako t r i e d r e t r i r e c t a n g l e Cosseratów, sztywna triada Toupina, czy macierz ortogonalna, lub inny równoważny sposób. W liniowej teorii mikropolarnej naturalne jest zastąpienie przestrzeni skończonych mikrorotacji ϑ przez liniową, trójwymiarową przestrzeń wektorową, której elementy reprezentują infinitezymalne mikrorotacje. W rozdziale tym ograniczymy się do przypadku liniowego. Wektor mikrorotacji będzie oznaczony przez φ_i, a odpowiedni moment bezwładności (dla uproszczenia założono izotropowość) przez J.

Aby istniało oddziaływanie między mikrorotacjami w różnych punktach konieczne jest wprowadzenie pola przedstawiającego przekazywanie odpowiednich sił uogólnionych. Najprostszym rozwiązaniem są tutaj naprężenia momentowe. Podobnie, aby zapewnić oddziaływanie między mikrorotacjami, a polem przemieszczenia, konieczna jest antysymetryczna część tensora naprężeń. Aby otrzymać nietrywialną teorię trzeba więc modyfikację (4.1) założenia kinematycznego uzupełnić przez odpowiednie modyfikacje założenia dynamicznego.

Przy tych założeniach bilanse pędu i momentu pędu przybierają postać

$$\begin{aligned} \sigma_{ji,j} + X_i &= \varrho \ddot{u}_i, \\ \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i &= J\ddot{\varphi}_i, \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdzie μ_{ji}, Y_i, i φ_i oznaczają odpowiednio tensor naprężeń momentowych, momenty masowe i infinitezymalne mikrorotacje.

W przypadku liniowego izotropowego sprężystego ośrodka mikropolarnego gęstość energii sprężystości może być wyrażona jako

$$U = \mu\gamma_{(ij)}\gamma_{(ij)}+\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}\gamma_{\langle ij\rangle}+\frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn}+\gamma\varkappa_{(ij)}\varkappa_{(ij)}+\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle}\varkappa_{\langle ij\rangle}+\frac{\beta}{2}\varkappa_{ii}\varkappa_{jj}, \tag{4.3}$$

gdzie wprowadzono następujące skróty:

$$\begin{aligned} \gamma_{ji} &= u_{i,j}-\varepsilon_{kji}\varphi_k, \\ \varkappa_{ji} &= \varphi_{i,j}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \sigma_{(ij)} &= 2\mu\gamma_{(ij)}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \sigma_{\langle ij\rangle} &= 2\alpha\gamma_{\langle ij\rangle}, \\ \mu_{(ij)} &= 2\gamma\varkappa_{(ij)}+\beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{\langle ij\rangle} &= 2\varepsilon\varkappa_{\langle ij\rangle}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

i podstawieniu tych wyrażeń do (4.2), otrzymuje się następujący układ równań dla pól przemieszczeń i mikrorotacji

$$(\mu+\alpha)\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{X} = \varrho\ddot{\boldsymbol{u}}, \tag{4.6}$$

$$(\gamma+\varepsilon)\nabla^2\boldsymbol{\varphi}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}+2\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{u}-4\alpha\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{Y} = J\ddot{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{4.7}$$

Układ ten stanowi podstawę do formułowania i rozwiązywania szczegółowych problemów teorii mikropolarnej. Wiele z nich zostało już rozwiązanych lub w pełni zbadanych, jak podstawowe związki, twierdzenia wariacyjne, równania naprężeniowe, potencjały uogólnione, różne problemy statyczne i dynamiczne, powstawanie i rozchodzenie się fal, warunki promieniowania, jednoznaczność rozwiązań i inne [3, 4, 20 - 38]. Badany był również przypadek związanych mikrorotacji [39]; skonstruowano uogólnienia włączające efekty cieplne [40 - 46], pola elektromagnetyczne [47 - 53] i defekty [54 - 56].

5. Pola sprzężone. Magneto-termo-sprężystość

Rozwój dziedziny pól sprzężonych w ośrodkach materialnych motywowany jest podstawowymi przesłankami. Z jednej strony wzajemna zależność między zjawiskami w przyrodzie jest zasadniczym problemem wiedzy ludzkiej, z drugiej strony związki między zjawiskami cieplnymi i mechanicznymi, lub mechanicznymi i elektromagnetycznymi stanowią fundament nowoczesnej technologii. Wiele szczególnych zjawisk z dziedziny pól sprzężonych jest znanych w przyrodzie i wykorzystywanych w technice. Można tu wymienić magnetohydrodynamikę (pompa metalu ciekłego, generator MHD), zjawisko piezoelektryczne, elektro- i magnetostrykcję, magnetoakustykę, zjawiska elektro-akustyczne, wzmacniacze elektromechaniczne, efekt żyromagnetyczny i wiele innych.

Jako przykład rozważmy dziedzinę znaną jako magneto-termosprężystość [57 - 62, 5], w przypadku stałego ośrodka o skończonym przewodnictwie elektrycznym λ_0 w pierwotnym polu magnetycznym $\boldsymbol{H}$. Zlinearyzowane równania pola przybierają postać

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\mu_0}{c}\frac{\partial h}{\partial t}, &&\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0,\\
(5.1)\qquad &\mathrm{rot}\boldsymbol{h} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, &&\mathrm{div}\boldsymbol{h} = 0.
\end{aligned}
$$

gdzie $\boldsymbol{h}$ oznacza zaburzenie pola magnetycznego (całkowite natężenie pola magnetycznego jest równe $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{h}$). Dla gęstości prądu elektrycznego otrzymuje się następujące wyrażenie

$$
\boldsymbol{j} = \lambda_0\left[\boldsymbol{E}+\frac{\mu_0}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\times \boldsymbol{H}\right)\right],
$$

Równanie ruchu ma ogólną postać

$$
\sigma_{ji,j}+T_{ji,j}+X_i = \varrho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{5.2}
$$

gdzie tensor T_{ij} przedstawia dodatkowe naprężenia pochodzenia elektromagnetycznego. Może on być przedstawiony przez zlinearyzowane wyrażenie Maxwella

$$
T_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(H_i h_j+H_j h_i-\delta_{ij}H_k h_k\right). \tag{5.3}
$$

Po wyeliminowaniu z powyższego równania pola elektrycznego i po wzięciu pod uwagę przewodzenia ciepła dochodzi się do następującego układu równań

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\boldsymbol{h}-\beta\dot{\boldsymbol{h}} = -\beta\,\mathrm{rot}(\dot{\boldsymbol{u}}\times \boldsymbol{H}),\\
(5.4)\qquad &\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}-\varrho\ddot{\boldsymbol{u}}+\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{rot}(\boldsymbol{h}\times \boldsymbol{H})+\boldsymbol{X} = \gamma\,\mathrm{grad}\Theta,\\
&k\nabla^2\Theta-c_\varepsilon\dot{\Theta}-\eta\,\mathrm{div}\dot{\boldsymbol{u}} = -W,
\end{aligned}
$$

gdzie współczynniki przedstawiają stałe materiałowe. Ten układ równań może być uogólniony dla ośrodka mikropolarnego przez wprowadzenie mikrorotacji. Podobnie dla ośrodków polaryzowanych elektrycznie lub magnetycznie. Szczególnie ciekawa sytuacja powstaje, gdy wektor polaryzacji lub magnetyzacji jest kinematycznie niezależny od pola elektromagnetycznego lub makro-ruchu. Wtedy ośrodek jest obdarzony strukturą lokalną bezpośrednio czułą na pole magnetyczne. W przypadku polaryzacji magnetycznej podstawowe równania pól sprzężonych, włączające dynamikę spinów magnetycznych, są wyprowadzone w pracy [63] przez wykorzystanie odpowiednio zmodyfikowanej techniki nawiasów Poissona.

Dla ogólnie nieliniowych równań pól sprzężonych przy włączeniu dowolnej skończenie wymiarowej struktury lokalnej pokazana jest w pracy [64] technika Lagrange'a. W szczególności technika ta jest odpowiednia do rozpatrywania dynamiki polaryzacji elektrycznej.

Oprócz wielu zjawisk wynikających z pojedynczych sprzężeń takich jak wspomniane na początku tego rozdziału, znane są zjawiska związane z bardziej skomplikowanymi układami sprzężeń. Jako przykład możemy podać wzmocnienia ultradźwiękowe w półmetalach [65], gdzie fala ultradźwiękowa przenosi się w skrzyżowanych polach magnetycznym i elektrycznym $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{E}$ w kierunku $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$.

Przy założeniu, że nośniki prądu są sprzężone z falą dźwiękową przez potencjał deformacji wynika wzmocnienie ultradźwięku, pod warunkiem, że

$$Ec > Hs \tag{5.5}$$

gdzie e i s oznaczają odpowiednio prędkość światła i dźwięku. Ilościowo efekt ten jest dość silny: w sprzyjających warunkach może osiągnąć 300 db/cm. Efekt znika gdy nie ma pola elektrycznego lub magnetycznego, albo nośników, albo sprzężenia między falą dźwiękową i nośnikami, lub wreszcie gdy dryf nośników w kierunku $E \times H$ jest słaby. Pouczający jest fakt, że interesujące zjawisko może wynikać z dość skomplikowanego układu pól i sprzężeń.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1962 American edition: Reading, Mass. Addison, Wesley 1962.
2. W. NOWACKI, *Dynamic problems of thermoelasticity*, Nordhof Publ., Leyden 2975 Polish edition: PWN, Warszawa 1966, Russian translation: Mir, Moscow 1970.
3. W. NOWACKI, *Theory of asymmetric elasticity* [in Polish], PWN, Warszawa 1970 [second edition: 1981].
4. W. NOWACKI, *Theory of micropolar elasticity*, CISM, Courses and Lectures, 25, Springer, Wien 1970.
5. W. NOWACKI, *Foundations of linear piezoelectricity*, Magnetoelasticity, in: CISM Courses and Lectures, 257, Elektromagnetic Interactions, in Elastic Solids, Ed. H. Parkus, Springer, Wien—New York 1979.
6. E. COSSERAT, F. COSSERAT, *Theorie des corps deformables*, Hermann 1909.
7. J. W. WEYSSENHOF, A. RAABE, *Relativistic dynamics of spin fluids and spin particles*, Acta Phys. Polon., 9, 1947.
8. R. ŻELAZNY, *Derivation of hydrodynamic equations of quantum system of diatomic molecules*, Phys. Rev., 117, 1, 1960.
9. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Multipolar continuum mechanics*, ARMA, 17, 113, 1964.
10. R. A. TOUPIN, *Theories of elasticity with couple-stress*, ARMA, 17, 85, 1964.
11. A. C. ERINGEN, E. C. SUHUBI, *Nonlinear theory of simple microelastic solids*, I. II, IJES, 2, 189, 389, 1964.
12. D. ROGULA, *Large deformations of crystals, homotopy and defects*, in: Trends in Application of Pure Mathematics to Mechanics, Proc. Conf. Lecce 1975, Ed. G. Fichera, Pitman Publ., London 1976.
13. D. ROGULA, *Continuum models of structured media*, in: Study No 12, Continuous Models of Discrete Systems, Proc. Symp. Mont Gabriel 1977; Ed. J. W. Provan, Univ. of Waterloo Press, 1978.
14. I. A. KUNIN, *Model of simple elastic medium with spatial disperion* [in Russian], Prikl. Math., 30, 542 1966.
15. E. KRÖNER, *Elasticity theory of materials with long-range cohesive forces*, IJSS, 3, 731, 1967.
16. E. KRÖNER, B. K. DATTA, *Nichtlokale Elastostatik*. Ableitung aus der Gittertheorie, Z.F. Physik, 196, 203, 1966.
17. D. G. B. EDELEN, A. E. GREEN, N. LAWS, *Nonlocal continuum mechanics*, ARMA, 43, 36, 1971.
18. A. C. ERINGEN, D. G. B. EDELEN, *On nonlocal elasticity*, IJES, 10, 233, 1972.
19. A. C. ERINGEN, *Nonlocal polar elastic continua*, IJES, 10, 1, 1972.
20. A. C. ERINGEN, *Foundations of micropolar elasticity*, CISM Courses, 23, Springer Verlag 1970.
21. R. STOJANOVIĆ, *Mechanics of polar continua*, CISM Courses, Voline 1970.
22. J. STEFANIAK, *Reflection of a plane longitudinal wave from a free plane in a Cosserat medium*, Arch. Mech., 21, 745, 1969.
23. J. IGNACZAK, *Radiation conditions in asymmetric elasticity*, J. of Elasticity, 2, 307, 1972.

24. J. IGNACZAK, *Theorems of Boggio's type in asymmetric elastodynamics*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 25, 139, 1977.
25. W. NOWACKI, *Plane problems in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. techn., 19, 525, 1971.
26. W. NOWACKI, *Zweidimensionale Probleme der mikropolaren Elastostatik*, Z. Angew. Math. Mech., 52, 268, 1972.
27. W. NOWACKI, *Three-dimensional problem of micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 22, 363, 1974.
28. A. WACHECKA-SKOWRON, *Uniqueness for plane crack problems in micropolar theory of elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 25, 825, 1977.
29. S. MATYSIAK, A. WACHECKA-SKOWRON, *On the uniqueness of some two-dimensional boundary value problems in micropolar theory of elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 25, 845, 1977.
30. S. M. KHAN, R. S. DHALIVAL, *Axisymmetric problem for a halfspace in the micropolar theory of elasticity*, J. Elast., 7, 13, 1977.
31. S. M. KHAN, R. S. DHALIVAL, *Effects due to body-forces and body couples in the interior of micropolar elastic halfspace*, J. Elast., 7, 33, 1977.
32. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Singularity of stresses in a micropolar elastic semi-space due to discontinuous boundary load*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 21, 975, 1973.
33. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Singularity of stresses in a micropolar elastic semi-space due to concentrated load*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 21, 763, 1973.
34. D. IESAN, *The plane micropolar strain of ortotropic elastic solids*, Arch. Mech., 25, 547, 1973.
35. D. IESAN, *On the existence and uniqueness of the solutions of the dynamic theory of the linear elasticity microstructure*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 22, 329, 1974.
36. D. IESAN, *Almansi's problem in micropolar elasticity*, IJES, 12, 361, 1974.
37. D. IESAN, *Torsion of anisotropic micropolar elastic cylinders*, Z. Angew. Math. Mech., 54, 773, 1974
38. D. IESAN, *Saint-Venants problem for inhomogeneous and anisotropic elastic solids with microstructure*, Arch. Mech., 419, 29, 1977.
39. M. SOKOŁOWSKI, *Theory of couple stresses in bodies with constrained relations*, CISM Courses, 26, Udine 1970.
40. W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, Proc. IUTAM Symp. Vienna 1966, Springer Verlag, Wien 1968.
41. A. C. ERINGEN, *Foundations of micropolar thermoelasticity*, CISM Courses, 27, Springer Verlag 1970.
42. J. STEFANIAK, *A generalization of Galerkin's functions for asymmetric thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 16, 391, 1968.
43. W. NOWACKI, *Green functions for micropolar thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn. 16, 11 - 12, 1968.
44. E. RUSU, *On some theorems in a generalized theory of linear micropolar thermoelasticity*, Bull. Inst. Politechn. Iasi, A22, 87, 1976.
45. T. R. TAUCHERT, W. D. CLAUSS Jr., A. ARIMAN, *The linear theory of micropolar thermoelasticity*, IJES, 6, 37, 1968.
46. K. L. CHOWDHURY, P. G. GLOCKNER, *On the matrix method in micropolar thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 23, 511, 1975.
47. W. NOWACKI, *Some problems of micropolar magneto-elasticity*, Proc. Vibr. Probl., 12, 105, 1971.
48. S. KALISKI, *Thermo-magneto-microelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 16, 7, 1968.
49. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Wave-type equations of thermo-magneto-microelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 18, 277, 1970.
50. C. E. POUGH, M. SINGH, *Couple stresses in elastic dielectries*, Indian J. Pure Appl. Math., 5, 530, 1974.
51. Cz. RYMARZ, W. NIEPORĘT, *Micro-structural electrohydrodynamic model of a continuous medium*, J. Techn. Phys., 17, 195, 1976.
52. E. C. ERINGEN, R. C. DIXON, *A dynamical theory of polar elastic dielectrics*, IJES, 3, 359, 1965.
53. R. D. MINDLIN, *A continuum theory of diatomic dielectrics*, IJES, 8, 7, 1972.

54. J. P. NOWACKI, *The linear theory of dislocation in Cosserat elastic continuum*, Bull. Acad. Polon. Aci., Serie Sci. techn., 22, 611, 1974.
55. J. P. NOWACKI, *Theory of disclinations in elastic Cossèrat media*, Arch. Mech., 29, 531, 1977.
56. S. MINAGAWA, *Elastic fields of dislocations and dislocations in a isotropic micropolar continuum*, Lett. Appl. Engng. Sci., 5, 85, 1977.
57. W. NOWACKI, *Two-dimensional problem of magneto-thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 10, 2, 1962.
58. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Combined elastic and electromagnetic waves produced by thermal shock in the case of medium of finite electric conductivity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. techn., 10, 5, 1962.
59. W. NOWACKI, *Problem of linear couple magneto-thermoelasticity I. Energetic theorem and uniqueness theorem of solution, II. Variation theorems*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 13, 4, 6, 1965.
60. W. NOWACKI, *Coupled fields in elasticity*, in: Trends in Applications of Pure Math. to Mechanics, Ed. G. Fischera, Pitman Publ., London 1976.
61. H. PARKUS, *Variational principles in thermo- and magneto-elasticity*, Courses and Lectures, 58, Udine 1970.
62. H. PARKUS, *Magneto-thermoelasticity*, Courses and Lectures, 118, Springer Verlag, Udine, 1972.
63. S. KALISKI, Z. PŁOCHOCKI, D. ROGULA, *Asymmetric stress tensor and the angular momentum comservation law in the equations of combined mechanical and electromagnetic field in a continuous medium*, Proc. Vibr. Probl., 3, 253, 1962.
64. D. ROGULA, *Noether theorem for a continuous medium interacting with external fields*, Proc. Vibr. Probl., 7, 337, 1966.
65. W. P. DUMKE, R. R. HEARING, *Ultrasonic amplification in semimetals*, Phys., Rev., 126, pp. 1974, 1962.
66. S. BODASZEWSKI, *On non-symmetric state of stress and its application in mechanics of continuous media*, Arch. Mech. 5, 351, 1953.