MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 20 (1982)

O ZAGADNIENIU ODWROTNYM DLA RÓWNANIA FALOWEGO

KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

Instytut Mechaniki Technicznej
Politechniki Poznańskiej

Wstęp

Równanie falowe jest w literaturze naukowej chyba najbardziej znanym równaniem. Rozwiązanie tego równania w przypadku jednowymiarowym, gdy $x \in (a, b)$, gdzie a i b są liczbami skończonymi, bądź są równe nieskończoności, są powszechnie znane i opisane (por. [1, 2, 3] i in.). Mało natomiast spotyka się w literaturze rozwiązań tzw. zagadnień odwrotnych dla równania falowego.

Warto tu nadmienić, że samo określenie „zagadnienie odwrotne" jest dosyć niejednoznaczne. I tak np. szkoła radziecka rozumie pod tym hasłem zagadnienia wyznaczania nieznanych, stałych lub zmiennych współczynników równań różniczkowych, [4, 11], bądź funkcji źródła [21, 5] przy znanym rozwiązaniu tych równań, bądź też problem wyznaczania rozwiązania zagadnienia dynamicznego dla $t < t_0$ przy znanym rozwiązaniu w chwili $t = t_0$, [6]. Dla odmiany szkoła amerykańska używa tego określenia w przypadku zagadnień dynamicznych, w których na podstawie znajomości rozwiązania równania różniczkowego jako funkcji czasu w pewnych punktach obszaru określoności tego rozwiązania, poszukuje się warunków brzegowych, które powodują taką właśnie zmienność w czasie rozwiązania w tych punktach (por. [12, 13, 14, 15] i in.). Można zatem z grubsza podzielić zagadnienia odwrotne na zagadnienia identyfikacji funkcji źródła, zagadnienia identyfikacji współczynników, zagadnienia odtwarzania historii procesu oraz zagadnienia identyfikacji obciążeń brzegu obszaru. Zwykłe zagadnienia brzegowo-początkowe nazywane są — w odróżnieniu od wspomnianych wyżej — zagadnieniami prostymi lub bezpośrednimi.

Rozważania na temat zagadnień odwrotnych dla równania falowego spotyka się w literaturze radzieckiej, (np. [7, 8, 21]), są to jednakże głównie zagadnienia identyfikacji współczynników lub funkcji źródła bądź zagadnienia odtwarzania historii procesu. Natomiast brak jest prac traktujących o identyfikacji obciążeń brzegu obszaru, w którym rozważa się zagadnienie propagacji fal. O takim właśnie zagadnieniu traktuje niniejsza praca.

Problem identyfikacji dynamicznych obciążeń brzegu sprowadza się w niniejszej pracy do zagadnienia rozwiązania równań całkowych pierwszego rodzaju, typu splotowego, [9]. Zagadnienia tego typu należą do tzw. zagadnień źle postawionych, [10]. W pracy pokazany jest sposób rozwiązania tego typu zagadnienia w przypadku równania falowego.

Podano również ograniczenia, których spełnienie warunkuje otrzymanie rozwiązania stabilnego w sensie TICHONOWA, [10].

1. Sformułowanie problemu

Rozważmy jednowymiarowe zagadnienie propagacji fal w ośrodku sprężystym. Równanie rozchodzenia się fali ma w tym wypadku analogiczną postać jak np. równanie struny, czy np. równanie rozchodzenia się dźwięku. Jest to mianowicie równanie hiperboliczne. Dynamiczne obciążenie brzegu obszaru oznacza w przypadku ośrodka sprężystego zadanie zmiennych w czasie przemieszczeń czy obciążeń siłowych na brzegu, podczas gdy np. w przypadku struny skończonej będzie to zadane, zmienne w czasie przemieszczenie końców struny.

Rozważany w pracy problem będziemy — dla ustalenia uwagi — utożsamiać z problemem drgań struny ograniczonej. Tym niemniej otrzymane wyniki będą funkcjonowały i dla innych zagadnień fizycznych, o ile tylko zespół równań i warunków opisujących te zagadnienia będzie się pokrywał z zespołem związków podanych niżej.

Niech w stanie niewymuszonym struna pokrywa się z osią Ox. Wychylenie struny będziemy charakteryzowali przesunięciem $u(x, t)$ punktu x w chwili t, prostopadłym do osi Ox. Przyjmiemy, że napięcie p struny jest stałe, podobnie jak i jej gęstość liniowa ϱ. Niech $f_1(x, t)$ oznacza rzut na oś Ou siły działającej na jednostkę długości struny. Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe $\xi = x/l$, gdzie l jest długością struny, oraz $\tau = t\sqrt{p}/(l\sqrt{\varrho})$, możemy opisać drgania struny równaniem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u(\xi, \tau) = f(\xi, \tau), \tag{1.1}$$

gdzie $f(\xi, \tau) = f_1(\xi, \tau) l^2/p$. O funkcji $f(\xi, \tau)$ zakładamy, iż jest funkcją lokalnie sumowalną [3] ze względu na obie zmienne. Przyjmujemy, że w chwili początkowej przemieszczenia i prędkości punktów struny są znanymi funkcjami zmiennej ξ. Ponadto zakładamy, że zadane są przemieszczenia końców struny jako funkcje czasu. Prowadzi to do warunków

$$\begin{aligned} u(\xi, 0) &= p_0(\xi), \\ \left.\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} &= p_1(\xi), \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie $p_i(\xi) \in C(0, 1)$, $i = 0, 1$, oraz

$$\begin{aligned} u(0, \tau) &= u_d(\tau), \\ u(1, \tau) &= u_g(\tau). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Równanie (1.1) z warunkami (1.2) i (1.3) stanowi dla rozważanej struny zagadnienie proste (brzegowo-początkowe). Rozwiązanie tego zagadnienia w transformatach Laplace'a ma postać

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, s) = {} & \bar{u}_d(s)\frac{\sinh[s(1-\xi)]}{\sinh s} + \bar{u}_g(s)\frac{\sinh(s\xi)}{\sinh s} - \\ & - \frac{1}{s}\left\{\frac{\sinh(s\xi)}{\sinh s}\int_0^1 g_1(\xi, s)\sinh[s(1-\xi)]d\xi - \int_0^{\xi} g_1(\xi, s)\sinh[s(\xi-x)]dx\right\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Tutaj nadkreślenie oznacza transformatę Laplace'a funkcji, s jest parametrem transformacji, oraz

$$g_1(\xi, s) = \bar{f}(\xi, s) - sp_0(\xi) - p_1(\xi). \tag{1.5}$$

Jeśli przedłużymy funkcje $p_0(\xi)$, $p_1(\xi)$ i $f(\xi, \tau)$ na całą prostą $O\xi$ w ten sposób, że [16]

$$\begin{aligned} p_i(\xi) &= -p_i(-\xi), \quad p_i(\xi+2) = p_i(\xi), \quad i = 0, 1, \\ f(\xi, \tau) &= -f(-\xi, \tau), \quad f(\xi+2, \tau) = f(\xi, \tau), \end{aligned} \tag{1.6}$$

to możemy wówczas przepisać rozwiązanie (1.4) w postaci

$$\bar{u}(\xi, s) = \bar{u}_d(s)\frac{\sinh[s(1-\xi)]}{\sinh s} + \bar{u}_g(s)\frac{\sinh(s\xi)}{\sinh s} + \bar{g}(\xi, s), \tag{1.7}$$

gdzie funkcja $g(\xi, \tau)$, dana wzorem

$$g(\xi, \tau) = \frac{1}{2}[p_0(\xi+\tau) + p_0(\xi-\tau)] + \frac{1}{2}\int\limits_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} p_1(x)dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\xi-(\tau-t)}^{\xi+(\tau-t)} f(x, t)dx dt, \tag{1.8}$$

jest znanym rozwiązaniem d'Alemberta zagadnienia drgań struny ograniczonej o końcach unieruchomionych.

Załóżmy teraz, że znana jest zmienność funkcji $u(\xi, \tau)$ w punktach ξ_1 i ξ_2, gdzie $0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 < 1$. Funkcje

$$u_1(\tau) \equiv u(\xi_1, \tau) \quad \text{oraz} \quad u_2(\tau) \equiv u(\xi_2, \tau), \tag{1.9}$$

nazywać będziemy wewnętrznymi odpowiedziami struny (w skrócie WO) na działanie sił $f(\xi, \tau)$, warunków na brzegach, oraz na warunki początkowe. Funkcje te muszą spełniać warunki zgodności

$$u_1(0) = p_0(\xi_1), \quad u_2(0) = p_0(\xi_2). \tag{1.10}$$

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie funkcji $u_d(\tau)$ i $u_g(\tau)$, opisujących przemieszczenia końców struny, przy znanych WO, oraz przy znanych funkcjach $f(\xi, \tau)$, $p_0(\xi)$ i $p_1(\xi)$.

Zwykle stosowane metody rozwiązywania zagadnień identyfikacji warunków brzegowych (dynamicznych obciążeń brzegu) polegały na rozwiązaniu zagadnienia brzegowo-początkowego dla $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, a następnie na ekstrapolacji tak otrzymanego rozwiązania poza ten przedział (por. [12, 13, 17] i in.). Jak widać, przy takim podejściu WO traktowane są wstępnie jako warunki brzegowe. W pracy niniejszej stosuje się podejście odmienne od wyżej wspomnianego. Punktem wyjścia jest tu związek (1.7).

2. Układ równań typu splotowego

Jeśli znane są funkcje opisujące WO, $u_1(\tau)$ i $u_2(\tau)$, i jeśli są to funkcje typu wykładniczego, [18], to można — na podstawie równania (1.7) — napisać następujący układ równań na transformaty $\bar{u}_d(s)$ i $\bar{u}_g(s)$:

$$\bar{u}_j(s) = u_d(s)\frac{\sinh[s(1-\xi_j)]}{\sinh s} + \bar{u}_g(s)\frac{\sinh(s\xi_j)}{\sinh s} + \bar{g}(\xi_j, s), \quad j = 1, 2. \tag{2.1}$$

Po odwróceniu transformat występujących po obu stronach równań (2.1) otrzymujemy

$$u_j(\tau) = \frac{d}{d\tau}[u_d(\tau)*K_1(\xi_j,\tau)+u_g(\tau)*K_2(\xi_j,\tau)]+g(\xi_j,\tau), \quad j = 1,2, \tag{2.2}$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_1(\xi_j,\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty}\eta(\tau-\xi_j-2n)-\sum_{n=1}^{\infty}\eta(\tau+\xi_j-2n), \\ K_2(\xi_j,\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty}\eta(\tau+\xi_j-2n-1)-\sum_{n=1}^{\infty}\eta(\tau-\xi_j-2n+1). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tu $*$ oznacza mnożenie splotowe, [2, 18], zaś $\eta(x)$ jest funkcją Heaviside'a. Sposób przejścia od równań (2.1) do (2.2) powiązany jest ze specjalną techniką sumowania szeregów trygonometrycznych, którą krótko przedstawiono w Dodatku.

Równania (2.2) stanowią układ równań całkowych typu splotowego, [10]. Ponieważ wyznaczenie poszukiwanych funkcji, $u_d(\tau)$ i $u_g(\tau)$, na podstawie tych równań jest bardzo kłopotliwe, w niniejszej pracy wyznacza się je na podstawie równań (2.1). Jak zatem widać, zamiast równań całkowych rozpatruje się układ równań w postaci przetransformowanej. Natomiast na podstawie związku (2.2), zapisanego dla dowolnego $\xi \in [0,1]$, łatwo jest wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia brzegowo-początkowego. Ma ono postać

$$\begin{aligned} u(\xi,\tau) = &\sum_{n=0}^{\infty}[u_d(\tau-2n-\xi)_+ + u_g(\tau-2n-1+\xi)_+]- \\ &-\sum_{n=1}^{\infty}[u_d(\tau-2n+\xi)_+ + u_g(\tau-2n+1-\xi)_+]+g(\xi,\tau), \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdzie [1]

$$u(x)_+ = \begin{cases} u(x) & \text{gdy } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{gdy } x < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

3. Warunki ograniczające dla funkcji opisujących wewnętrzne odpowiedzi

Traktując układ równań (2.1) w sposób formalny, jak układ dwóch równań algebraicznych z niewiadomymi $\bar{u}_d(s)$ i $\bar{u}_g(s)$, można łatwo je wyznaczyć. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{u}_d(s) &= \frac{\sinh(s\xi_2)}{\sinh(sL)}[\bar{u}_1(s)-\bar{g}(\xi_1,s)]-\frac{\sinh(s\xi_1)}{\sinh(sL)}[\bar{u}_2(s)-\bar{g}(\xi_2,s)], \\ \bar{u}_g(s) &= \frac{\sinh[s(1-\xi_1)]}{\sinh(sL)}[\bar{u}_2(s)-\bar{g}(\xi_2,s)]-\frac{\sinh[s(1-\xi_2)]}{\sinh(sL)}[\bar{u}_1(s)-\bar{g}(\xi_1,s)], \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie $L = \xi_2-\xi_1$.

Widoczne jest, iż nie każda funkcja $u_j(\tau)$ może opisywać WO. Wynika to z faktu, iż ułamki, występujące po prawej stronie wzorów (3.1), są transformatami Laplace'a dystrybucji singularnych, [3]. W ogólności, aby formalne rozwiązanie (3.1) było odwracalne i aby po odwróceniu miało sens fizyczny, muszą być spełnione następujące warunki:

1° WO muszą mieć skończoną granicę dla $\tau \to 0_+$ oraz dla $\tau \to \infty$

2° WO muszą być ograniczone dla $\tau \in [0, \infty)$

3° Transformaty $\bar{u}_d(s)$ i $\bar{u}_g(s)$ muszą być odwracalne w zbiorze funkcji rzeczywistych. Oznacza to, że jeśli pewna funkcja $F(\tau)$ ma opisywać WO, to

$$|\lim_{\tau\to 0+} F(\tau)| = |\lim_{s\to\infty} s\bar{F}(s)| < +\infty, \tag{3.2}$$

$$|\lim_{\tau\to\infty} F(\tau)| = |\lim_{s\to 0} s\bar{F}(s)| < +\infty, \tag{3.3}$$

przy czym zakłada się, że te granice istnieją, oraz

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{\tau\in[0,\infty)} |F(\tau)| < M, \quad M \text{ — stała dodatnia.} \tag{3.4}$$

Ponadto, jeśli $u(\tau)$ jest funkcją opisującą przemieszczenie któregoś końca struny, to z warunku 3° wynika, że musi być spełniony warunek (por. [18], str. 102 i 117)

$$\lim_{s\to\infty} \bar{u}(s) = 0 \quad \text{dla} \quad \mathrm{Re}\, s > x_z + \delta, \quad \delta > 0, \tag{3.5}$$

gdzie $\mathrm{Re}\, s$ oznacza część rzeczywistą liczby zespolonej s, zaś x_z jest odciętą zbieżności funkcji $u(\tau)$. W omawianym przypadku z (3.4) wynika, że $x_z = 0$.

Zamiast warunku (3.5) wykorzystamy warunek silniejszy, związany z odwracaniem transformat metodą residuów. Warunkiem koniecznym odwracalności transformaty metodą residuów jest spełnienie przez nią założeń lematu Jordana, [18]. Wynika stąd, że aby $\bar{F}(s)$ była transformatą, odwracalną metodą residuów, musi istnieć taki ciąg k_n liczb dodatnich, że

$$|\bar{F}(s)|_{|s|=R_n} \leqslant k_n, \tag{3.6}$$

gdzie $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} R_n = +\infty$, a ponadto funkcja $\bar{F}(s)$ musi być ciągła dla $|s| = R_n$, $\mathrm{Re}\, s > x_z$ (w naszym przypadku $\mathrm{Re}\, s > 0$).

Nierówność (3.6) można zapisać w postaci równoważnej, a mianowicie

$$|\bar{F}(s)| \leqslant \frac{K}{|s^\gamma|} \quad \text{dla dużych } |s|, \tag{3.7}$$

gdzie $K, \gamma > 0$, γ — dowolnie mała liczba dodatnia.

W rozważanym przypadku żądanie spełnienia dla dużych $|s|$ nierówności (3.7) przez poszczególne składniki prawych stron wzorów (3.1) prowadzi do następujących ograniczeń na $\bar{u}_j(s)$ oraz $\bar{g}(\xi_j, s)$, $j = 1, 2$:

$$|\bar{u}_j(s) - \bar{g}(\xi_j, s)| \leqslant \frac{K_j}{|s^\gamma|} |e^{-sD_j}|, \quad j = 1, 2, \tag{3.8}$$

gdzie K_1, K_2, γ — stałe dodatnie, $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$, oraz

$$D_1 = \max(\xi_1, 1+\xi_1-2\xi_2), \quad D_2 = \max(1-\xi_2, 2\xi_1-\xi_2). \tag{3.9}$$

W szczególnym przypadku, gdy $\xi_2 > 0.5$ oraz $\xi_1 < 0.5$, otrzymujemy

$$D_1 = \xi_1, \quad D_2 = 1-\xi_2. \tag{3.10}$$

Nierówności (3.8) będą spełnione, jeśli dla $\tau \in [0, D_j]$, $j = 1, 2$, będą miały miejsce następujące związki:

$$u_j(\tau) - \frac{1}{2}\left\{p_0(\xi_j+\tau) + p_0(\xi_j-\tau) + \int\limits_{\xi_j-\tau}^{\xi_j+\tau} p_1(x)dx - \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{\xi_j-(\tau-t)}^{\xi_j+(\tau-t)} f(x,t)dxdt\right\} = 0. \quad (3.11)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, iż dla $\tau = 0$ powyższe równania przechodzą w związki zgodności (1.10).

Równania (3.11) określają związki pomiędzy WO a funkcjami $p_0(\xi)$, $p_1(\xi)$ i $f(\xi, \tau)$ w czasie od chwili początkowej do chwili, w której do punktu, w którym rejestrujemy WO, dotrze zaburzenie, wywołane przez warunki na brzegach. Jest oczywiste, że możliwość identyfikacji funkcji $u_g(\tau)$ i $u_d(\tau)$ na podstawie WO pojawia się dopiero po czasie D_j, jako że dopiero wtedy ujawni się wpływ warunków brzegowych na WO. WO będą zatem opisane funkcjami czasu o przesuniętym argumencie; również w przypadku funkcji g należy rozważać jej wartości tylko dla $\tau > D_j$.

Wobec powyższego transformaty $\bar{u}_j(s)$ oraz $\bar{g}(\xi_j, s)$, $j = 1, 2$, dla których mają sens związki (3.1), muszą mieć taką postać, aby zawartości nawiasów kwadratowych we wspomnianych związkach miały postać

$$\bar{u}_j(s) - \bar{g}(\xi_j, s) = G(s)e^{-sP}, \quad P \geqslant D_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.12)$$

Funkcja $G(s)$ musi spełniać warunek

$$|G(s)| \leqslant K_3|s|^{-\gamma} \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s > x_0 > 0, \quad (3.13)$$

gdzie $K_3 > 0$, $\gamma > 0$. Jeśli dodatkowo $G(s)$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > x_0$ (gdzie x_0 jest dobrane tak, aby spełniona była nierówność (3.8)), to jest ona wtedy transformatą Laplace'a dystrybucji typu wykładniczego (por. [2], str. 309). Jest to szeroka klasa dystrybucji, do której należą m.in. wszystkie funkcje transformowalne.

Gdy WO spełniają ograniczenia podane wyżej, wówczas rozwiązanie jednowymiarowego odwrotnego problemu falowego jest stabilne w sensie Tichonowa (por. [10], str. 40).

4. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia odwrotnego

Do odwrócenia transformat danych wzorami (3.1) wykorzystamy następujące przedstawienie funkcji $\bar{u}_j(s)$ oraz $\bar{g}_j(\xi_j, s)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(s) &= \bar{\tilde{u}}_j(s)e^{-sD_j} + \int\limits_0^{D_j} e^{-s\tau}u_j(\tau)d\tau, \\ \bar{g}(\xi_j, s) &= \bar{\tilde{g}}(\xi_j, s)e^{-sD_j} + \int\limits_0^{D_j} e^{-s\tau}g(\xi_j, \tau)d\tau, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j(\tau) &= u_j(\tau+D_j)\eta(\tau), \\ \tilde{g}(\xi_j, \tau) &= g(\xi_j, \tau+D_j)\eta(\tau), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wobec (4.1) zachodzą — na mocy (3.11) — równości

$$\bar{u}_j(s)-\bar{g}(\xi_j, s) = [\bar{\bar{u}}_j(s)-\bar{\bar{g}}(\xi_j, s)]e^{-sD_j}, \quad j = 1, 2. \tag{4.3}$$

Oczywiście muszą być także spełnione nierówności

$$|\bar{\bar{u}}_j(s)| \leqslant \frac{K_j}{|s^\gamma|}, \quad |\bar{\bar{g}}(\xi_j, s)| \leqslant \frac{K_j}{|s^\gamma|}, \quad j = 1, 2. \tag{4.4}$$

W miejsce równań (3.1) możemy zatem napisać równania

$$\begin{aligned} \bar{u}_d(s) &= \frac{\sinh(s\xi_2)}{\sinh(sL)} e^{-sD_1}[\bar{\bar{u}}_1(s)-\bar{\bar{g}}(\xi_1, s)] - \frac{\sinh(s\xi_1)}{\sinh(sL)} e^{-sD_2}[\bar{\bar{u}}_2(s)-\bar{\bar{g}}(\xi_2, s)], \\ \bar{u}_g(s) &= \frac{\sinh[s(1-\xi_1)]}{\sinh(sL)} e^{-sD_2}[\bar{\bar{u}}_2(s)-\bar{\bar{g}}(\xi_2, s)] - \\ &\quad - \frac{\sinh[s(1-\xi_2)]}{\sinh(sL)} e^{-sD_1}[\bar{\bar{u}}_1(s)-\bar{\bar{g}}(\xi_1, s)]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Odwrócenie transformat danych wzorami (4.5) prowadzi do następujących wyników:

$$\begin{aligned} u_d(\tau) &= \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big\{\sin\frac{\pi n\xi_2}{L}\int_{D_1}^{\tau}\sin\Big[\frac{\pi n}{L}(\tau-t)\Big][u_1(t)- \\ &\quad -g(\xi_1, t)]\,dt - \sin\frac{\pi n\xi_1}{L}\int_{D_2}^{\tau}\sin\Big[\frac{\pi n}{L}(\tau-t)\Big][u_2(t)-g(\xi_2, t)]\,dt\Big\}, \\ u_g(\tau) &= \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big\{\sin\Big[\frac{\pi n}{L}(1-\xi_1)\Big]\int_{D_2}^{\tau}\sin\Big[\frac{\pi n}{L}(\tau-t)\Big]\times \\ &\quad \times[u_2(t)-g(\xi_2, t)]\,dt - \sin\Big[\frac{\pi n}{L}(1-\xi_2)\Big]\int_{D_1}^{\tau}\sin\Big[\frac{\pi n}{L}(\tau-t)\Big][u_1(t)-g(\xi_1, t)]\,dt\Big\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Prawe strony wzorów (4.6) można przedstawić również w innej postaci, posługując się bądź techniką sumowania szeregów trygonometrycznych, przedstawioną w Dodatku, bądź bezpośrednio odwracając transformaty (4.5) na gruncie teorii dystrybucji, [20]. Wykorzystując wzory zawarte w tablicy B.2 cytowanej monografii otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_d(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty}[u_1(\tau+\xi_1-2nL)_+ - g(\xi_1, \tau+\xi_1-2nL)_+ + \\ &\quad + u_2(\tau-\xi_2-2nL)_+ - g(\xi_2, \tau-\xi_2-2nL)_+] - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty}[u_1(\tau-\xi_1-2nL)_+ - g(\xi_1, \tau-\xi_1-2nL)_+ + \\ &\quad + u_2(\tau+\xi_2-2nL)_+ - g(\xi_2, \tau+\xi_2-2nL)_+], \\ u_g(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty}[u_1(\tau-1+\xi_1-2nL)_+ - g(\xi_1, \tau-1+\xi_1-2nL)_+ + \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$+u_2(\tau+1-\xi_2-2nL)_+-g(\xi_2,\tau+1-\xi_2-2nL)_+]-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}[u_1(\tau+1-\xi_1-2nL)_+-g(\xi_1,\tau+1-\xi_1-2nL)_++$$
$$+u_2(\tau-1+\xi_2-2nL)_+-g(\xi_2,\tau-1+\xi_2-2nL)_+].$$

Tutaj

$$g(\xi,t)_+=\begin{cases} g(\xi,t) & \text{gdy } t\geqslant 0,\\ 0 & \text{gdy } t<0.\end{cases}$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że sumy, występujące po prawych stronach wzorów (4.7), są w rzeczywistości sumami skończonymi, gdyż dla każdej chwili czasu τ liczba funkcji, których argument jest dodatni, jest skończona. Jest to cecha wspólna rozwiązań (4.7) oraz (3.4). W przypadku szczególnym, gdy $\xi_1 = 0$, otrzymujemy związek

$$u_d(\tau)=u_1(\tau)-g(0,\tau), \tag{4.8}$$

który koresponduje z (2.4), oraz

$$\begin{aligned} u_g(\tau)=&\sum_{n=0}^{\infty}[u_d(\tau-1-2n\xi_2)_++u_2(\tau+1-(2n+1)\xi_2)_+-\\ &-g(\xi_2,\tau+1-(2n+1)\xi_2)_+]-\sum_{n=1}^{\infty}[u_d(\tau+1-2n\xi_2)_++\\ &+u_2(\tau-1-(2n-1)\xi_2)_+-g(\xi_2,\tau-1-(2n-1)\xi_2)_+]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Podobnie upraszczają się związki (4.7), gdy $\xi_2 = 1$, a $\xi_1 \in (0, 1)$.

5. Inne możliwości stawiania problemu odwrotnego dla równania falowego

W miejsce warunków brzegowych (1.3) można sformułować inne warunki. I tak — w przypadku, gdy równanie falowe opisuje falę podłużną, przemieszczającą się w nieskończonej warstwie sprężystej o grubości l od jednego jej brzegu do drugiego, przy czym fala ta wywołana jest zmiennym w czasie obciążeniem jednego, czy też obu brzegów warstwy, to zamiast warunków (1.3) można sformułować warunki

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}&=S_d(\tau),\\ \left.\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}&=S_g(\tau). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Zagadnienie odwrotne oznaczałoby w tym wypadku problem wyznaczenia funkcji $S_d(\tau)$ i $S_g(\tau)$ na podstawie WO, przy czym te ostatnie mogłyby być zadane zarówno wzorami (1.9) jak i innymi. Jeśli w dwóch punktach wewnętrznych warstwy (o której — jak wynika z powyższych uwag — zakłada się, że jest w jednoosiowym jednowymiarowym stanie naprężenia lub odkształcenia) znane będą funkcje opisujące zmianę w czasie odkształceń, wówczas one właśnie mogą stanowić WO. Oczywiście należy powtórzyć rozumowanie z części 3 pracy w celu ustalenia ograniczeń, jakim podlegałyby tego typu WO.

Możliwe jest również wyznaczenie obciążeń dynamicznych brzegu przy pomocy WO, których charakter jest inny niż charakter tych obciążeń dynamicznych. Na przykład można odtwarzać obciążenie brzegu warstwy przy znanych przemieszczeniach w dwóch punktach wewnętrznych, lub przy znanych funkcjach, opisujących np. zmiany w czasie przemieszczenia i prędkości w jednym punkcie warstwy.

Należy podkreślić, iż niezależnie od rodzaju warunków brzegowych otrzymane rozwiązania odwrotnego problemu falowego mają postać zbliżoną do (4.7).

6. Wnioski

Przedstawiona metoda rozwiązywania zagadnień odwrotnych, dotyczących identyfikacji obciążeń brzegu, może być zastosowana bez zmian do rozwiązywania problemów odwrotnych, w których równanie różniczkowe opisujące zmiany badanej wielkości fizycznej jest typu odmiennego niż hiperboliczny. Jednakże w przypadku równań hiperbolicznych otrzymane rozwiązanie ma postać szczególnie przydatną dla celów eksperymentalnych. Jeśli bowiem znany jest zbiór danych dyskretnych, opisujących odpowiedzi wewnętrzne dwóch punktów wewnętrznych, to odtworzenie zmienności w czasie obciążenia brzegu obszaru jest szczególnie proste. Wystarczy na podstawie tych danych zbudować funkcje, opisujące w sposób przybliżony WO, a następnie wykorzystać wzór (4.7), który idealnie nadaje się do obliczeń numerycznych. W przypadku ciągłego zapisu danych pomiarowych, dotyczących wewnętrznych odpowiedzi, (gdy zapis ten odzwierciedla przebieg pewnego pomiaru), identyfikacja obciążeń brzegu może być niemal natychmiastowa, o ile dane te będą bezpośrednio poddawane obróbce numerycznej wg wzoru (4.7). Oczywiście konieczna jest przy tym znajomość warunków początkowych oraz obciążenia $f(\xi, \tau)$; to ostatnie zwykle jest bądź stałe, bądź pomijalnie małe.

Wydaje się, że przedstawione rozwiązanie jednowymiarowego odwrotnego zagadnienia falowego mogłoby być przydatne wszędzie tam, gdzie zachodzi potrzeba określenia dynamicznego obciążenia brzegu obszaru, w którym można dokonać pomiarów wewnętrznej odpowiedzi, podczas gdy niemożliwy jest bezpośredni pomiar poszukiwanej wielkości na brzegu.

Dodatek

Występujące we wzorze (2.1) ułamki są postaci $\sinh(sx)/\sinh s$. Po pomnożeniu i podzieleniu takiego ułamka przez s otrzymuje się wyrażenie $s\bar{f}(s)$, dla którego można łatwo wyznaczyć retransformatę

$$\mathscr{L}^{-1}(\bar{f}(s))(\tau) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\sinh(sx)}{s\sinh s}\right)(\tau) =$$
$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin[\pi n(\tau + x)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin[\pi n(\tau - x)]. \tag{D.1}$$

Szeregi występujące po prawej stronie wzoru (D.1) mają argumenty funkcji trygonometrycznych spoza przedziału (0, 1), przez co niemożliwe jest bezpośrednie wykorzystanie odpowiednich wzorów sumacyjnych, zawartych np. w pracy [19]. Jednakże wykorzystując związek

$$\sin(\pi n y) = (-1)^{nE(y)} \sin[\pi n (y - E(y))], \tag{D.2}$$

gdzie $E(y)$ jest funkcją o wartościach równych części całkowitej argumentu, można sprowadzić argumenty funkcji występujących po prawej stronie wzoru (D.1) do przedziału (0, 1). Dokonując przejścia granicznego z x do 1 we wzorze (5.3) z pracy [19], oraz wykorzystując (D.2) można wyprowadzić następujący związek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(\pi n y) = -\frac{y}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta(y - 2n - 1), \quad y \in (-1, \infty). \tag{D.3}$$

Podstawienie prawej strony wzoru (D.3) do wzoru (D.1), a następnie wykorzystanie faktu, iż operator s jest transformatą operatora różniczkowego $\partial/\partial\tau$ prowadzi bezpośrednio do wzoru (2.2).

Literatura cytowana w tekście

1. A. N. TICHONOW, A. A. SAMARSKI, *Równania fizyki matematycznej*, PWN Warszawa, 1963.
2. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN Warszawa, 1957.
3. Z. SZMYDT, *Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe*, PWN Warszawa, 1972.
4. A. G. TEMKIN, *Obratnyje metody teploprowodnosti*, Izd. Energia, Moskwa, 1963.
5. M. M. LAVRENTEV, W. G. ROMANOV, W. G. VASILIEV, *Mnogomernyje obratnyje zadači dla differencialnych uravnenii*, Novosybirsk, Izd. Nauka, 1969.
6. M. I. IMANALIEV, *Metody rešenia nelinejnych obratnych zadač i ich priloženia*, Izd. Ilim, Frunze, 1977.
7. M. M. LAVRENTEV, *Ob odnoj obratnoj zadače dla volnovogo uravnenia*, DAN SSSR, **157**, 3, (1964).
8. W. G. ROMANOV, *Nekotoryje obratnyje zadači dla uravnenia giperboličeskogo tipa*, Novosybirsk, Izd. Nauka, 1972.
9. F. D. GACHOV, Ju. I. ČERSKIJ, *Uravnenia tipa svertki*, Izd. Nauka, Moskwa, 1978.
10. A. N. TICHONOV, W. Ja. ARSENIN, *Metody rešenija nekorrektnych zadač*, Izd. Nauka, Moskwa, 1979.
11. H. Ja. BEZNOŠČENKO, A. I. PRILEPKO, *Obratnyje zadači dla uravnenia paraboličeskogo tipa.* w: Problemy matematičeskoj fizyki i vyčislitelnoj matematiki", Izd. Nauka. Moskwa, 1977.
12. E. M. SPARROW, A. HAJI-SHEIKH, T. S. LUNDGREN, *The Inverse Problem in Transient Heat Conduction*, Trans. of the ASME, J. of Applied Mech. **86E**, (1966).
13. M. IMBER, *Temperature Extrapolation Mechanism for Two-Dimensional Heat Flow*, AIAA Journal, **12**, 8, (1974).
14. R. G. HILLS, G. P. MULHOLLAND, *The Accuracy and Resolving Power of One Dimensional Transient Inverse Heat Conduction Theory as Applied to Discrete and Inaccurate Measurements*, Int. J. Heat Mass Transfer, **22**, (1979).
15. J. V. BECK, *Criteria for Comparison of Methods of Solution of the Inverse Heat Conduction Problem*, Nucl. Eng. Design, **53**, (1979).
16. W. M. BABICZ, M. B. KAPILEWICZ, S. G. MICHLIN, G. N. NATANSON, G. M. RIEZ, L. N. SŁOBODECKI, M. M. SMIRNOW, *Równania liniowe fizyki matematycznej*, PWN Warszawa, 1970.
17. M. IMBER, *A Temperature Extrapolation Method for Hollow Cylinder*, AIAA Journal, **11**, 1, (1973).
18. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, 1972.
19. K. GRYSA, J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych występujących w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, Mech. Teoret. Stos., **16**, 3, (1978).
20. A. H. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN Warszawa 1969.
21. A. S. BLAGOVEŠČENSKIJ, *Obratnaja zadača dla volnovogo uravnenia s neizvestnym istočnikom*, w: Problemy matematičeskoj fiziki, vyp. 4, Izd. LGU, 1970.

Р е з ю м е

НЕКОТОРАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В статьи представлена одноразмерна проблема идентификации краевых условии для конечной струны. Преобразование Лапласа решения этой задачи находится на основе решения нагально — краевой задачи пропагации волн. Определяется условия для функции допускаемых для узображения так называемых внутренных ответов, а потом определяется и дискутируется точное решение проблемы.

S u m m a r y

ON AN INVERSE PROBLEM FOR WAVE EQUATION

The one-dimensional problem of a boundary condition identification for a finite cord is considered. Solution of an initial-boundary value problem of the wave propagation is exploited to obtain transformed form of a formal solution of the problem. The conditions imposed on the admissible functions describing so-called internal responses are settled and then the exact solution of the problem is found and discussed.

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 8 września 1981 roku.