MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 20 (1982)

METODA OZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW CHARAKTERYZUJĄCYCH PROCESY OPISANE RÓWNANIEM PARABOLICZNYM

HENRYK KAMIŃSKI (POZNAŃ)

Instytut Mechaniki Technicznej
Politechniki Poznańskiej

1. Wstęp

Wiele procesów występujących w technice i badaniach naukowych jest opisanych równaniami różniczkowymi drugiego rzędu typu parabolicznego:

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} u) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1.1}$$

z warunkiem brzegowym:

$$\vec{n} \cdot \operatorname{grad} u + \alpha(u - u_0) = 0. \tag{1.2}$$

W ogólnym przypadku współczynnik K może być funkcją postaci

$$K = K(P, t), \quad P \in V,$$

a współczynnik α może mieć postać

$$\alpha = \alpha(A, t) \quad A \in V.$$

Tutaj V jest wnętrzem obszaru, w którym przebiega proces, ∂V jest brzegiem tego obszaru, $\vec{n}$ — normalną zewnętrzną do brzegu, u_0 — wielkością, do której odniesione są wartości funkcji u. W dalszej części pracy współczynniki K i α są przyjęte jako stałe. Współczynnik K opisuje przebieg procesu w obszarze ciała, a współczynnik α charakteryzuje zjawiska zachodzące na powierzchni. Znajomość współczynników występujących w opisie matematycznym procesu niezbędna jest do analizy przebiegu procesu. W pracy przedstawiono jedną z możliwych metod wyznaczenia powyższych współczynników. Zazwyczaj stałe takie wyznacza się poprzez pomiar pewnych wielkości na powierzchni próbki lub w jej wnętrzu. Metoda przedstawiona w pracy bazuje na efektach globalnych dających się zmierzyć w otoczeniu próbki, np: ilość ciepła wymienionego z otoczeniem w procesie wymiany ciepła, lub zmiany wagi próbki w przypadku procesu dyfuzji.

Podstawowym narzędziem analizy prowadzonej w pracy jest technika transformat Laplace'a [3] i wynikający z niej rachunek splotowy. Transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$ definiuje się następująco:

$$\bar{f}(s) \equiv \mathscr{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \tag{1.3}$$

gdzie s — parametr transformacji.

Z uwagi na wykorzystanie w obliczeniach rachunku splotowego koniecznym jest posiadanie pełnych danych dotyczących przebiegu procesu. Przez pełne dane w tym przypadku rozumie się dane od początku procesu do co najmniej badanej chwili czasu. Do opisu funkcyjnego wyników eksperymentu proponuje się w pracy użycie splajnów [8].

Problem doświadczalnego wyznaczenia stałych charakteryzujących procesy opisane zagadnieniem brzegowym (2.1)÷(2.4) rozważany był wielokrotnie. Najczęściej spotykane metody opierają się na znajomości (z pomiaru) zmienności w czasie wybranej wielkości wewnątrz obszaru. Współczynniki wyznaczone są bądź metodami iteracyjnymi (np. [12], [13]), bądź poprzez skomplikowane obliczenia analityczne (np. [14]). W niektórych pracach badana jest jednoznaczność i istnienie rozwiązań problemu, polegającego na wyznaczeniu stałych przy znanym przebiegu procesu w punkcie wewnętrznym obszaru (np. [4]). W niniejszej pracy, jak wspomniano wyżej, proponuje się metodę wyznaczania stałych, opartą o pewne efekty globalne. Tego typu podejście nie wymaga wprowadzenia do wnętrza próbki czujników pomiarowych, które zawsze zakłócają przebieg procesu.

2. Określenie zmian globalnych zachodzących w ciele

W pracy rozważa się zagadnienie jednowymiarowe. Rozważania prowadzi się jednocześnie dla warstwy, walca i kuli, tzn. że obejmują one trzy podstawowe geometrie. Uzyskuje się to przy pomocy parametru kształtu β. Równanie różniczkowe (1.1) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1-2\beta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{K}\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{2.1}$$

gdzie

dla walca $\beta = 0$,
dla kuli $\beta = -0.5$,
dla warstwy $\beta = 0.5$.

Warunek brzegowy (1.2) będzie miał w przypadku rozważanych ciał postać

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}+\alpha u\right|_{r=R}=0. \tag{2.2}$$

Warunek początkowy przyjęto niezależny od współrzędnych przestrzennych

$$u|_{t=0}=u_0. \tag{2.3}$$

Ponadto przyjęto warunek symetrii (dla warstwy — warunek izolacji)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \tag{2.4}$$

Sformułowane zagadnienie brzegowo początkowe (2.1)÷(2.4) po przetransformowaniu przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}+\frac{1-2\beta}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}-\frac{s\bar{u}}{K}+\frac{u_0}{K}=0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \alpha \bar{u}|_{r=R} = 0, \tag{2.5}$$

$$\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right|_{r=0} = 0.$$

Rozwiązanie zagadnienia (2.1) do (2.4) w transformatach Laplace'a ma postać.

$$\bar{u} = -\frac{\alpha u_0 r^{\beta} \mathrm{I}_{-\beta}(pr)}{s[p\mathrm{I}_{1-\beta}(pR) + \alpha \mathrm{I}_{-\beta}(pR)]R^{\beta}} + \frac{u_0}{s}, \tag{2.6}$$

gdzie $p = \sqrt{s \cdot K^{-1}}$, $\mathrm{I}_{\nu}(x)$, — zmodyfikowana funkcja Bessela I rodzaju, rzędu ν. Zmianę wielkości globalnych można opisać zależnością

$$T_g = \frac{1}{F} \int\limits_V (u_0 - u) r_g dV, \tag{2.7}$$

gdzie F oznacza: w przypadku kuli jej powierzchnię całkowitą, w przypadku walca część powierzchni bocznej, uzyskaną przez wycięcie z nieskończonego walca jego części, ograniczonej dwoma płaszczyznami prostopadłymi do jego osi; V oznacza w tym przypadku objętość odciętej części. W przypadku warstwy o grubości R, F oznacza pole powierzchni tej podstawy graniastosłupa, na której jest określony warunek (2.2); V oznacza objętość tego graniastosłupa. Współczynnik r_g jest określony poprzez fizykę procesu (porównaj część 6 pracy). Związek (2.7) można przekształcić do postaci:

$$T_g = \frac{1}{R^{1-2\beta}} \int\limits_0^R r_g (u_0 - u) r^{1-2\beta} dr. \tag{2.8}$$

Ponieważ rozwiązanie zagadnienia (2.1) do (2.4) jest podane w transformatach, zależność (2.8) należy również przedstawić w transformatach. Przy obliczaniu transformaty prawej strony związku (2.8) wykorzystuje się twierdzenie Fubiniego o zamianie kolejności całkowania [2]. Po tych przekształceniach otrzymuje się

$$\bar{T}_g = \frac{1}{R^{1-2\beta}} \int\limits_0^R r_g r^{1-2\beta} \left(\frac{u_0}{s} - \bar{u} \right) dr. \tag{2.9}$$

Wstawiając (2.6) do (2.9) ostatecznie otrzymamy:

$$\bar{T}_g = \frac{r_g \alpha u_0 \mathrm{I}_{1-\beta}(pR)}{sp[p\mathrm{I}_{1-\beta}(pR) + \alpha \mathrm{I}_{-\beta}(pR)]}. \tag{2.10}$$

3. Wyznaczenie stałych charakteryzujących proces

Ponieważ do wyznaczenia są dwie stałe, wygodnie będzie wykorzystać dwa doświadczenia; stała K nie zmienia się w obu doświadczeniach, natomiast stała α ma postać:

$$\alpha_i = \alpha_0 a_i \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

α_0 — wielkość niezależna od doświadczenia, którą wyznaczymy

a_i — wielkość zależna od doświadczenia, znana lub zadana (porównaj część 6 pracy).

Wstawiając (3.1) do (2.10) otrzymujemy zależności na nieznane współczynniki

$$\bar{T}_{gi} = \frac{r_g \alpha_0 a_i \mathrm{I}_{1-\beta}(pR) u_0}{sp[p\mathrm{I}_{1-\beta}(pR) + \alpha_0 a_i \mathrm{I}_{-\beta}(pR)]}; \quad i = 1, 2. \tag{3.2}$$

Po prostych algebraicznych przekształceniach otrzymamy następujące zależności pozwalające oznaczyć współczynniki

$$\frac{1}{\alpha_0} \frac{a_1 \bar{T}_{g2} - a_2 \bar{T}_{g1}}{a_1 a_2} = \frac{\mathrm{I}_{-\beta}(pR)}{p\mathrm{I}_{1-\beta}(pR)} (\bar{T}_{g1} - \bar{T}_{g2}), \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{u_0} s(\bar{T}_{g1} \bar{T}_{g2})(a_1 - a_2) = r_g \frac{\mathrm{I}_{1-\beta}(pR)}{p\mathrm{I}_{-\beta}(pR)} [a_1 \bar{T}_{g2} - a_2 \bar{T}_{g1}]. \tag{3.4}$$

Po odwróceniu zależności (3.3) i (3.4) otrzymamy wzory prowadzące do wyznaczenia poszukiwanych stałych:

$$\alpha_0 = \frac{1}{a_1 a_2} \frac{a_1 T_{g2}(t) - a_2 T_{g1}(t)}{F_\beta(t) * [T_{g2}(t) - T_{g1}(t)]}, \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt} [T_{g1}(t) * T_{g2}(t)] (a_1 - a_2) = r_g G_\beta(t) * [a_1 T_{g2}(t) - a_2 T_{g1}(t)] u_0. \tag{3.6}$$

Tutaj

$$F_\nu(t) = \frac{2K}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \eta(t) \exp\left[-\frac{\mu_{\nu n}^2}{R^2} Kt\right],$$

$$G_\nu(t) = F_\nu(t) + \frac{2K}{R} (1-\nu),$$

$$\mathrm{J}_\nu(\mu_\nu) = 0,$$

gdzie $\eta(t)$ jest funkcją Heaviside'a, [3], zaś $J_\nu(x)$ — funkcją Bessela I rodzaju rzędu ν. We wzorach (3.5) i (3.6) występują sploty, których istnienie jest zapewnione na mocy twierdzenia Titchmarsha [7, str. 28]. Podstawową zaletą zależności (3.5) jest możliwość bezpośredniego wyznaczenia współczynnika α_0, jeżeli znamy współczynnik K. Pewną niedogodnością zależności (3.6) jest konieczność stosowania iteracji do wyznaczenia współczynnika K. Można również wymnożyć stronami zależności (3.3) i (3.4). Otrzymamy wtedy prostą zależność pozwalającą określić w sposób bezpośredni iloczyn $\alpha_0 K$:

$$u_0 K \alpha_0 a_1 a_2 \frac{r_g}{s} (\bar{T}_{g1} - \bar{T}_{g2}) = s \bar{T}_{g1} \bar{T}_{g2} (a_1 - a_2). \tag{3.7}$$

Po odwróceniu i uporządkowaniu otrzymamy

$$K\alpha_0 = \frac{\frac{d}{dt} [T_{g1}(t) * T_{g2}(t)] (a_1 - a_2)}{u_0 a_1 a_2 \eta(t) * [T_{g1}(t) - T_{g2}(t)]}. \tag{3.8}$$

4. Opis wyników doświadczenia

Wyniki eksperymentu są przeważnie określone dla chwil czasu, tworzących pewien zbiór

$$\{t_i\} \subset \langle 0, T); \quad i = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{4.1}$$

Wyniki są zapisane jako zbiór wartości $\{f_i\}$ w chwilach czasu $\{t_i\}$. W przypadku gdy opis jest dany w innej postaci to zawsze można go do powyższego opisu sprowadzić. Wykorzystując zbiór danych pomiarowych $\{f_i\}$ można, w sposób przybliżony, opisać funkcję $f(t)$ przy pomocy splajnu [8]. Otrzymujemy

$$f(t) = A_0 t_+ + \sum_{l=1}^{J} A_l (t-t_l)_+^n \tag{4.2}$$

gdzie J jest liczbą wyników (odczytów) pomiarów.

Współczynniki A_l określone są związkami

$$A_0 = \frac{f_1}{t_1}; \quad A_1 = \frac{f_2 - A_0 t_2}{(t_2 - t_1)^n}, \tag{4.3}$$
$$A_p = \frac{f_{p+1} - \sum_{m=1}^{p-1} A_m (t_{p+1} - t_m)_+^n - A_0 t_{p+1}}{(t_{p+1} - t_p)^n}$$

gdzie

$$(t-t_k)_+^n = (t-t_k)^n \eta(t-t_k)$$

5. Końcowa postać wzorów

Do końcowego zapisu wzorów (3.5), (3.6), (3.8) wygodnie jest użyć splajnu pierwszego rzędu, tj. splajnu określonego związkiem (4.2) dla $n = 1$. Można oczywiście użyć także splajnów wyższych rzędów. W tym przypadku df. (4.2) sprowadza się do postaci

$$f(t) = \sum_{l=1}^{J} A_l (t-t_l)_+, \quad t_0 = 0 \tag{5.1}$$

gdzie

$$A_p = \frac{f_{p+1} - \sum_{l=0}^{p-1} A_l (t_{p+1} - t_l)_+}{t_{p+1} - t_p}; \quad A_0 = \frac{f_1}{t_1}. \tag{5.2}$$

Ze względu na jednolitość zapisu, a nie zmniejszając ogólności rozważań, można założyć, że funkcje T_{g1} i T_{g2}, zbudowane według wzoru (5.1), czyli w oparciu o zbiory danych pomiarowych, można opisać na tym samym zbiorze chwil czasu $\{t_i\}$, co znacznie upraszcza zapis ostatecznych wzorów. W związku z powyższym opis. wyników będzie postaci

$$T_{g1} = \sum_{l=0}^{J} A_l (t-t_l)_+, \tag{5.3}$$
$$T_{g2} = \sum_{l=0}^{J} B_l (t-t_l)_+,$$

gdzie

$$A_l = \frac{T_{g1,p+1} - \sum_{l=0}^{p-1} A_l(t_{p+1}-t_l)}{t_{p+1}-t_p}; \quad A_0 = \frac{T_{g1,1}}{t_1}; \tag{5.4}$$

podobnie określa się B_l.

Ostatecznie wzory (3.5), (3.6) i (3.8) odpowiednio przyjmą postać

$$\alpha_0 = \frac{1}{a_1 a_2} \cdot \frac{\sum_{l=0}^{J} (a_1 B_l - a_2 A_l)(t-t_l)_+}{M_{1-\beta}}, \tag{5.5}$$

$$\sum_{l,j=0}^{J} A_l B_j (t-t_l-t_j)_+^2 \frac{a_1-a_2}{2} = r_g M_{-\beta} u_0, \tag{5.6}$$

$$K\alpha_0 = \frac{3\sum_{l,j=0}^{J} A_l B_j (t-t_l-t_j)_+^2 (a_1-a_2)}{2u_0\left[\sum_{l=0}^{J} A_l(t-t_l)_+^2 - \sum_{l=0}^{J} B_l(t-t_l)_+^2\right]}, \tag{5.7}$$

gdzie

$$M_\nu = -\sum_{l=0}^{J} \frac{R(t-t_l)_+(a_1B_l-a_2A_l)}{4(1-\beta)} + \sum_{l=0}^{J} \frac{R^3(a_1B_l-a_2A_l)\eta(t-t_l)}{K} \times$$
$$\times \left\{1-16(1-\beta)^2(2-\beta)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{\mu_{\nu n}^2 K}{R^2}(t-t_l)\right]}{\mu_{\nu n}^4}\right\}. \tag{5.8}$$

Najwygodniejszym podejściem do oznaczenia współczynników α_0 i K jest:
1. rozwiązać równanie (5.6) ze względu na K przy pomocy kolejnych przybliżeń
2. przy znanym współczynniku K ze wzoru (5.7) wyznaczyć współczynnik α_0.

6. Przykład interpretacji współczynników

Rozważmy nagrzane do stałej temperatury względnej u_0 ciało w kształcie warstwy, kuli lub walca nieskończonego, na powierzchni którego znajduje się cienka powłoka o grubości δ, gdzie

$$\delta \ll R. \tag{6.1}$$

Ze względu na przyjęcie założenia (6.1) można przyjąć, że
— krzywiznę powłoki można zaniedbać
— przepływ ciepła w powłoce jest ustalony.

Niech funkcja $u_1(r, t)$ opisuje rozkład temperatury w warstwie (kuli, walcu), a $u_2(r, t)$ —

w powłoce. Proces ochładzania takiego dwuskładnikowego ośrodka będzie opisany równaniami

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1-2\beta}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}-\frac{1}{K_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}=0, \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}=0 \tag{6.3}$$

z następującymi warunkami:

— warunki sklejenia

$$[q_1-q_2]|_{r=R}=0 \text{ równość strumieni ciepła,} \tag{6.4}$$

$$[u_1-u_2]|_{r=R}=0 \text{ równość temperatur,} \tag{6.5}$$

— warunek brzegowy dla powierzchni zewnętrznej

$$u_2|_{r=R+\delta}=0, \tag{6.6}$$

— warunek początkowy dla ciała

$$u_1|_{t=0}=u_0, \tag{6.7}$$

Stałe mają następujący sens fizyczny:

K_1 — współczynnik wyrównania temperatury

$$K_1=\frac{\lambda_1}{c_p\varrho_1}, \tag{6.8}$$

λ_1 — współczynnik przewodnictwa ciepła,
ϱ_1 — gęstość ciała,
c_p — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu.

Strumień ciepła $\vec{q}$ określony jest następująco:

$$\vec{q}=-\operatorname{grad}u \tag{6.9}$$

Dla ciała i pokrywającej go powłoki mamy

$$\begin{aligned} q_1&=-\lambda_1\frac{\partial u_1}{\partial r},\\ q_2&=-\lambda_2\frac{\partial u_2}{\partial r}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Stąd zależność (6.4) przyjmie postać

$$\lambda_1\frac{\partial u_1}{\partial r}=\lambda_2\frac{\partial u_2}{\partial r} \quad \text{dla } r=R \tag{6.11}$$

zagadnienie rozkładu temperatury w powłoce pokrywającej rozważane ciało jest opisane następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}&=0,\\ u_2|_{r=R+\delta}&=0,\\ u_2|_{r=R}&=u_1(R,t) \end{aligned} \tag{6.12}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia ma postać

$$u_2 = \frac{u_1(R, t)}{\delta}(R+\delta-r); \qquad r \in (R, R+\delta). \tag{6.13}$$

Ostatecznie zależność na strumienie (6.4) przyjmuje postać:

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{u_1}{\delta}\bigg|_{r=R} = 0, \tag{6.14}$$

czyli dla rozważanego ciała otrzymamy na rozkład temperatury zagadnienie

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{1}{K_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{1}{\delta}u_1\bigg|_{r=R} = 0; \qquad u_1|_{t=0} = u_0. \end{gathered} \tag{6.15}$$

Szukanymi stałymi są:

$$K_1 \quad \text{i} \quad \alpha_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

zatem należałoby w celu ich wyznaczenia przeprowadzić dwa doświadczenia z różnymi grubościami powłoki. Mamy przy tym

$$a_1 = \frac{1}{\delta_1}, \qquad a_2 = \frac{1}{\delta_2}. \tag{6.16}$$

Mierzoną wielkością globalną byłoby ciepło przekazane otoczeniu przez powierzchnię jednostkową:

$$Q_F = \frac{1}{R^{1-2\beta}} \int_0^R r^{1-2\beta}(u_0-u)c_p\varrho\, dr. \tag{6.17}$$

Jak zatem widać, w tym wypadku

$$r_a = c_p\varrho. \tag{6.18}$$

Znając $Q_1(t)$ i $Q_2(t)$ przy odpowiednich a_1 i a_2 możemy wyznaczyć współczynniki przewodnictwa ciepła λ_1 i λ_2 ze wzorów (5.6) i (5.7) przedstawionych w pracy.

7. Wnioski

Przedstawiona w pracy metodyka oznaczania współczynników charakteryzujących wspomniane we wstępie procesy, pozwala efektywnie je znaleźć w przypadku, gdy są one stałe (nie zależą od zmiennych niezależnych (r, t) oraz od procesu). Szczególnie prosto daje się wyznaczyć współczynnik α_0 przy znanym K, lub iloczyn obu wielkości ze wzoru (5.7). Iloczyn ten nie zależy w sposób bezpośredni od przyjętych kształtów próbek, a tylko od mierzonych wielkości globalnych. Zaletą metody jest możliwość wyznaczenia współczynnika K niezależnie od nieznanego α_0 (por. wzór (5.6)). Cechą zależności (5.5) do (5.7) jest występowanie w nich czasu jako parametru, od którego to współczynniki α_0 i K powinny być niezależne. Własność ta pozwala, w przypadku wyników obliczeń wskazujących na ich zmienność w czasie, określić, na ile postawione zagadnienie (2.1) do (2.4) odpowiada rzeczywistemu procesowi. Występowanie w końcowych wzorach (5.5) do (5.7) sum nie stanowi — wobec coraz bardziej dostępnej techniki obliczeniowej (komputery, minikomputery, kalkulatory programowalne) — poważnego utrudnienia. Część sum jest skończona, a ilość wyrazów zależy od opisu wyników eksperymentu, zaś sumy nieskończone występujące we wzorach są szybko zbieżne z uwagi na występowanie członów wykładniczych. Proponowana metoda wyznaczania współczynników będzie również funkcjonować jeśli w miejsce opisujących proces wielkości zostaną wzięte odpowiednie strumienie, czy prędkości. Można również otrzymać podobne wyniki przy innym postawieniu wyjściowego zagadnienia brzegowo — początkowego.

Literatura cytowana w tekście

1. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN Warszawa 1969, rozdział 12.
2. R. SIKORSKI, *Funkcje rzeczywiste*, PWN Warszawa 1958.
3. A. H. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN Warszawa 1969.
4. H. Ja. BIEZNISZCZENKO, A. I. PRILEPKO, *Obratnyje zadaczi dla urawnienij paraboliczeskogo tipa* w: Problemy matiematiczeskoj fiziki i wyczislitielnoj matiematiki, Izdatielstwo Nauka — Moskwa 1977.
5. K. GRYSA, J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych pojawiających się w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, Mech. Teoret. Stos. **16**, 3, (1977).
6. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła, podstawy teoretyczne*, PWN Warszawa 1963.
7. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN Warszawa 1963.
8. R. VARGA, *Funkcjonalnyj analiz i tieorija aproksymacij*, Izdatielstwo Mir Moskwa 1974.
9. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego*, PWN Warszawa 1965.
10. N. T. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN Warszawa 1964.
11. *Tablicy nulej funkcij Biessela*, Bibliotieka Matiematiczeskich Tablic, wypusk 44, Moskwa 1967.
12. R. C. MEHTA, *Solution of the Inverse Conduction Problem*, AIAA Journal, **15**, (1977), 1355 - 1356.
13. R. C. MEHTA, *Extension of the Solution of Inverse Conduction Problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, 22, (1969).
14. J. TALER, *Metoda eksperymentalnego określenia współczynnika wnikania ciepła w warunkach nieustalonych*, Czas. techn., 1978, 43 - 46.

Резюме

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦЕНТОВ, КОТОРЫЕ ХАРАКТЕРЫЗУЮТ ПРОЦЕСЫ ИЗОБРАЖЕНЫЕ УРАВНЕНИЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В статьи анализируется проблемы вычисления, на основе эксперимента, коэффицентов которые находятся в краево началной задачи параболического типа. Коэффиценты определены на основе некоторых общих эффектах. Чтобы получить концовые соотношения используется интегральное преобразование Лапласа и свертковый анализ. К изображени результатов эксперимента в виде функции используется сплайны. Результаты представлены в статьи имеют особенно простый вид когда результаты эксперимента изображены с помощю сплайнов первого порядка.

Summary

METHOD OF DETERMINATION OF THE COEFFICIENT CHARACTERIZING THE PROCESSES DESCRIBED BY PARABOLIC EQUATION

In the paper a method of determination of coefficients in the boundary-value problems of the parabolic type is considered. The approach takes into account the experimental results and is based on some global effects. The Laplace transform techniques and convolution analysis are exploited to obtain the formulas defining the coefficients. In order to represent the experimental data in the analytical form a spline approximation is used. The results have especially simple form when the splines of the order 1 describe the measuring data.

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 września 1981 roku.