

## O KLASACH 2-DRZEW W SYNTEZIE DYSKRETYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH

JÓZEF WOJNAROWSKI<sup>1)</sup>  
STANISŁAW ZAWIŚLAK<sup>2)</sup>

*Politechnika Śląska w Gliwicach*

### Streszczenie

W pracy sformułowano jedno z możliwych ujęć zadania syntezy układów mechanicznych w reprezentacji grafów. Rozważono układy dyskretne złożone z elementów Voigta lub Maxwella. Wykazano, że w zadaniu syntezy istotne znaczenie mają dwa typy szczególnych 2-drzew grafu będącego obrazem struktury połączeń układu mechanicznego. W zakończeniu pracy podano algorytm syntezy dyskretnego układu mechanicznego z elementami Voigta.

### 1. Wprowadzenie

W wielu dziedzinach nauki i techniki opracowuje się metody oraz algorytmy syntezy układów fizycznych różnych typów.

Zadanie syntezy drgającego układu mechanicznego można ująć następująco: na podstawie siłowej lub prędkościowej funkcji przejścia układu należy podać strukturę połączeń oraz wartości liczbowe wszystkich parametrów układu. W tak sformułowanym zadaniu korzystnie jest zastosować model układu w reprezentacji grafów. Są one, jak również i hipergrafy [3, 8], wygodnym sposobem opisu struktury połączeń elementów układu mechanicznego.

W odróżnieniu od prac [1], [2] używane grafy są obciążone, z założenia, wagami w postaci wielomianów. Funkcje przejścia, o których mowa powyżej można przedstawić w postaci  $\frac{L}{M} \cdot z$ ,

$$L = \sum_{d_2 \in D_2} w(d_2), \quad M = \sum_{d_1 \in D_1} w(d_1),$$

gdzie  $d_i$  —  $i$ -drzewo,  $D_i$  — pewne zbiory  $i$ -drzew grafu układu mechanicznego,  $i = 1, 2$ ;  $w(\cdot)$  — pewne wyrażenia przypisane  $i$ -drzewom,  $z$  — wielkość przypisana pewnej krawędzi

<sup>1)</sup> Profesor Instytutu Podstaw Konstrukcji Maszyn

<sup>2)</sup> Asystent Instytutu Matematyki

grafu. Wyrażenia  $L$ ,  $M$  można przedstawić i obliczać wieloma sposobami, np. za pomocą funkcji jednoczesności i funkcji wyznaczkowej [1, 2, 8].

W niniejszej pracy scharakteryzowano zbiór  $D_2$ , czyli zbiór 2-drzew istotnych w procesie syntezy dla pewnej klasy układów mechanicznych określonych w rozdziale 2.

Definicje takich pojęć, jak układ mechaniczny [2], funkcją przejścia [4, 8], graf, charakterystyki grafu [5], liczba strukturalna, działania na liczbach strukturalnych [2, 6, 8] przyjmujemy za znane.

W modelowaniu układów mechanicznych za pomocą grafów istotne znaczenie odgrywają pewne zbiory grafów częściowych danego grafu, a mianowicie drzewa i 2-drzewa [8, s. 37].

Definicja 1. Niech  $X = [{}_1X, {}_2X, {}_3X]$  jest grafem. Oznaczamy  $|{}_1X| = n_1$ ,  $k$ -drzewem grafu  $X$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_1$ , nazywamy graf częściowy o  $n_1 - k$  krawędziach nie tworzących cykli ani pętli, 1-drzewo nazywamy drzewem.

## 2. O rozważanych układach mechanicznych

W pracy będziemy rozważać układy dyskretne, liniowe, o skończonej liczbie stopni swobody  $n$ , z elementami o modelach reologicznych Voigta lub Maxwella. Elementy mają niezmiennie w czasie własności mechaniczne oraz są nieorientowane, tzn. zmienna jest przekazywana przez dany element w ten sam sposób niezależnie od zwrotu zmiennej.

Na układ, na który nałożono więzy holonomiczne, obustronne, działają wymuszenia siłowe. Przy tych założeniach w procesie syntezy układu poszukujemy struktury funkcjonalnej układu mechanicznego  $U$  w postaci modelu reologicznego według schematu Voigta lub Maxwella, spełniającej empiryczną postać funkcji przejścia  $K(p)$  postaci:

$$(1) \quad K(p) = \frac{g_l p^l + g_{l-1} p^{l-1} + \dots + g_{s+1} p^{s+1} + g_1 p^s}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_{r+1} p^{r+1} + a_r p^r},$$

gdzie:

$l, m, r, s \in N \cup \{0\}$ ;  $a_i, g_i \in R$ ;  $p \in C$ ;  $N, R, C$  oznaczają odpowiednio zbiory liczb naturalnych, rzeczywistych i zespolonych.

Funkcja przejścia  $K(p)$  układów stabilnych spełnia następujące warunki [4, 7]:

- 2.1. Funkcja  $K(p)$  nie ma biegunów dla takich  $p$ , że  $\text{Re}(p) > 0$  oraz jeżeli ma bieguny na osi urojonej, to są one pojedyncze o urojonych residuach.
- 2.2. Funkcja  $K(p)$  nie ma zer dla takich  $p$ , że  $\text{Re}(p) > 0$ .

## 3. Klasa grafów układów mechanicznych

W prezentowanej metodzie strukturę połączeń dyskretnego układu mechanicznego  $U$  przedstawiamy w postaci grafu biegunowego  $X_{\circ\circ}^X$ , mocno spójnego, którego krawędziom przyporządkowujemy poszczególne charakterystyki układu [9, s. 96]. Wtedy można mówić o równoważności  $X \cong U$  a graf biegunowy  $X_{\circ\circ}^X$ , czyli trójka: graf abstrakcyjny oraz para funkcji opisujących, zapisujemy w postaci:

$$(2) \quad X_{\circ\circ}^X = [X, {}_1f, {}_2f],$$

gdzie:  $X = [{}_1X, {}_2X, {}_3X]$  jest grafem abstrakcyjnym, czyli trójką zbiorów  ${}_1X$  — zbiór wierzchołków,  ${}_2X$  — zbiór krawędzi,  ${}_3X$  — relacja incydencji,  ${}_3X \subset {}_1X \times {}_2X \times {}_1X$ , natomiast funkcje  ${}_1f, {}_2f$  definiujemy następująco:

$$(3) \quad {}_1f: {}_1X \rightarrow [{}_1S, {}_2S],$$

$$(4) \quad {}_2f: {}_2X \rightarrow [N, Z],$$

$Z = \{m_i p^2, b_i p, c_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  to zbiór wag krawędzi będących sztywnościami dynamicznymi,  ${}_1S, {}_2S$  — para wielkości fizykalnych charakteryzujących układ  $U$ .

Z uwagi na to, że graf  $X$  układu będziemy przedstawiali bez krotnych krawędzi<sup>1)</sup>, to przypisane im wagi w ogólnym przypadku mogą być wielomianami o postaci  $z_i = m_i p^2 + b_i p + c_i$ . Zauważmy, że grafy dyskretnych układów mechanicznych posiadają wyróżniony wierzchołek  ${}_1x_0$  reprezentujący układ odniesienia oraz  $n$  wierzchołków  ${}_1x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  reprezentujących masy, z tym że w układach z elementami Maxwella, a więc z szeregowo połączonymi sprężynami i tłumikami występują jeszcze tzw. wierzchołki przegubowe.

Stopień incydencji wierzchołka  ${}_1x_0$  reprezentującego układ odniesienia dla układów mechanicznych z elementami Voigta wynosi  $n + n'$ , gdzie  $n'$  oznacza ilość krawędzi czynnych reprezentujących wymuszenia.

W dalszym ciągu będziemy rozważać układy z jednym wymuszeniem siłowym  $n' = 1$ , ponieważ dla układów rozpatrywanych w tej pracy spełniona jest zasada superpozycji.

Przyjmujemy, że krawędź reprezentująca wymuszenie łączy wierzchołek odniesienia  ${}_1x_0$  z pierwszym wierzchołkiem  ${}_1x_1$  reprezentującym masę  $m_1$ . Jest to jedyną parą wierzchołków grafu połączona dwoma równoległymi krawędziami. Graf częściowy  $X_b$ , złożony wyłącznie z krawędzi biernych jest grafem zwykłym (w sensie Korzana [5]).

Graf  $X$  układu traktujemy jako obraz geometryczny liczby strukturalnej  $A$ , dzięki temu siłową funkcję przejścia  $K(p)$  można wyrazić za pomocą funkcji jednoczesności

$\text{Sim}_z \left( \frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial i} \right)$  oraz funkcji wyznaczkowej  $\det_z \left( \frac{\partial A}{\partial l} \right)$  liczby strukturalnej  $A$  [2, 8].

Mamy wówczas:

$$(5) \quad K(p) = \frac{\text{Sim}_z \left( \frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial i} \right)}{\det_z \left( \frac{\partial A}{\partial l} \right)} \cdot z_i,$$

gdzie  $z_i$  jest wagą krawędzi łączącej wierzchołek odniesienia  ${}_1x_0$  z wierzchołkiem  ${}_1x_i$  — reprezentującym badaną odpowiedź drgającego układu mechanicznego.

Tak więc krawędzie „1” oraz „i” reprezentują odpowiednio wymuszenie siłowe i odpowiedź układu. W tych rozważaniach przyjmujemy, że są one skrajnymi krawędziami grafu układu mechanicznego (rys. 1a).

W rozważanych grafach, które muszą być planarne [2] mogą jeszcze występować krawędzie sprężyn.

Przykładowo na rysunku 1 będzie to krawędź 4.

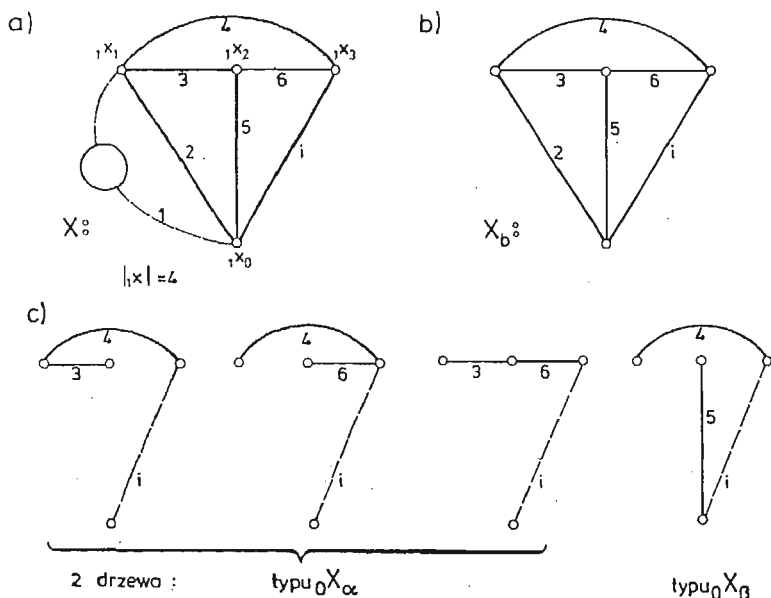
W interpretacji grafów składniki licznika funkcji  $K(p)$ , wyrażonej wzorem (2), są

<sup>1)</sup> multikrawędzi.

2-drzewami grafu  $X$  (rys. 1c). Znaki funkcji jednoczesności określa się na podstawie przeciwobrazu geometrycznego liczby strukturalnej  $A$ , graf dualny do  $X$  jest przeciwobrazem liczby  $A$ . Tylko grafy planarne posiadają graf dualny.

Krawędzie łączące wierzchołek odniesienia oraz wierzchołki reprezentujące masy będziemy nazywali krawędziami masowymi. Z rozważań o postaci grafu wynika, że wszystkie współczynniki jednomianów funkcji jednoczesności mają ten sam znak (plus) bowiem krawędzie „1” oraz „i” są incydentne (układ ma tzw. strukturę trójkową). Ze struktury trójkowej wynika również następujący warunek na funkcję przejścia

$$(6) \quad 0 \leq |K(p)| \leq 1 \quad \text{dla} \quad p \in R.$$



Rys. 1

#### 4. O postaci 2-drzew w syntezie drgających układów mechanicznych

O ile zawsze określamy zbiór wszystkich drzew grafu jako modelu układu mechanicznego, to w zbiorze 2-drzew będziemy interesowali się szczególnym ich podzbiorem. Zgodnie z definicją funkcji jednoczesności wyrażenie  $\text{Sim}_z \left( \frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial i} \right)$  jest sumą algebraiczną jednomianów odpowiadających takim 2-drzewom grafu  $X$ , których kolumnowa reprezentacja występuje równocześnie w liczbach  $\frac{\partial A}{\partial l}$  oraz  $\frac{\partial A}{\partial i}$ . Innymi słowy interesują nas tylko te 2-drzewa, które stają się drzewami grafów zredukowanych  $X_1$  oraz  $X_i$  powstałych z grafu  $X$  przez zwarcie końców odpowiednio krawędzi 1 oraz  $i$ .

Te szczególne 2-drzewa charakteryzuje następujący lemat.

Lemat 1. O postaci 2-drzew grafu biegunowego będącego modelem układu mechanicznego.

Założenia:  $X$  — graf reprezentujący układ mechaniczny dyskretny składający się z elementów Voigta.

$A$  — liczba strukturalna taka, że graf  $X$  jest obrazem geometrycznym.

Teza: szczególne 2-drzewa reprezentujące kolumny liczby  $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$  są dwu typów:

$X_\alpha$  — dwudrzewa, które nie zawierają krawędzi masowych. Jedna składowa spójności rozpięta jest na wierzchołkach masowych (jest drzewem grafu generowanego przez wierzchołki masowe), druga jest zdegenerowana, tworzy ją izolowany wierzchołek  ${}_1x_0$ .

$X_\beta$  — dwudrzewa, których obie składowe spójności zawierają krawędzie. Do jednej składowej należą wierzchołki leżące pod krawędziami sprzężenia i wierzchołek odniesienia. Do drugiej składowej spójności pozostałe wierzchołki reprezentujące masy. Krawędzie należące do obu składowych spójności tworzą drzewa podgrafów rozpiętych na odpowiednich zbiorach wierzchołków.

Dowód: szczególne 2-drzewo  $X_\alpha$  reprezentuje kolumnę liczby strukturalnej  $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$ , bo operacja zwarcia końców krawędzi 1 oraz  $i$  prowadzi do powstania grafów  $X_1$  oraz  $X_i$  o ilości wierzchołków o jeden mniejszy niż w grafie  $X$  ( $|X_1| = |X_i| = n_1 - 1$ ), a krawędzie tego 2-drzewa tworzą teraz graf częściowy spójny grafów przekształconych  $X_1$  oraz  $X_i$ , bez pętli i cykli, o  $n_1 - 2 = |X_i| - 1 = |X_1| - 1$  krawędziach, czyli drzewo grafów  $X_1$  oraz  $X_i$ . Ponieważ grafy  $X_1$  oraz  $X_i$  są obrazami geometrycznymi liczb  $\frac{\partial A}{\partial l}$  oraz  $\frac{\partial A}{\partial i}$  więc kolumna złożona z numerów krawędzi 2-drzewa znajdzie się w obu tych liczbach.

Szczególne 2-drzewo  $X_\beta$ , reprezentuje jedną z kolumn liczb  $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$ , bo zwarcie dwóch składowych spójności wierzchołkami przynależnymi do różnych składowych nie powoduje powstania cyklu i prowadzi do powstania spójnego grafu częściowego  $X_1, X_i$  grafów przekształconych  $X_1$  oraz  $X_i$  w zależności od zwarcia krawędzi a mianowicie

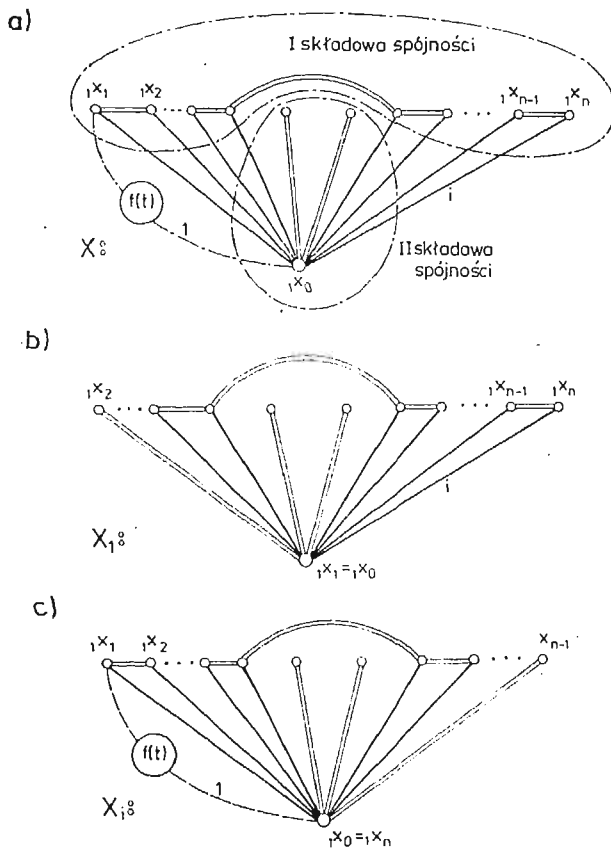
$$X_\alpha \xleftarrow[\text{krawędzi } l]{\text{zwarcie}} X_\beta \xrightarrow[\text{krawędzi } i]{\text{zwarcie}} X_i.$$

Mamy  $|X_1| = |X_i|$  oraz  $X_1, X_i$  posiadają zbiór krawędzi ponumerowanych tymi samymi liczbami naturalnymi, mają więc taką samą reprezentację kolumnową (rys. 2).

Liniami podwójnymi zaznaczono 2-drzewo  $X_\beta$  grafu  $X$  (rys. 2a), drzewo  $X_1$  grafu  $X_1$  (rys. 2b) i drzewo  $X_i$  grafu  $X_i$  (rys. 2c). W 2-drzewie  $X_\beta$  nie może być również drogi z wierzchołka  ${}_1x_0$  do  ${}_1x_i$  ani  ${}_1x_n$ , bo po zwarciu krawędzi 1 lub  $i$  powstałby cykl, czyli otrzymany graf częściowy nie byłby drzewem grafów  $X_1$  lub  $X_i$ . □

Mając na uwadze powyższy lemat można wykazać, że siłowa funkcja przejścia  $K(p)$  układów z elementami Voigta musi spełniać następujące warunki:

- 4.1.  $m \in$  parzystych,
- 4.2.  $2 \leq l \leq m - 1$ ,



Rys. 2

$$4.3. \quad 0 \leq r \leq \frac{m}{2},$$

$$4.4. \quad 0 \leq s \leq \frac{m}{2} + 1,$$

$$4.5. \quad s \geq r, \quad \text{ale nie może być } l = s = r.$$

Wykażemy, przykładowo niektóre z nich:

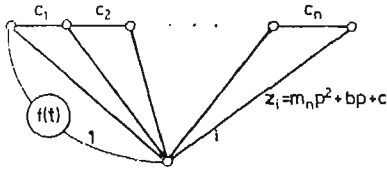
4.1. Wartość drzewa składającego się z krawędzi masowych zawiera składnik  $m_1 m_2 \dots m_n p^{2^n}$ , ponieważ czynnika o wyższej potędze niż  $p^{2^n}$  nie ma, więc maksymalny stopień mianownika funkcji  $K(p)$   $m = 2n$ .

4.2. Stopień licznika  $l = 2$  realizuje się w układzie, którego graf przedstawiono na rys. 3.

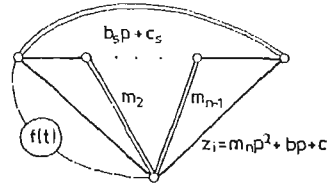
Zauważmy, że liczba strukturalna  $\frac{\partial A}{\partial I} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$  ma tylko jedną kolumnę. Licznik funkcji  $K(p)$  jest więc postaci  $c_1 c_2, \dots, c_{n-1} \cdot z_i$ . Waga  $z_i$  jest wielomianem stopnia drugiego więc  $l = 2$ .

Stopień  $l = m - 1$  jest zrealizowany w układzie o grafie przedstawionym na rys. 4.

Z lematu o postaci 2-drzew wynika, że 2-drzewo zaznaczone na rysunku 4 podwójnymi liniami reprezentuje jedną z kolumn liczbby  $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$ , a więc licznik funkcji  $K(p)$  zawiera składnik  $m_2 m_3 \dots m_{n-1} \cdot b_s m_n p^{2(n-1)+1}$ .



Rys. 3



Rys. 4

Nie ma innego składnika, w którym byłyby więcej krawędzi masowych, przeto  $l = 2(n-1)+1 = 2n-1 = m-1$ .

Pozostałe warunki 4.3 - 4.5 można analogicznie wykazać.

Dla układów o elementach Maxwella warunki dla siłowej funkcji przejścia przyjmują postać:

- 4.1.  $n = 1 \Rightarrow m = 3,$
- 4.2.  $3n \leq m \leq 5n-3$  dla  $n \geq 2,$
- 4.3.  $m - 2n_{\max} + 2 \leq l \leq m - 2,$
- 4.4.  $l$  zmienia się co 2,
- 4.5.  $s = n_{\max} + 1,$
- 4.6.  $r = n_{\max},$

gdzie:

$n_{\max}$  — największa liczba naturalna  $n$  spełniająca warunek 4.2.

### 5. Algorytm syntezy dla układów mechanicznych dyskretnych z elementami typu Voigta

Na podstawie danej funkcji przejścia  $K(p)$  należy podać graf układu mechanicznego oraz wartości wszystkich jego parametrów.

Funkcja  $K(p)$  musi spełniać warunki 2.1, 2.2, zależność 6 oraz warunki 4.1 - 4.5<sup>1)</sup>. Jeżeli funkcja nie spełnia warunków 4.1 - 4.5, to oznacza, że nie można znaleźć układu składającego się z elementów Voigta realizującego tę funkcję; co nie wyklucza możliwości zbudowania układu składającego się z innych elementów.

Po skonstruowaniu grafu obciążonego układu mechanicznego wyznaczamy liczby strukturalne potrzebne do dalszych obliczeń a w szczególności  $A, \frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial i}, \frac{\partial A}{\partial i}$  oraz  $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$ .

Następnie tworzymy układ równań przyrównując  $a_i, g_i$  do odpowiednich wyrażeń zapisanych za pomocą funkcji działających na liczbę strukturalną  $A$ , czyli porównujemy

<sup>1)</sup> dla elementów Voigta

wzory (1) i (5). Otrzymamy  $i_r = l - s + p - r + 2$  równań. Metodę rozwiązywania układu równań takiej postaci można znaleźć np. w pracy [1]. Musi być wtedy spełniony dodatkowo warunek:

$$5.1. \quad i_n \geq i_r,$$

gdzie  $i_n$  — ilość niewiadomych poszukiwanych parametrów układu. Warunek 5.1 pociąga za sobą następującą nierówność

$$5.2. \quad m \geq 6.$$

Podany teraz sposób rysowania grafów obciążonych układów mechanicznych, których wykładniki transmitancji spełniają warunki

$$m \geq 6, m \in \text{zbioru liczb parzystych}, \\ 2 \leq l \leq \frac{m}{2} + 1 \text{ oraz warunki 4.3—4.5.}$$

1° Rysujemy  $n_1$  wierzchołków,  $n_1 = \frac{m}{2} + 1$ . Jeden z nich  ${}_1x_0$  traktujemy jako wierzchołek odniesienia, pozostałych  $\frac{m}{2}$  wierzchołków reprezentuje masy układu.

2° Łączymy krawędziami wierzchołki masowe  ${}_1x_i$  z wierzchołkiem odniesienia  ${}_1x_0$  i dołączamy krawędź wymuszenia (łączy pierwszy wierzchołek masowy  ${}_1x_1$  z wierzchołkiem odniesienia). Przypisujemy wagi postaci  $m_i p^2$  kolejnym krawędziom masowym.

3° Dla zapewnienia wykładnika  $l$  krawędziom łączącym wierzchołki reprezentujące masy nadajemy wagi  $bp$  lub  $c$ . Wagę  $bp$  nadajemy  $l-2$  razy, pozostałym krawędziom przypisujemy wagi  $c$ . Dla różnych konfiguracji takiego przyporządkowania mamy różne układy mechaniczne.

4° Dla zapewnienia w liczniku wykładnika  $s$  wagi postaci  $bp$  zmieniamy na  $bp+c$ . Możemy również zmienić wagę krawędzi  $i$ -tej na  $mp^2+bp$ ,  $mp^2+c$  lub  $mp^2+bp+c$ , tak aby suma minimalnych stopni wykładników  $p$  wielomianów  $z_i$  oraz odpowiadającego 2-drzewu o największej ilości wag postaci  $bp+c$  była równa  $s$ .

5° Dla zapewnienia wykładnika  $r$  uzupełniamy teraz wagi krawędzi masowych o składnik  $bp$ ,  $c$  lub  $bp+c$ . Krawędzie masowe nie wchodzi do żadnego 2-drzewa reprezentującego kolumnę liczby  $\frac{\partial A}{\partial l} \cap \frac{\partial A}{\partial i}$ , więc wartości  $l$  ani  $s$  nie zmienimy. Aby na podstawie danego grafu można było prowadzić dalsze etapy syntezy musi być spełniony warunek dotyczący ilości parametrów układu  $i_n$ ,  $i_n \geq l - s + p - r + 2$ . Do niektórych wag krawędzi masowych można jeszcze dodać składniki  $bp$  lub  $c$  tak, aby powyższa nierówność była spełniona. Możemy to przeprowadzić bowiem: dla  $s = 0$ ,  $r = 0$ ,  $l = \frac{m}{2} + 1$ , mamy

$$i_r = m - r + l - s + 2 = m + \frac{m}{2} + 3 = \frac{3}{2} \cdot m + 3,$$

$$i_n = \frac{m}{2} \cdot 3 + \left( \frac{m}{2} - 1 \right) \cdot 2 = \frac{5}{2} \cdot m - 2.$$



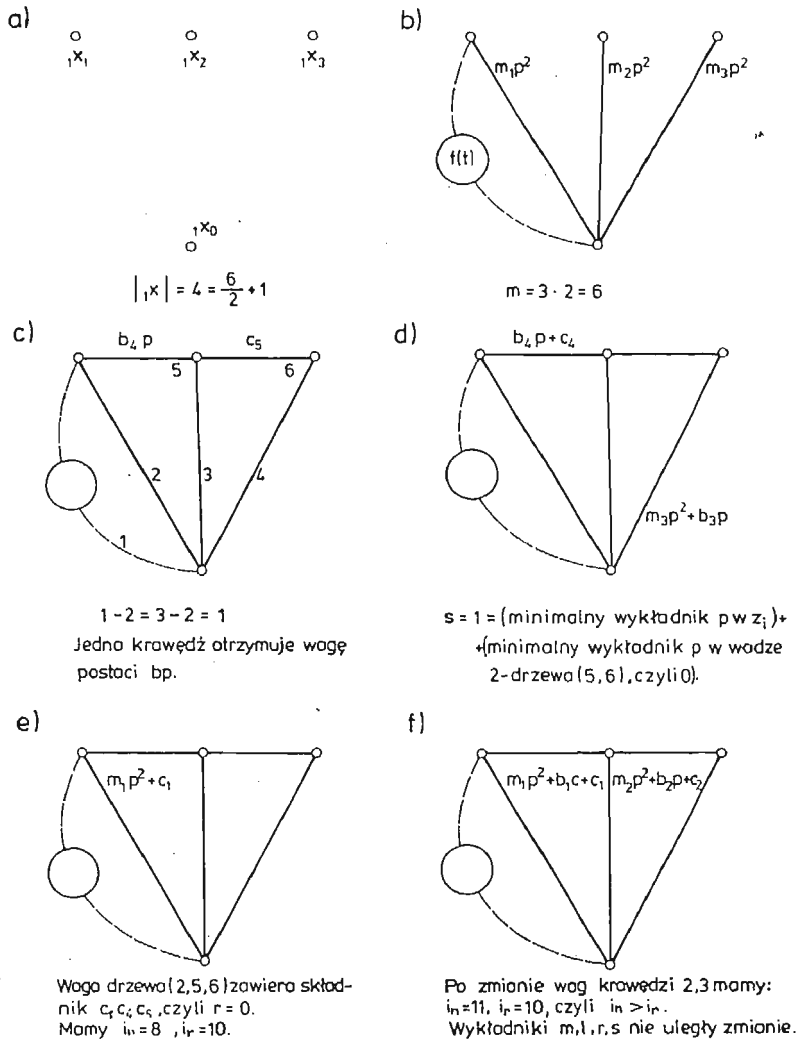
Zauważmy, że dla  $m \geq 6$ ,  $i_n \geq i_r$ . Jeżeli  $l$ ,  $s$  lub  $r$  zmienia się o 1, to ubywa również po jednym parametrze układu i nierówność też jest zachowana.

**Przykład**

Narysować graf układu realizującego funkcję przejścia w postaci:

$$(7) \quad K(p) = \frac{g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p}{a_6 p^6 + a_5 p^5 + \dots + a_1 p + a_0},$$

Dla funkcji (7) warunki 4.1 - 4.5 są spełnione. Załóżmy, że  $K(p)$  spełnia również warunki 2.1, 2.2, 3.1. Z postaci funkcji przejścia (7) wynika, że  $m = 6$ ,  $l = 3$ ,  $s = 1$ ,  $r = 0$ . Oznacza to, że liczba wierzchołków grafu wynosi  $|X| = \frac{6}{2} + 1 = 4$ . Na rysunku 5 przedstawiono kolejne etapy rysowania grafu i przyporządkowania jego krawędziom wag.



Rys. 5

Przedstawiony sposób jest możliwy do stosowania dla układów o małej liczbie stopni swobody, ponieważ na każdym etapie istnieje kilka możliwości przyporządkowania wag i dlatego sposób ten jest trudno algorytmizowalny.

#### Literatura cytowana w tekście

1. K. ARCZEWSKI, *Analiza i synteza drgających układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych*, Dys. doktorska, Pol. Warszawska, Warszawa 1974.
2. S. BELLERT, H. WOŹNIAK, *Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*, WNT, Warszawa 1968.
3. A. BUCHACZ, *Metoda grafów i liczb strukturalnych w badaniu drgań złożonych układów mechanicznych*, Dys. doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1978.
4. A. FIALKOW, I. GERST, *The Transfer Function of General Two Terminal Pair RC Networks*, Guart, Appl. Math. Vol. 10, No 2, pp. 113 - 127, July 1952.
5. B. KORZAN, *Elementy teorii grafów i sieci, Metody i zastosowania*. WNT, Warszawa 1978.
6. D. SIMSON, J. SŁOŃSKI, B. WOJDYŁO, *Charakteryzacja pierścieni liczb strukturalnych, Analiza struktury idealów i pewnych własności arytmetycznych tych pierścieni*. Instytut Matematyki. UMK w Toruniu. Preprint nr 8, Toruń 1973.
7. L. WEINBERG, *Linear Network Analysis and Synthesis*. Mc Graw-Hill, New York 1962.
8. J. WOJNAROWSKI, *Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych*. IPKM Pol. Śląska, PTMETS O/Gliwice z. 38, Gliwice 1977.
9. J. WOJNAROWSKI, *Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych*. PWN, Warszawa—Wrocław 1981.
10. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ. *Analiza i synteza liniowych układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych*. ZN IMiPKM z. 21/55, Gliwice 1974.
11. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ. *O możliwości optymalizacji układów mechanicznych przy użyciu liczb strukturalnych*. Zbiór ref. XIII Sympozjonu „Optymalizacja w Mechanice“, PTMETS O/Gliwice 1974.

#### Резюме

#### О КЛАССАХ 2-ДЕРЕВЬЕВ В СИНТЕЗЕ ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе сформулирована одна из возможных задач синтеза механических систем представляемых графами. Ряд рассуждений представлен для дискретных систем, состоящих из элементов Фойгта и Максвелла. Доказано, что в задаче синтеза существенное значение имеют два типа особых 2-деревьев графа, являющегося изображением структуры связи механической системы. В конце работы представлен алгоритм синтеза дискретной системы с элементами Фойгта.

#### Summary

#### ON THE CLASSES OF 2-TREES IN THE SYNTHESIS OF DISCRETE MECHANICAL SYSTEMS

In the paper a formulation of the problem of synthesizing mechanical systems has been proposed. The discussion refers to discrete mechanical systems composed of Voigt's and Maxwell's elements. It has been proved that in the problems of synthesis two types of 2-trees graphs (the images of joint structure of mechanical systems) play an important role. An algorithm of the synthesis of discrete mechanical systems with Voigt's elements has been given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 grudnia 1980 roku.