MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3/4, 20 (1982)

# O WIĘZACH WEWNĘTRZNYCH DLA MATERIAŁÓW TYPU PRĘDKOŚCIOWEGO

ANNA WACHECKA-SKOWRON

*Instytut Mechaniki*
*Uniwersytet Warszawski*

## 1. Wstęp

W literaturze znane jest pojęcie więzów wewnętrznych dla materiałów prostych [1, 2, 3, 4] jako pewnych ograniczeń na klasę dopuszczalnych deformacji. Ograniczenia te mają postać równań $\Phi(C) = 0$, gdzie $C$ jest miarą deformacji, a $\Phi: R^6 \to R^k$, $1 \leqslant k \leqslant 6$, znaną różniczkowalną funkcją. Tak wprowadzone więzy powodują pewną nieokreśloność naprężeń. Zakłada się, że tensor naprężenia $T$ jest sumą dwóch członów $T = T_0 + T_1$, z których jeden jest dany przez funkcjonał konstytutywny $T_0 = \mathcal{F}(C^{(t)})$, a drugi nazywamy reakcją więzów, [2]. Tak więc z reguły zakłada się, że ograniczeniom dla miar deformacji muszą towarzyszyć stany naprężenia reakcyjnego, utrzymujące te ograniczenia. Jednocześnie zakłada się, że praca tensora reakcji więzów $T_1$ na dowolnym tensorze prędkości odkształcenia $\dot{C}$, zgodnym z warunkiem $\Phi(C) = 0$ jest równa 0.

Tematem tego komunikatu jest zagadnienie więzów wewnętrznych w materiałach typu prędkościowego. Będziemy rozważać materiał typu prędkościowego, którego równanie konstytutywne ma postać

$$\overset{(n)}{T} = A_{n-1}\overset{(n-1)}{T} + \ldots + A_1\dot{T} + B_m\overset{(m)}{C} + \ldots + B_1\dot{C}, \tag{1.1}$$

gdzie $\overset{(i)}{T}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jest $i$-tą pochodną czasową drugiego tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa, $\overset{(l)}{C}$, $l = 1, 2, \ldots, m$, $l$-tą pochodną prawego tensora odkształcenia Greena, znane operatory $A_1, \ldots, A_{n-1}$, $B_1, \ldots, B_m$ działające z $R^6$ w $R^6$ mogą zależeć od $C$ i $T$.

Celem pracy jest wprowadzenie pojęcia więzów wewnętrznych dla materiału zdefiniowanego równaniem (1.1) i analiza przypadku szczególnego tych więzów, który prowadzi do pewnych uogólnień pojęcia nieściśliwości materiału. W pracy korzystamy z ogólnej koncepcji więzów wewnętrznych podanej w [5]. Koncepcja ta polega na uwzględnieniu sytuacji, w których ograniczenia dla miar deformacji są przedstawione w zupełnie ogólnej postaci, tj. postaci, która nie musi wyrażać się przy pomocy układu równań. Obejmuje ona również przypadki, w których mogą nie występować ograniczenia dla miar deformacji, a mimo to, mogą występować reakcje więzów.

## 2. Podstawowe relacje

Równanie (1.1) napiszemy w postaci

$$\sigma = Ae, \tag{2.1}$$

gdzie $\sigma \equiv \overset{(n)}{T}$, $e = (\overset{(n-1)}{T}, \ldots, \dot{T}, \overset{(m)}{C}, \ldots, \dot{C})$, $\mathrm{A} = \mathrm{A}(C, T)$ jest znanym operatorem liniowym określonym dla każdej pary $C$, $T$ na przestrzeni $E \equiv R^k$, $k = 6(n+m-1)$ o wartościach w $\Sigma = R^6$.

Definicja 1. Powiemy, że na własnościmateriału określone przez (2.1) zostały narzucone więzy wewnętrzne, gdy dana jest multifunkcja $\Psi: E \to 2^\Sigma$ o następujących własnościach
1. $K \equiv \mathrm{dom}\,\Psi \equiv \{e|\Psi(e) \neq \emptyset\}$ jest niepustym, domkniętym podzbiorem $E$,
2. $(\forall e \in K)(\Psi(e) = \{s\}) \Rightarrow ((s = 0) \wedge (K = E))$.

Zbiór $\Psi(e)$ jest zbiorem wszystkich możliwych reakcji więzów odpowiadających deformacji $e \in K$, tj. będziemy przyjmować, że

$$\sigma = \mathrm{A}e+s, \quad s \in \Psi(e). \tag{2.2}$$

Materiał, którego własności określone są relacją (2.2) będziemy nazywać materiałem typu prędkościowego z przyrostowymi więzami wewnętrznymi.

Definicja 2. Gdy $K = E$ i $(\exists e \in K)(\Psi(e) \neq \{0\})$, to ograniczenia narzucone na równania konstytutywne (2.1) nazwiemy quasi-więzami.

W przypadku quasi-więzów nie ma ograniczeń na $e$, a jednak występuje reakcja więzów $s$. Sytuację taką zilustrujemy na przykładach w następnym paragrafie.

Definicja 3. W przypadku gdy istnieje subróżniczkowalna [6] funkcja $\psi: E \to \bar{R}$ taka, że dla każdego $e \in K$ zbiór $\Psi(e)$ jest subróżniczką funkcji $-\psi$ w punkcie $e$, tzn.

$$\Psi(e) = -\partial\psi(e), \quad \forall e \in K, \tag{2.3}$$

więzy nazywamy wtedy subpotencjalnymi, a funkcję $\psi$ nazywamy subpotencjałem więzów.

Relacja (2.2) jest równoważna relacji

$$(y-e)\cdot s+\psi(y)-\psi(e) \geqslant 0, \quad \forall y \in K. \tag{2.4}$$

Kropka w ostatnim wzorze oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni E. Z (2.4) wynika, że

$$y\cdot s+\psi(y) \geqslant e\cdot s+\psi(e), \quad \forall y \in K. \tag{2.5}$$

Stąd wynika:

Lemat: Jeżeli przyrostowe więzy wewnętrzne w materiale typu prędkościowego są subpotencjalne, to wielkość $e \in K$ realizuje minimum funkcjonału

$$J(y) = y\cdot s+\psi(y) \quad \text{na zbiorze } K. \tag{2.6}$$

na zbiorze $K$.

Powyższe rozważania ogólne zilustrujemy przypadkiem szczególnym przyrostowych więzów wewnętrznych.

## 3. O pewnym uogólnieniu pojęcia nieściśliwości

Rozważmy przypadek szczególny równania (1.1), w którym $n = 1$, $m = 1$, tj. równanie postaci

$$\sigma = \mathrm{A}e, \quad \text{gdzie } \sigma \equiv \dot{T}, \quad \mathrm{A} = \mathrm{B}_1, \quad e = \dot{C}. \tag{3.1}$$

W dalszym ciągu traktujemy więc $\sigma$ jako tensor przyrostu (prędkości) naprężenia oraz $e$ jako tensor przyrostu (prędkości) odkształcenia. Znany dla danej pary $C$, $T$ operator A jest określony na przestrzeni $E = R^6$.

Rozłóżmy tensor przyrostu odkształcenia $e$ na część kulistą i dewiator

$$e = e^D + 1e^0, \quad \text{gdzie } e^D \in E^D \subset E, \quad e^0 \in R, \tag{3.2}$$

Analogicznie postąpimy z tensorem przyrostu naprężeń $\sigma$

$$\sigma = \sigma^D + 1\sigma^0, \quad \text{gdzie } \sigma^D E^D \subset E, \quad \sigma^0 \in R. \tag{3.3}$$

Przyjmujemy równania konstytutywne (3.1) w postaci

$$\begin{aligned} \sigma^D &= A^D e^D, \\ \sigma^0 &= A^0 e^0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

gdzie $A^D : E \to E$, $A^0 : R \to R$ są znanymi operatorami. Narzucimy na (3.4) więzy dane przez multifunkcję $\Psi = (\Psi_D, \Psi_0)$, $\Psi_D : E^D \to 2^{E^D}$, $\Psi_0 : R \to 2^R$, które zdefiniowane są następującą relacją

$$\begin{aligned} \sigma^D &= A^D e^D + s^D, \\ \sigma^0 &= A^0 e^0 + p, \end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie $s^D \in \Psi_D(e^D)$, $p \in \Psi_0(e^0)$.
Przyjmujemy, że $\forall e^D$, $\Psi_D(e^D) = \{0\}$. Wtedy relacja (3.5) ma postać

$$\begin{aligned} \sigma^D &= A^D e^D, \\ \sigma^0 &= A^0 e^0 + p. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wielkość $p$ opisują reakcję więzów.

Niech $\psi : R \to R$ będzie funkcją taką, że

$$\Psi_0(e^0) = -\partial\psi(e^0), \quad \forall e^0 \in R.$$

Wtedy relację (2.4) można zapisać następująco:

$$(r - e^0)p + \psi(r) - \psi(e^0) \geqslant 0, \quad \forall r \in R, \tag{3.7}$$

gdzie $p \in -\partial\psi(e^0)$.

Rozważmy teraz pewne przypadki szczególne funkcji $\psi$.

1. Przyjmiemy, że

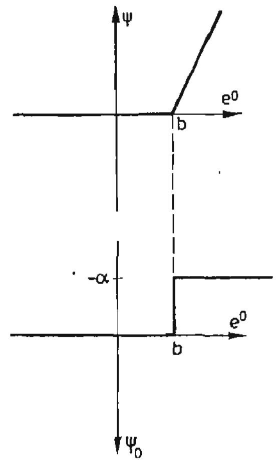
$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \leqslant b \\ \alpha(r-b) & \text{dla } r > b, \end{cases} \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0.$$

Wtedy

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < b \\ [-\alpha, 0] & \text{dla } r = b \\ -\alpha & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Wykres funkcji $\psi(.)$ oraz multifunkcji $\Psi_0(.)$ przedstawiono na rys. 1. Argument $e^0$ może przybierać dowolne wartości. Reakcja więzów $p \in -\partial\psi(e^0)$ jest stała dla $e^0 > b$.

Jak widać są to quasi-więzy, bo nie ma ograniczeń na dziedzinę multifunkcji $\Psi_0$ tzn. $K = R$, a jednak jest reakcja więzów. Materiał nie reaguje na więzy, jeżeli przyrost kulistej




Rys. 1

części tensora odkształcenia nie przekracza stanu b. Dla $e^0 \geqslant b$ występuje reakcja więzów, która ma wartość stałą równą $-\alpha$, jeżeli $e^0 > b$.

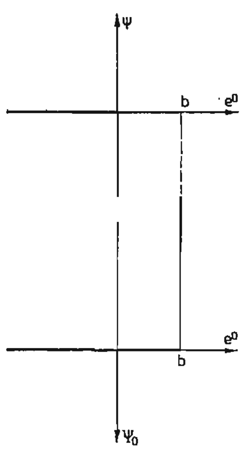
2. Niech teraz

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \leqslant b, \\ +\infty & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Wtedy

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < b, \\ R^- & \text{dla } r = b, \\ \emptyset & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Funkcja $\psi(\,.\,)$ oraz multifunkcja $\Psi_0(\,.\,)$ są przedstawione na rys. 2. Jeżeli część kulista $e^0$ przyrostu tensora odkształcenia nie przekracza stanu $b$, to nie ma reakcji więzów. Przekroczenie stanu $b$ jest fizycznie niemożliwe.




Rys. 2

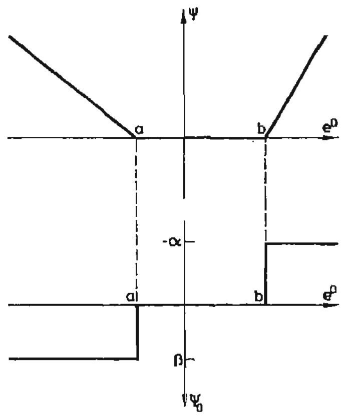
3. Przyjmijmy, że

$$\psi(r) = \begin{cases} \beta(a-r) & \text{dla } r < a, \quad \beta = \text{const}, \quad \beta > 0 \\ 0 & \text{dla } r \in [a, b] \\ \alpha(r-a) & \text{dla } r > b, \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Wtedy

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} \beta & \text{dla } r < a, \\ [0, \beta] & \text{dla } r = a, \\ [-\alpha, 0] & \text{dla } r \in (a, b), \\ 0 & \text{dla } r = b, \\ -\alpha & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy funkcji $\psi$ i multifunkcji $\Psi_0$. W rozpatrywanym przykładzie, podobnie jak w przypadku 1, nie ma ograniczeń na dziedzinę multifunkcji $\Psi_0$; $K = R$ są to więc quasi-więzy. Jeśli $e^0 \in (a, b)$, to nie ma reakcji więzów. Niezerowa reakcja więzów pojawia się, gdy $e^0 \notin (a, b)$.




Rys. 3

4. Materiał „częściowo" nieściśliwy definiujemy następująco:

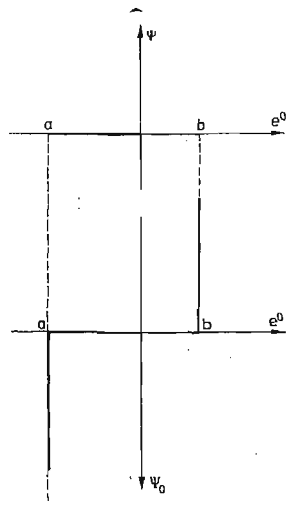
$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r \in [a, b] \\ +\infty & \text{dla } r \notin [a, b]. \end{cases}$$

($\psi$ jest po prostu funkcją indykatorową przedziału $[a, b]$.)
Wtedy

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } r < a \\ R^+ & \text{dla } r = a \\ 0 & \text{dla } r \in (a, b) \\ R^- & \text{dla } r = b \\ \emptyset & \text{dla } r > b. \end{cases}$$

Przebieg funkcji $\psi(\,.\,)$ oraz multifunkcji $\Psi_0(\,.\,)$ ilustruje rys. 4. W tym przypadku nie jest możliwe, by część kulista przyrostu stanu odkształcenia materiału osiągnęła stan $e^0$, który nie należałby do przedziału [a, b]. Uniemożliwiają to reakcje więzów. Rozważane w tym przykładzie więzy są więzami w tradycyjnym znaczeniu tego słowa, gdyż

$$K = [a, b] \neq R.$$



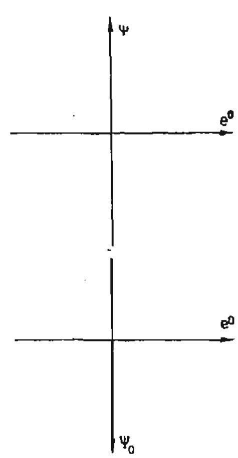

Rys. 4

5. Granicznym przypadkiem dla 4 jest materiał nieściśliwy, [1], dla którego

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r = 0 \\ \emptyset & \text{dla } r \neq 0 \end{cases}$$

oraz

$$\Psi_q(r) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } r < 0 \\ R & \text{dla } r = 0 \\ \emptyset & \text{dla } r > 0. \end{cases}$$




Rys. 5

Rysunek 5 przedstawia wykresy funkcji $\psi(\,.\,)$ oraz multifunkcji $\Psi_0(\,.\,)$. Dla stanu $e^0 = 0$ reakcja więzów $p$ może być równa dowolnej liczbie rzeczywistej. Materiał nieściśliwy nie może osiągnąć stanu $e^0 \neq 0$.

Zauważmy, że ograniczenia (więzy) nakładaliśmy tylko na część kulistą tensora przyrostu odkształcenia, dewiator $e^D$ tego tensora może przebierać dowolne wartości z przestrzeni $E^D$.

### Literatura cytowana w tekście

1. C. Truesdell, W. Noll, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik III/3, Berlin—Heidelberg—New York, Springer Verlag (1965).
2. T. Manacorda, *Zagadnienia elastodynamiki*, Ossolineum (1978).
3. A. Signorini, *Transformazioni termoelastiche finite*, Mem. 3 , Ann. Mat. Pura Appl. (4), 39, 147 (1955).
4. A. E. Green, P. M. Naghdi, J. A. Trapp, *Thermodynamics of a continuum with internal constraints* Int. J. Engng. Sci. 8, 891, (1970).
5. Cz. Woźniak, *On the non-classical boundary value problems in structural and solid mechanics*, Raport serii PRE nr 3/81, Wrocław (1981).

Резюме

О ВНУТРЕННЫХ СВЯЗЯХ МАТЕРИАЛОВ СКОРОСТНОГО ТИПА

Работа посвящена в ведению понятия внутренных связей для материала определенного уравнением

$$\overset{(n)}{T} = A_{n-1}\overset{(n-1)}{T} + \ldots + A_1\dot{T} + B_m\overset{(m)}{C} + \ldots + B_1\dot{C}$$

Проведенный анализ частного случая этпх связеи ведёт к некоторому обобщению понятия несжимаемого материала.

Summary

INTERNAL CONTRAINTS FOR RATE-TYPE MATERIALS

The motion of the internal constraints has been introduced for materials governed by the equation

$$\overset{(n)}{T} = A_{n-1}\overset{(n-1)}{T} + \ldots + A_1\dot{T} + B_m\overset{(m)}{C} + \ldots + B_1\dot{C}$$

A particular case of such constraints leads to a generalization of the motion of incompressible material.