MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3/4, 20 (1982)

O BŁĘDZIE ROZWIĄZAŃ PRZYBLIŻONYCH W MECHANICE

WIESŁAW NAGÓRKO

Instytut Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

W pracy rozważa się struktury matematyczne stosowane przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych mechaniki. Rozpatruje się pojęcie rozwiązania przybliżonego oraz formułuje metodę szacowania jego błędu bezwzględnego w stosunku do nieznanego rozwiązania dokładnego. Jako przykład analizowana jest liniowa teoria sprężystości.

1. Rozwiązania przybliżone

Wybrane cechy ciał materialnych machanika bada i opisuje przy pomocy pewnych przedmiotów matematycznych. W niniejszej pracy przedmiotami takimi będą *struktury* matematyczne następującej postaci

$$\mathfrak{M} = \langle X, F, \mu \rangle \tag{1.1}$$

gdzie X, F są podzbiorami w przestrzeniach Banacha, zaś μ jest relacją dwuargumentową $\mu \subset X \times F$.

Problemem mechaniki nazywać będziemy poszukiwanie dla ustalonego $f_0 \in F$ takiego elementu $x_0 \in X$, że

$$(x_0, f_0) \in \mu. \tag{1.2}$$

Element x_0 jest wtedy *rozwiązaniem* tego problemu.

Błędem bezwzględnym przyjęcia za rozwiązanie problemu (1.2) pewnego elementu $x \in \operatorname{dom} \mu$ jest

$$\varepsilon(x, x_0, f_0) \equiv \max_{f \in \mu_x}(\|x - x_0\|, \|f - f_0\|), \tag{1.3}$$

gdzie $\mu_x = \{f \in F;\ (x, f) \in \mu\}$.

Jedną z ogólnych metod rozwiązania problemu (1.2) jest metoda aproksymacji polegająca na określeniu nowej relacji $\tilde{\mu}$ aproksymującej *ex definitione* relację μ.

W niniejszej pracy relację aproksymującą określimy przez ustalenie $a \geqslant 0$ tak, że dla każdego $(x_0, f_0) \in \mu$ jest

$$\varepsilon(x, x_0, f_0) \leqslant a. \tag{1.4}$$

Problemem aproksymacyjnym dla problemu (1.2) jest wtedy poszukiwanie dla ustalonego f_0 takiego elementu x, że

$$(x, f_0) \in \tilde{\mu}. \tag{1.5}$$

Rozwiązanie (1.5) nazwiemy *rozwiązaniem przybliżonym* rozwiązania (1.2). Tak określone rozwiązanie przybliżone jest uogólnieniem definicji wprowadzonej w [1].

Jeśli nazwiemy pary $(x, f) \in \mu$ *procesami* zaś x *przyczynami* i f *skutkami* lub *reakcjami* to wtedy warunek (1.4) można wypowiedzieć jako żądanie bliskości w sensie normy różnicy przyczyn i odpowiadających jej różnic skutków.

Sprawdzenie z definicji (1.4), (1.5) czy element x jest rozwiązaniem przybliżonym wymaga znajomości odległości $||x-x_0||$ między nieznanym rozwiązaniem dokładnym a elementem x. Odległość ta na ogół nie jest dana. Inaczej z odległością $||f-f_0||$ gdyż znając x i μ potrafimy określić f a tym samym $||f-f_0||$.

Trudność oszacowania $||x-x_0||$ usuniemy zakładając, że możliwa jest konstrukcja funkcjonału

$$\delta: X \to \bar{R}_+, \tag{1.6}$$

spełniającego warunki

$$(\forall x_0, x \in \mathrm{dom}\,\mu)[||x-x_0|| \leqslant \delta(x, (x_0 \in \mathrm{dom}\,\delta \Rightarrow \delta(x_0) = 0)].^{1)} \tag{1.7}$$

W przypadku istnienia (1.6) spełniającego (1.7) warunkiem dostatecznym na to, by $x \in \mathrm{dom}\,\mu$ było rozwiązaniem przybliżonym jest

$$\max_{f \in \mu_x}(\delta(x), ||f-f_0||) \leqslant a. \tag{1.8}$$

Funkcjonał δ nazwiemy *funkcjonałem błędu*. Przykłady konstrukcji takiego funkcjonału podamy w punktach 2 i 3.

2. Struktury liniowe

Niech teraz relacja μ występująca w (1.1) jest operatorem $A \in (X \to F)$ liniowym, ograniczonym i odwracalnym. Operator A^{-1} jest także liniowy i ograniczony. Ustalmy tak jak poprzednio f_0 zaś $x_0 = A^{-1}(f_0)$.

Z definicji normy operatora mamy

$$||x-x_0|| \leqslant ||A^{-1}||\,||f-f_0||$$

dla wszystkich $x \in X$ i $f = A(x)$.

Funkcjonał błędu (1.6) możemy przyjąć w postaci

$$\delta(x) = m||A(x)-f_0||, \tag{2.1}$$

gdzie m jest dane i $m \geqslant ||A^{-1}||$. Funkcjonał ten określony jest na całej przestrzeni X.

[1] Zapis $f: X \to Y$ oznacza, że operator f jest określony *w* przestrzeni X, zaś $f \in (X \to F)$ *na* przestrzeni X.

Podstawiając (2.1) do (1.8) otrzymamy warunek dostateczny na to, by dowolne x było rozwiązaniem przybliżonym

$$(2.2) \qquad ||A(x)-f_0|| \leqslant \min\left(\frac{a}{m}, a\right).$$

Dla pewnych operatorów A wielkość $r = A(x)-f_0$ nazywa się czasami *siłami reakcji* [3].

Z (2.2) wynika, że dla operatorów A mających normę $||A^{-1}||$ mniejszą od jedności możliwe jest szacowanie błędu bezwzględnego ε przez wielkość sił reakcji. Inaczej mówiąc, jeżeli $m \leqslant 1$ wtedy z tego, że $||r|| \leqslant a$ wynika $||x-x_0|| \leqslant a$. W przeciwnym razie, dla $m > 1$ szacowanie takie nie jest prawdziwe. Wynika stąd, że także dla liniowej teorii sprężystości, która jest szczególnym przykładem struktury liniowej szacowanie błędu przez siły reakcji bez obliczenia m nie jest uzasadnione.

3. Struktury w przestrzeniach Hilberta

W poprzednim punkcie podaliśmy przykład funkcjonału błędu zależnego od sił reakcji. Tak skonstruowany funkcjonał pozwala z wielkości sił reakcji wyciągać wnioski o wielkości błędu bezwzględnego rozwiązania przybliżonego. W tym punkcie zajmiemy się inną charakterystyką błędu bezwzględnego.

Ustalmy pewną strukturę $\langle X, F, \mu\rangle$, w której X jest przestrzenią Hilberta oraz $(x_0, f_0) \in \mu$.

W celu określenia dziedziny funkcjonału błędu rozpatrzmy dwie ortogonalne rozmaitości liniowe X_1 i X_2 tak, że dla każdego $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ jest

$$(3.1) \qquad (x_1-x_0)(x_2-x_0) = 0.$$

Funkcjonał δ określimy dla x zdefiniowanych w następujący sposób

$$(3.2) \qquad x = \frac{1}{2}(x_1+x_2).$$

Przyporządkowanie (3.2) jest jednoznaczne.

Równość (3.1) jest równoważna dla x spełniających (3.2) równaniu

$$||x-x_0|| = \frac{1}{2}||x_1-x_2||.$$

Równoważność ta pozwala na określenie funkcjonału błędu w postaci

$$(3.3) \qquad \delta(x) = \frac{1}{2}||x_1-x_2||.$$

W tym przypadku rozwiązaniem przybliżonym jest każdy element $x = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$ który spełnia

$$(3.4) \qquad \max_{f \in \mu_x}\left(\frac{1}{2}||x_1-x_2||, ||f-f_0||\right) \leqslant a.$$

Przykład konstrukcji ortogonalnych rozmaitości liniowych podamy w następnym punkcie.

4. Przykład struktury w liniowej teorii sprężystości

Zdefiniujmy pewną strukturę liniowej teorii sprężystości $\langle T, F, \lambda\rangle$. W celu skonstruowania elementów tej struktury podamy kilka definicji.

Niech Ω będzie regularnym obszarem w R^3.

Oznaczmy przez X przestrzeń wszystkich funkcji wektorowych $x \in (\Omega \to R^3)$ klasy C^2 w Ω i klasy C^1 w $\bar{\Omega}$.

Niech dalej D będzie pewnym niepustym zbiorem w X takim, że wszystkie elementy D są odwracalne. Określmy M jako

$$M = \{x: x = i\cdot(d-1), i \in I, d \in D\}, \tag{4.1}$$

gdzie I jest zbiorem wszystkich izometrii przestrzeni R^3 obciętych do codom$d$ a 1 jest identycznością w X. Elementy określone warunkiem (4.1) oznaczymy przez u i nazwiemy przemieszczeniami. Najogólniejszym zbiorem (4.1) jest cała przestrzeń X.

Niech T będzie przestrzenią symetrycznych funkcji tensorowych $t \in (\Omega \to R^{3\times 3})$ takich, że zachodzi warunek

$$(\forall t \in T)\Big(\int_\Omega A_{ijkl} t_{ij} t_{kl} dv < \infty\Big) \tag{4.1}$$

gdzie $t \equiv (t_{ij})$, $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$.
Przestrzeń T nazywa się przestrzenią naprężeń.

Wyposażmy przestrzeń T w iloczyn skalarny [2];

$$t^1 t^2 = \int_\Omega A_{ijkl} t^1_{ij} t^2_{kl} dv. \tag{4.2}$$

Określmy przestrzeń F jako iloczyn kartezjański $B\times P\times Q$ gdzie B jest przestrzenią funkcji wektorowych ciągłych $b \in (\Omega \to R^3)$ P przestrzenią funkcji wektorowych prawie ciągłych $p \in (\partial_1\Omega \to R^3)$ zaś $Q = X|_{\partial_2\Omega}$. Przyjmuje się, że $\partial_i\Omega$, $i = 1, 2$ są takie, że $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$, $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$.
Elementy F oznaczać będziemy przez $f = (b, p, q)$. Funkcje b nazywa się siłami masowymi a p obciążeniami powierzchniowymi.

W celu określenia relacji λ przyjmiemy, że dane są operatory $K \in (T \to B\times P)$ postaci

$$K(t) = (\operatorname{div} t, t|_{\partial_1\Omega} n)$$

gdzie funkcja wektorowa $n \in (\partial_1\Omega \to R^3)$ równa jest wersorowi zewnętrznie normalnemu do $\partial_1\Omega$ oraz $L \in (X \to T)$ postaci

$$L(x) = \frac{1}{2} C(\nabla x + \nabla x^T)$$

gdzie $c = (c_{ijkl})$ są funkcjami skalarnymi określonymi w Ω (stałymi sprężystości) spełniającymi warunki

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

$$A_{ijkl} C_{klmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}), \qquad i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3.$$

Relację λ przyjmiemy jako

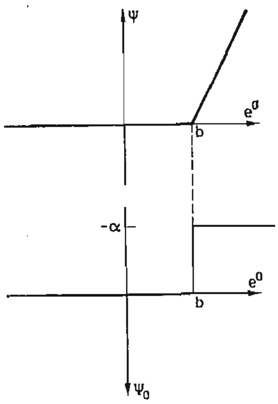
$$(t, (b, p, q)) \in \lambda \Leftrightarrow (\exists u \in M)\big(t = L(u)| \wedge K(t) = (b, p) \wedge u|_{\partial_2\Omega} = q\big). \tag{4.3}$$

Dla struktur $\langle T, F, \lambda\rangle$ formułuje się problem (1.2) jako poszukiwanie dla ustalonego (b, p, q) takiego $t \in T$, że

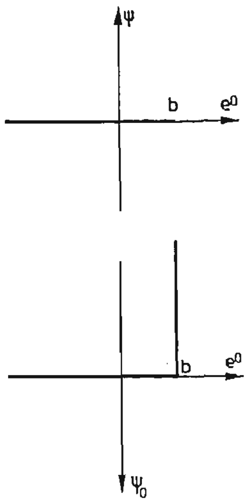
$$\big(t, (b, p, q)\big) \in \lambda. \tag{4.4}$$

Oznacza to, że trzeba znaleźć takie $u \in M$, że

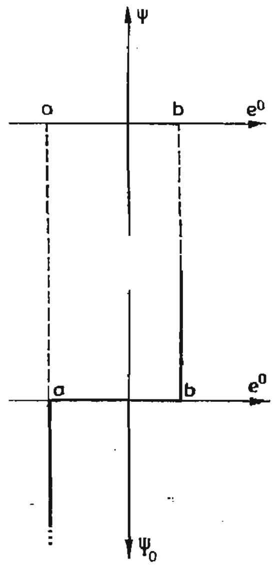
$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}C(\nabla u + \nabla u^T)\\ (\operatorname{div} t, t|_{\partial_1\Omega} n] &= (b, p)\\ u|_{\partial_2\Omega} &= q \end{aligned} \tag{4.5}$$



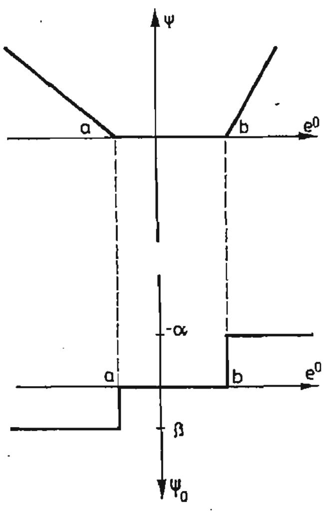
Rys. 1



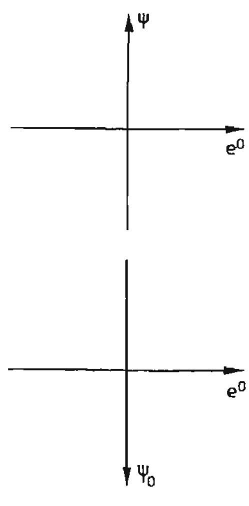
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Poszukiwanie $u \in X$ spełniającego (4.5) nazywa się *mieszanym zagadnieniem brzegowym teorii sprężystości.*

Dla problemu (4.4) sformułować można problem aproksymacyjny.

Zdefiniujmy w tym celu ortogonalne rozmaitości liniowe spełniające (3.1). (Dla uproszczenia pomijamy siły masowe).

Niech t_1 będzie naprężeniem kinematycznym dopuszczalnym

$$K(t_1) = (0, p), \tag{4.6}$$

a t_2 naprężeniem statacznie dopuszczalnym

$$(\exists u_2 \in M)\big(t_2 = L(u_2) \wedge K(t_2) = (0, t_2|_{\partial_1 \Omega} n), \quad u_2|_{\partial_2 \Omega} = q\big) \tag{4.7}$$

zaś t_0 rozwiązaniem problemu (4.4).

Wykorzystując (4.2) łatwo sprawdzić, że zachodzi związek

$$(t_1 - t_0)(t_2 - t_0) = 0.$$

Zgodnie więc z p. 3, jeżeli za rozwiązanie przybliżone t problemu (4.4) przyjmiemy średnią arytmetyczną naprężeń spełniających (4.6) i (4.7) oraz, że $t\ \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \in \operatorname{dom} \lambda$ wtedy błąd bezwzględny równy jest

$$\varepsilon(t, t_0, f_0) = \max \frac{1}{2} (\|t_1 - t_2\|, \|f - f_0\|) \tag{4.8}$$

$$f = K\left(\frac{1}{2}(t_1 + t_2)\right), \quad f_0 = (0, p)$$

gdzie

Metoda opisana w p. 3 sprowadza się w tym przypadku do zastąpienia poszukiwania rozwiązania (4.4) przez poszukiwanie rozwiązań (4.6) i (4.7) zaś błąd bezwzględny rozwiązania przybliżonego $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ równy jest (4.8).

Literatura cytowana w tekście

1. W. NAGÓRKO, *Sulle soluzioni approssimate in meccanica,* Riv. Mat. Univ. Parma, **4**, 7 (1981), 1 - 8.
2. J. L. SYNGE, The Hypercircle im Mathematical Physics, Cambrigde University Press, 1957
3. CZ. WOŹNIAK, *Constrained continuous media,* Bull. Acad. Polon. Sci, Série Sci. Techn., **21** (1973).

Р е з ю м е

ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В МЕХАНИКЕ

В статье обсуждается математические структуры применяемые при решении краевых задач в механике. Рассматривается понятие приближённого решения и формулируется метод оценки его погрешности в сравнению с неизвестном точном решением. Как пример анализируется линейная теория упругости.

S u m m a r y

ON APPROXIMATE SOLUTIONS IN MECHANICS

Mathematical structures applied in solutions of mechanical boundary value problems are considered. A notion of an approximate solution has been formulated as well as a method of estimation of error with respect to unknown exact solution. As an example the linear theory of elasticity has been analized.