MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3/4, 20 (1982)

NIELINIOWA TEORIA STATECZNOŚCI POWŁOK PRZEKŁADKOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM POPRZECZNEJ ODKSZTAŁCALNOŚCI RDZENIA

FRANCISZEK ROMANÓW, JERZY CZMOCHOWSKI

Wrocław

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności sprężystej małowyniosłych walcowych powłok trójwarstwowych z miękkim rdzeniem, odkształcalnym w kierunku prostopadłym do powłoki. Zagadnienie to w zakresie liniowym rozwiązano w pracy [1] dla powłok ściskanych i w pracy [2] dla powłok ścinanych. Zgodnie z teorią cienkich jednorodnych powłok przyjmuje się dla warstw zewnętrznych hipotezę przemieszczeniową Kirchhoffa-Love'a (K—L). W stosunku do rdzenia zastosowano metodę przedstawioną w pracy [1, 2], uwzględniającą poprzeczną odkształcalność rdzenia. Z zasady prac wirtualnych wyprowadzono równania równowagi sił i zespół naturalnych warunków brzegowych. Układ pięciu równań równowagi wyrażonych w przemieszczeniach, po wprowadzeniu funkcji naprężeń i funkcji przemieszczeń sprowadzono do trzech równań różniczkowych cząstkowych, które rozwiązano przybliżoną metodą Bubnowa-Galerkina.

Celem ilustracji zjawisk występujących w stanie zakrytycznym oraz wpływu początkowych imperfekcji podano prosty przykład w którym rozwiązano zadanie stateczności sprężystej swobodnie podpartej otwartej powłoki walcowej przy osiowym ściskaniu. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie wykresu siła — ugięcie (rys. 3). Natomiast wpływ poprzecznej odkształcalności rdzenia na stateczność początkową przedstawiono na wykresie siły krytycznej w funkcji grubości rdzenia.

Wstęp

W większości prac dotyczących teorii stateczności sprężystej powłok trójwarstwowych zakłada się stałą wartość ugięcia na grubości rdzenia. Założenie to jest słuszne jedynie dla powłok cienkich, natomiast jest błędne dla powłok o stosunkowo grubym rdzeniu, gdzie decydujące znaczenie mają odkształcenia w kierunku prostopadłym do powierzchni powłoki. Poprzeczne odkształcenia rdzenia uwzględnił już E. REISSNER [3], gdzie przy założeniu w rdzeniu liniowej zmiany naprężeń normalnych do płyty wyprowadził równania równowagi sił płyty trójwarstwowej. W ten sam sposób badali stateczność płyt V. DUNDROVA, V. KOVARIK, P. SLAPAK [4], a A. L. POTASZ [7] i KARAVANOV [10] badali skończone ugięcia płyt ortotropowych. Inną grupa prac uwzględniających ściśliwość poprzeczną rdzenia opiera się na linearyzacji ugięć w warstwie lekkiej Ju. N. NOVICKOV [5], E. I. GRIGOLJUK, P. P. CULKOV [6], L. POMAZI [15]. W pracy [14] autorzy wychodząc z równości odkształceń przy ściskaniu rdzenia i okładziny, określili krytyczne obciążenie tylko dla cylindrycznie ściskanej tarczy o dowolnej grubości. Jednak ze względu na zawyżone wartości naprężeń krytycznych w tarczach o średniej grubości, teoria ta ma ograniczone zastosowanie.

Zagadnieniem nieliniowym stateczności sprężystej cienkich powłok trójwarstwowych i stanami zakrytycznymi zajmowało się wielu autorów, co przedstawiono w pracy [13].

Z krajowych publikacji zasługuje na uwagę praca W. SZYCA [8], gdzie autor określił wpływ początkowych imperfekcji oraz udział rdzenia w przenoszeniu obciążeń ściskających stycznych do powłoki.

Natomiast J. G. Ronan i J. S. Kao [9] zbadali wpływ sztywności rdzenia na górną i dolną wartość obciążenia krytycznego ściskanych powłok walcowych trójwarstwowych.

1. Podstawowe założenia

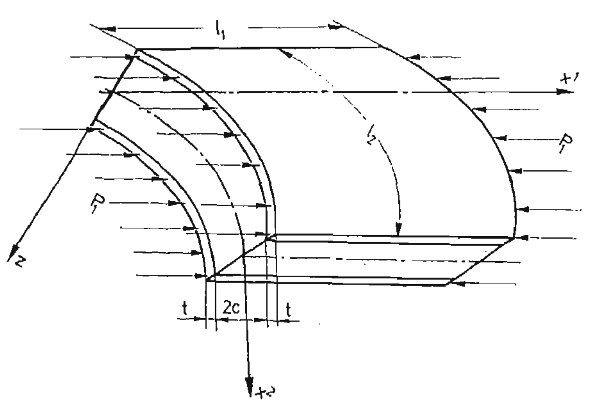
Rozpatrzymy zagadnienie stateczności powłoki trójwarstwowej typu sandwich tzn. złożoną z dwóch warstw „sztywnych" grubości t, zwanych dalej okładzinami, pomiędzy którymi znajduje się warstwa o znacznie mniejszej sztywności, o grubości 2c, zwanej dalej rdzeniem.

Przyjmujemy, że okładziny pracują jak cienkie powłoki, dla których słuszna jest hipoteza Kirchhoffa-Love'a. Dla rdzenia istotne znaczenie mają odkształcenia w kierunku normalnym do powierzchni środkowej i odkształcenia od poprzecznego ścinania. Siły podłużne przenoszą tylko warstwy zewnętrzne. Dla miękkich rdzeni ($Et/E_uc > 10$) przyjmuje się, że naprężenia normalne i tnące w płaszczyźnie rdzenia są pomijalnie małe w stosunku do pozostałych naprężeń. Dla rdzenia przyjmujemy hipotezę przemieszczeniową zgodnie z [1].

Powłokę warstwową odnosimy do ortogonalnego układu współrzędnych x^1, x^2, z rys. 1.

Przemieszczenia dla okładzin zgodnie z hipotezą K—L przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
u_\alpha^f &= u_\alpha^{0f} + \left(z \pm c \pm \frac{t}{2}\right)\varphi_\alpha, \\
u_3^f &= w,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$



Rys. 1. Schemat powłoki walcowej.

gdzie

$f \equiv g$ — dla górnej okładziny; $-(c+t) < z < -t$,

$f \equiv d$ — dla dolnej okładziny; $c < z < c+t$; (znak minus w nawiasie)

u_α^{0f} — przemieszczenie powierzchni środkowej okładziny,

φ_α^f — kąt obrotu płaszczyzny prostopadłej do powierzchni środkowej okładziny (zgodnie z hipotezą K—L $\varphi_\alpha = -w_{,\alpha}$),

w — ugięcie okładzin.

Przemieszczenia w rdzeniu przyjmujemy w postaci [1, 2]

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_\alpha^c &= u_\alpha^+ - \frac{u_\alpha^-}{c} z - \frac{t}{2c} \varphi_\alpha z f(z), \\
w^c &= w f(z),
\end{aligned}
\right.
\tag{1.2}
$$

gdzie:

$$
u_\alpha^+ = \frac{1}{2}(u_\alpha^{0g} + u_\alpha^{0d}), \qquad u_\alpha^- = \frac{1}{2}(u_\alpha^{0g} - u_\alpha^{0d}),
\tag{1.3}
$$

$f(z)$ — funkcja zależna tylko od współrzędnej prostopadłej do powłoki.

Odkształcenia okładzin zgodnie z nieliniową teorią powłok przyjmujemy w postaci:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta}^f &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^f + u_{\beta,\alpha}^f + w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} w_{,\beta}^0 + w_{,\alpha}^0 w_{,\beta}) - k_{\alpha\beta} w, \\
\varepsilon_{\alpha 3}^f &= q_\alpha = \varphi_\alpha + w_{,\alpha},
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

gdzie:

w^0 — początkowe nieregularności powierzchni okładzin (początkowe imperfekcje),

$k_{\alpha\beta}$ — główne krzywizny powierzchni środkowej okładzin.

W dalszej części wprowadzimy odkształcenia sprowadzone do powierzchni środkowej powłoki

$$
\varepsilon_{\alpha\beta}^f = e_{\alpha\beta}^+ \pm e_{\alpha\beta}^- + \left(z \pm c \pm \frac{t}{2}\right) \varkappa_{\alpha\beta},
\tag{1.5}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha\beta}^+ &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^+ + u_{\beta,\alpha}^+ + w_{,\alpha} w_{,\beta} + w_{,\alpha} w_{,\beta}^0 + w_{,\alpha}^0 w_{,\beta}) - k_{\alpha\beta} w, \\
e_{\alpha\beta}^- &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^- + u_{\beta,\alpha}^-), \\
\varkappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Odkształcenia w rdzeniu określamy w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha 3}^c &= u_{\alpha,3}^c + w_{,\alpha}^c = -\frac{u_\alpha^-}{c} - \frac{t}{2c}\left(f + z\frac{df}{dz}\right)\varphi_\alpha + f w_{,\alpha} \\
\varepsilon_{33}^c &= \frac{df}{dz} w.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Zgodnie z prawem Hooke'a naprężenia w warstwach przyjmują postać

$$\sigma^f_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\varepsilon^f_{\alpha\beta}+\nu\delta_{\alpha\beta}\varepsilon^f_{\gamma\gamma}\},$$

(1.8)
$$\sigma^c_{\alpha 3} = G_c\,\varepsilon^c_{\alpha 3},$$

$$\sigma^c_{33} = E_c\,\varepsilon^c_{33},$$

gdzie: E, ν — moduł Younga i liczba Poissona materiału okładzin,
E_c, G_c — moduł Younga i moduł Kirchhoffa materiału rdzenia.

2. Równania równowagi

Równania równowagi powłoki trójwarstwowej znajdujemy wykorzystując zasadę prac wirtualnych, zgodnie z którą energia odkształcenia sprężystego układu jest równa pracy sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach

$$\delta\Pi = \delta W_z, \tag{2.1}$$

gdzie: $\delta\Pi$ oznacza wariację energii odkształcenia sprężystego powłoki

$$\Pi = \Pi^g + \Pi^d + \Pi^c, \tag{2.2}$$

$\Pi^{g,d,c}$ — są odpowiednio energią odkształcenia sprężystego warstwy górnej, dolnej i rdzenia,

δW_z — oznacza wariację sił pracy zewnętrznych

$$W_z = W_\Omega + W_s, \tag{2.3}$$

W_Ω — praca sił działających na powierzchnię Ω powłoki,

W_s — praca sił przyłożonych do brzegów powłoki.

Wariację energii sprężystej możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\delta\Pi = \iint_\Omega \Big[\int_{-(c+t)}^{-c} \sigma^g_{\alpha\beta}\delta\varepsilon^g_{\alpha\beta}dz + \int_{-c}^{c}\sigma^c_{i3}\delta\varepsilon^c_{i3}dz + \\ + \int_{c}^{c+t}\sigma^d_{\alpha\beta}\delta\varepsilon^d_{\alpha\beta}dz\Big]d\Omega = \iint_\Omega \Big[N^+_{\alpha\beta}\delta e^+_{\alpha\beta} + \\ + N^-_{\alpha\beta}\delta e^-_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}\delta\varkappa_{\alpha\beta} + Q_{\alpha 3}\delta q_\alpha - Q^c_{\alpha 3}\delta\left(\frac{u^-_\alpha}{c}\right) - \frac{t}{2c}S^c_{\alpha 3}\delta\varphi_\alpha + T^c_{\alpha 3}\delta w_{,\alpha} + T^c_{33}\delta w\Big]d\Omega,\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ω — powierzchnia środkowa powłoki ($\Omega: 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2$), gdzie siły zdefiniowano w następujący sposób:

$$\begin{aligned} N^+_{\alpha\beta} &= N^g_{\alpha\beta} + N^d_{\alpha\beta};\\ N^-_{\alpha\beta} &= c(N^g_{\alpha\beta} - N^d_{\alpha\beta});\\ M_{\alpha\beta} &= M^g_{\alpha\beta} + M^d_{\alpha\beta};\\ Q_{\alpha 3} &= Q^g_{\alpha 3} + Q^d_{\alpha 3};\\ S^c_{\alpha 3} &= T^c_{\alpha 3} + V^c_{\alpha 3};\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$N^g_{\alpha\beta} = \int\limits_{-(c+t)}^{-c} \sigma^g_{\alpha\beta} dz; \qquad N^d_{\alpha\beta} = \int\limits_{c}^{c+t} \sigma^d_{\alpha\beta} dz;$$

$$M^g_{\alpha\beta} = \int\limits_{-(c+t)}^{-c} \sigma^g_{\alpha\beta}\left(z+c+\frac{t}{2}\right)dz; \qquad M^d_{\alpha\beta} = \int\limits_{c}^{c+t} \sigma^d_{\alpha\beta}\left(z-c-\frac{t}{2}\right)dz;$$

$$Q^g_{\alpha 3} = \int\limits_{-(c+t)}^{-c} \sigma^g_{\alpha 3} dz; \qquad Q^d_{\alpha 3} = \int\limits_{c}^{c+t} \sigma^d_{\alpha 3} dz; \qquad Q^c_{\alpha 3} = \int\limits_{-c}^{c} \sigma^c_{\alpha 3} dz;$$

$$T^c_{\alpha 3} = \int\limits_{-c}^{c} \sigma^c_{\alpha 3} f(z) dz; \qquad T^c_{33} = \int\limits_{-c}^{c} \sigma^c_{33} \frac{df}{dz} dz;$$

$$V^c_{\alpha 3} = \int\limits_{-c}^{c} \sigma^c_{\alpha 3} z \frac{df}{dz} dz.$$

W ten sposób zagadnienie przestrzenne sprowadzimy do płaskiego. Wariację pracy sił przyłożonych do powierzchni powłoki obliczamy w następujący sposób

$$\delta W_\Omega = \iint\limits_{\Omega} (p_\alpha \delta u^+_\alpha + p_3 \delta w) dx_1 dx_2, \tag{2.6}$$

gdzie: p_α, p_3 — składowe obciążenia powierzchniowego w kierunku osi x_α, z.

Natomiast wariacja pracy sił brzegowych $\overline{N}^+_{\alpha\beta}, \overline{N}^-_{\alpha\beta}, \overline{M}_{\alpha\beta}, \overline{Q}_\alpha$ ma postać

$$\begin{aligned}\delta W_s = \int\limits_0^{l_1} \Big[\overline{N}^+_{\alpha 2} \delta u^+_\alpha + \overline{N}^-_{\alpha 2} \delta\left(\frac{u^-_\alpha}{c}\right) + \overline{N}^+_{\alpha 2} w_{,\alpha} \delta w^0 - \overline{M}_{22} \delta w_{,2} + \\ + \overline{Q}_2 \delta w\Big]_0^{l_2} dx_1 + \int\limits_0^{l_2} \Big[\overline{N}^+_{\alpha 1} \delta u^+_\alpha + \overline{N}^-_{\alpha 1} \delta\left(\frac{u^-_\alpha}{c}\right) + \\ + \overline{N}^+_{\alpha 1} w_{,\alpha} \delta w^0 - \overline{M}_{11} \delta w_{,1} + \overline{Q}_1 \delta w\Big]_0^{l_1} dx_2 - 2\overline{M}_{12} \delta w \Big|_0^{l_1}\Big|_0^{l_2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Wykorzystując wzory (2.5) obliczamy siły działające na powłokę w funkcji przemieszczeń

$$\begin{aligned} N^+_{\alpha\beta} &= 2B[(1-\nu) e^+_{\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} e^+_{\gamma\gamma}], \\ N^-_{\alpha\beta} &= 2Bc^2[(1-\nu) e^-_{\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} e^-_{\gamma\gamma}], \\ M_{\alpha\beta} &= 2D[(1-\nu)\varkappa_{\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \varkappa_{\gamma\gamma}], \\ Q^c_{\alpha 3} &= -2G_c(u^-_\alpha - \Theta_{16} w_{,\alpha}), \\ T^c_{\alpha 3} &= -2G_c(I_1 u^-_\alpha - \Theta_{37} w_{,\alpha}), \\ V^c_{\alpha 3} &= -2G_c(I_6 u^-_\alpha - \Theta_{78} w_{,\alpha}), \\ S^c_{\alpha 3} &= T^c_{\alpha 3} + V^c_{\alpha 3}, \\ T^c_{33} &= \frac{E_c I_5}{c} w, \end{aligned} \tag{2.8}$$

gdzie:

$$\Theta_{ij} = \left(c+\frac{t}{2}\right)I_i + \frac{t}{2}I_j \tag{2.9}$$

Wartości parametrów I_i dla przemieszczeń w rdzeniu określonych funkcją (1.2) [1] i dla przemieszczeń zgodnych z hipotezą prostej łamanej $f(z) = 1$ podano w tabeli 1.

Po podstawieniu powyższych zależności do (2.1) i całkowaniu przez części otrzymamy równania równowagi powłoki wyrażone w przemieszczeniach (2.10) oraz zespół naturalnych warunków brzegowych (2.12).

$$\begin{gathered}(1-\nu)(u^+_{\alpha,\beta}+u^+_{\beta,\alpha}+w_{,\alpha}w_{,\beta}+w_{,\alpha}w^0_{,\beta}+w^0_{,\alpha}w_{,\beta}-2k_{\alpha\beta}w)_{,\beta}+\\ +2\nu\delta_{\alpha\beta}\left(u^+_{\gamma,\gamma}+\frac{1}{2}w_{,\gamma}w_{,\gamma}+w_{,\gamma}w^0_{,\gamma}-k_{\gamma\gamma}w\right)_{,\beta} = -\frac{p_\alpha}{B},\\ \frac{cB}{G_c}\left[\frac{1-\nu}{2}(u^-_{\alpha,\beta}+u^-_{\beta,\alpha})+\nu\delta_{\alpha\beta}u_{\gamma,\gamma}\right]_{,\beta}-u^-_\alpha+\Theta_{16}w_{,\alpha} = 0,\\ -2Dw_{,\alpha\alpha\beta\beta}-2B\Theta_{16}u^-_{\alpha,\alpha\beta\beta}+2G_c\frac{\Theta}{c}w_{,\alpha\alpha}-\frac{E_cI_5}{c}w+\\ +N^+_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}+w_{,\alpha\beta}+w^0_{,\alpha\beta})+p_3-p_\alpha(w+w^0)_{,\alpha} = 0,\end{gathered} \tag{2.10}$$

gdzie:

$$\Theta = \left(c+\frac{t}{2}\right)\Theta_{37}+\frac{t}{2}\Theta_{78}-\Theta^2_{16} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{l_1}\left\{(N^+_{\alpha2}-\bar{N}^+_{\alpha2})\delta u^+_\alpha+(N^-_{\alpha2}-\bar{N}^-_{\alpha2})\delta\left(\frac{u^-_\alpha}{c}\right)+\right.\\ +(N^+_{\alpha2}w_{,\alpha}-\bar{N}^+_{\alpha2}w_{,\alpha})\delta w^0-(M_{22}-\bar{M}_{22})\delta w_{,2}+\\ \left.+\left[M_{22,2}+2M_{12,1}+N^+_{\alpha2}(w+w^0)_{,\alpha}+\frac{t}{2c}S^c_{23}+T^c_{23}-\bar{Q}_2\right]\delta w\right\}_0^{l_2}dx_1+\\ +\int\limits_0^{l_2}\left\{(N^+_{\alpha1}-\bar{N}^+_{\alpha1})\delta u^+_\alpha+(N^-_{\alpha1}-\bar{N}^-_{\alpha1})\delta\left(\frac{u^-_\alpha}{c}\right)+\right.\\ +(N^+_{\alpha1}w_{,\alpha}-\bar{N}^+_{\alpha1}w_{,\alpha})\delta w^0-(M_{11}-\bar{M}_{11})\delta w_{,1}+\\ +\left[M_{11,1}+2M_{12,2}+N^+_{\alpha1}(w+w^0)_{,\alpha}+\frac{t}{2c}S^c_{13}+\right.\\ \left.\left.+T^c_{13}-\bar{Q}_1\right]\delta w\right\}_0^{l_1}dx_2-2(M_{12}-\bar{M}_{12})\delta w\Big|_0^{l_1}\Big|_0^{l_2} = 0.\end{gathered} \tag{2.12}$$

3. Stateczność osiowo ściskanej powłoki cylindrycznej

Obecnie przedstawimy rozwiązanie zadania stateczności sprężystej swobodnie podpartej otwartej powłoki walcowej przy osiowym ściskaniu. Siły zewnętrzne $\bar{N}^+_{11}$ są równomiernie rozłożone na krawędziach $x_1 = 0$ i $x_1 = l_1$. Warunki brzegowe otrzymujemy zgodnie z powyższymi założeniami z naturalnych warunków brzegowych (2.12). Mianowicie dla $x_1 = 0$ i $x_1 = l_1$ mamy

$$
\begin{aligned}
&N_{11}^{+} = \bar{N}_{11}^{+},\\
&N_{21}^{+} = 0,\\
&N_{11}^{-} = 0 \Rightarrow (1-\nu)e_{11}^{-}+\nu(e_{11}^{-}+e_{22}^{-}) = 0 \Rightarrow u_{1,1}^{-} = 0 \quad \text{i} \quad u_{2,2}^{-} = 0,\\
&u_{2}^{-} = 0,\\
&M_{11} = 0 \Rightarrow (1-\nu)\varkappa_{11}+\nu(\varkappa_{11}+\varkappa_{22}) = 0 \Rightarrow w_{,11} = 0 \quad \text{i} \quad w_{,22} = 0,\\
&w = 0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

dla brzegu $x_2 = 0$ i $x_2 = l_2$

$$
\begin{aligned}
&N_{12}^{+} = 0,\\
&N_{22}^{+} = 0,\\
&u_{1}^{-} = 0,\\
&N_{22}^{-} = 0 \Rightarrow (1-\nu)e_{22}^{-}+\nu(e_{11}^{-}+e_{22}^{-}) = 0 \Rightarrow u_{1,1}^{-} = 0 \quad \text{i} \quad u_{2,2}^{-} = 0,\\
&M_{22} = 0 \Rightarrow (1-\nu)\varkappa_{22}+\nu(\varkappa_{11}+\varkappa_{22}) = 0 \Rightarrow w_{,11} = 0 \quad i \quad w_{,22} = 0,\\
&w = 0.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Przy badaniu stateczności sprężystej osiowo ściskanej powłoki cylindrycznej zakładamy, że siły przyłożone są tylko do brzegów powłoki, $p_\alpha = p_3 = 0$.

Pierwsze dwa równania równowagi będą spełnione tożsamościowo, jeśli siły wyrazimy przy pomocy tzw. funkcji naprężeń (funkcji Airy'ego) $F(x_1, x_2)$

$$N_{\alpha\beta}^{+} = \delta_{\alpha\beta}F_{,\gamma\gamma}-F_{,\alpha\beta}. \tag{3.3}$$

Wyrażając odkształcenia $e_{\alpha\beta}^{+}$ przy pomocy funkcji naprężeń i wykorzystując równanie nierozdzielności przemieszczeń

$$(e_{\alpha\beta}^{+}-\delta_{\alpha\beta}e_{\gamma\gamma})_{,\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\beta}w_{,\gamma\gamma}-w_{,\alpha\beta})\left[k_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(w+2w^0)_{,\alpha\beta}\right], \tag{3.4}$$

otrzymamy równanie na funkcję naprężeń

$$F_{,\alpha\alpha\beta\beta} = -2\mathrm{B}(1-\nu^2)(\delta_{\alpha\beta}w_{,\gamma\gamma}-w_{,\alpha\beta})\left[k_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(w+2w^0)_{,\alpha\beta}\right]. \tag{3.5}$$

Dalej definiując funkcję przemieszczeń $\psi(x_1, x_2)$

$$\psi = u_{\alpha,\alpha}^{-}, \tag{3.6}$$

z trzeciego i czwartego równania równowagi (2.10) otrzymamy

$$\psi_{,\alpha\alpha}-\frac{\mathrm{G}_c}{c\mathrm{B}}\psi+\frac{\Theta_{16}\mathrm{G}_c}{c\mathrm{B}}w_{,\alpha\alpha} = 0. \tag{3.7}$$

Z kolei ostatnie równanie równowagi (2.10) możemy napisać w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
&-2\mathrm{D}w_{,\alpha\alpha\beta\beta}-2\mathrm{B}\Theta_{16}\psi_{,\alpha\alpha}+\frac{2\mathrm{G}_c\Theta}{c}w_{,\alpha\alpha}-\frac{E_cI_5}{c}w+\\
&\qquad+(\delta_{\alpha\beta}F_{,\gamma\gamma}-F_{,\alpha\beta})[k_{\alpha\beta}+(w+w^0)_{,\alpha\beta}] = 0.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

W ten sposób sprowadziliśmy układ 5 równań równowagi do 3 równań w funkcji W, F i ψ (3.5), (3.7) i (3.8).

Powyższy układ trzech równań równowagi rozwiążemy przybliżoną metodą Bubnowa-Galerkina.

Przyjmujemy, że funkcja aproksymująca ugięcie „w" powłoki ma postać

$$w = W\sin\alpha x_1 \sin\beta x_2, \tag{3.9}$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{m\pi}{l_1}, \quad \beta = \frac{n\pi}{l_2},$$

podobnie przyjmujemy postać początkowych nieregularności kształtu

$$w^0 = W^0 \sin\alpha x_1 \sin\beta x_2 \tag{3.10}$$

Tak dobrane funkcje spełniają warunki brzegowe swobodnego podparcia (3.1), (3.2). *Wprowadzenie przyjętej funkcji ugięcia do równań (3.5) i (3.7) umożliwia niezależne od* siebie rozwiązanie tych równań, tzn. określenie funkcji naprężeń i przemieszczeń

$$F = B(1-\nu^2)\left[\frac{1}{16} W(W+2W^0)\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cos 2\alpha x_1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\cos 2\beta x_2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2(k_{22}\alpha^2 + k_{11}\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} W\sin\alpha x_1 \sin\beta x_2 + \frac{4k_{12}\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2} W\cos\alpha x\cos\beta x_2\right] -$$
$$- \frac{\bar{N}_{11}x_2^2}{2} - \frac{\bar{N}_{22}x_1^2}{2} + \bar{N}_{12}x_1x_2 \tag{3.11}$$

$$\psi = -\frac{\Theta_{16} G_c(\alpha^2+\beta^2)}{cB(\alpha^2+\beta^2)+G_c} W\sin\alpha x_1 \sin\beta x_2. \tag{3.12}$$

Trzecie równanie (3.8) rozwiązujemy metodą ortogonalizacji Bubnowa-Galerkina

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} X\delta W dx_1 dx_2 = 0 \tag{3.13}$$

gdzie: X jest lewą stroną równania (3.8).

Po scałkowaniu otrzymamy równanie algebraiczne na siłę ściskającą:

$$\hat{N}_{11} = \frac{a_1\zeta + a_2\zeta(\zeta+\zeta^0) + a_3\zeta(\zeta+2\zeta^0) + a_4\zeta(\zeta+\zeta^0)(\zeta+2\zeta^0)}{a_5 + a_6(\zeta+\zeta^0)}, \tag{3.14}$$

gdzie

$$a_1 = \frac{\pi^6}{24}\frac{\lambda^3}{k^3}(m^2+n^2\gamma^2)^2 + \frac{\pi^6\lambda\hat{\Theta}_{16}^2\Gamma(m^2+\gamma^2n^2)^2}{2k^2[\pi^2(m^2+\gamma^2n^2)+\Gamma k^2]} +$$
$$+ \frac{\pi^4\lambda\hat{\Theta}\Gamma(m^2+\gamma^2n^2)}{2k^2} + \frac{\pi^2p^*(1-\nu^2)I_5}{4} +$$
$$+ \frac{\pi^2\lambda(1-\nu)^2}{2(m^2+\gamma^2n^2)^2}[(\eta_{22}m^2+\gamma^2\eta_{11}n^2)^2 + 4m^2n^2\gamma^2\eta_{12}^2], \tag{3.15}$$

$$a_2 = -\frac{16\pi^2\gamma^2mn\lambda(1-\nu^2)}{3k^2(m^2+\gamma^2n^2)^2}(\eta_{22}m^2+\gamma^2\eta_{11}n^2),$$

$$a_3 = -\frac{\pi^2\lambda(1-\nu^2)}{3mnk^2}(\eta_{11}m^2+\gamma^2\eta_{22}n^2),$$

$$a_4 = \frac{\pi^6 \lambda(1-\nu^2)}{32k^4}(m^4+\gamma^4 n^4),$$

(3.15) [c.d.]
$$a_5 = -\frac{4\lambda}{mn}(\eta_{11}+\xi_{22}\eta_{22}+2\xi_{12}\eta_{12}),$$

$$a_6 = \frac{\pi^4\lambda}{4k^2}(m^2+n^2\gamma^2\xi_{22}).$$

Tabela 1. Wartości parametru I_i w przypadku uwzględnienia poprzecznej ściśliwości rdzenia i bez uwzględnienia ($f(z) = 1$)

	$f(z) = \dfrac{\cosh pz}{\cosh pc}$	$f(z) = 1$
$2cI_1 = \int_{-c}^{c} f(z)dz$	$I_1 = \dfrac{\mathrm{tgh}\,pc}{pc}$	$I_1 = 1$
$2cI_3 = \int_{-c}^{c} f^2(z)dz$	$I_3 = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\mathrm{tgh}\,pc}{pc}-\mathrm{tgh}^2 pc\right)$	$I_3 = 1$
$\dfrac{I_5}{c} = \int_{-c}^{c}\left(\dfrac{df}{dz}\right)^2 dz$	$I_5 = p^2c^2\left(\mathrm{tgh}^2 pc+\dfrac{\mathrm{tgh}\,pc}{pc}-1\right)$	$I_5 = 0$
$2cI_6 = \int_{-c}^{c} z\dfrac{df}{dz}dz$	$I_6 = 1-\dfrac{\mathrm{tgh}\,pc}{pc}$	$I_6 = 0$
$2cI_7 = \int_{-c}^{c} zf\dfrac{df}{dz}dz$	$I_7 = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{tgh}^2 pc-\dfrac{\mathrm{tgh}\,pc}{pc}+1\right)$	$I_7 = 0$
$2cI_8 = \int_{-c}^{c} z^2\left(\dfrac{df}{dz}\right)^2 dz$	$I_8 = \dfrac{1}{2}\left[\left(p^2c^2+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\mathrm{tgh}\,pc}{pc}+\left(\dfrac{p^2c^2}{3}-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{tgh}^2 pc-\dfrac{p^2c^2}{3}-\dfrac{1}{2}\right]$	$I_8 = 0$

$$p^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}\right)\psi^2; \qquad \psi^2 = \frac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)}.$$

Tutaj wprowadzono następujące bezwymiarowe parametry

$$\zeta = \frac{W}{c}, \quad \zeta^0 = \frac{W^0}{c}, \quad \lambda = \frac{t}{c}, \quad k = \frac{a}{c}, \quad \gamma = \frac{a}{b},$$

(3.16)
$$\eta_{\alpha\beta} = ck_{\alpha\beta}, \; \Gamma = \frac{G_c c}{B}, \quad p^* = \frac{E_c}{E}, \quad \hat{N}_{\alpha\beta} = \frac{\bar{N}_{\alpha\beta}}{B},$$

$$\xi_{22} = \frac{\bar{N}_{22}}{\bar{N}_{11}}, \quad \xi_{12} = \frac{\bar{N}_{12}}{\bar{N}_{11}}, \quad \hat{\Theta}_{ij} = \frac{\Theta_{ij}}{c}, \quad \hat{\Theta} = \frac{\Theta}{c^2}.$$

Z równania (3.14) możemy uzyskać górną krytyczną[1] wartość obciążenia ściskającego wzdłuż tworzącej powłoki walcowej ($\eta_{11} = \eta_{22} = 0$), bez wstępnego ugięcia ($\zeta^0 = 0$), jeśli ugięcie ζ jest nieskończenie bliskie zeru ($\zeta \to 0$). Powłoka obciążona jest siłami rozłożonymi w sposób ciągły $\bar{N}_{11}$ na brzegach $x_1 = 0$ i $x_1 = l_1$, wobec czago $\xi_{22} = \xi_{12} = 0$. Zgodnie z tymi założeniami górne obciążenie krytyczne możemy obliczyć w następujący sposób

$$\hat{N}^u = \lim_{\xi \to 0} \hat{N}_{11} = \frac{a_1}{a_6}. \tag{3.17}$$

Otrzymana wielkość $\hat{N}^u$ zależy od ilości półfal m i n. Z praktycznego punktu widzenia interesuje nas wartość najmniejsza tej wielkości

$$\hat{N}^u_{kr} = \min_{m,n} \hat{N}^u = \hat{N}^u(m_k, n_k), \tag{3.18}$$

m_k i n_k — określa liczbę półfal tworzących się w chwili utraty stateczności.
W dalszym ciągu zbadamy zachowanie się powłoki walcowej po wyboczeniu. Bieżące obciążenie ściskające będziemy odnosić do obciążenia krytycznego $\hat{N}^u_{kr}$

$$\hat{P} = \frac{\hat{N}_{11}}{\hat{N}^u_{kr}} = \frac{b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3}{b_4 + b_5\zeta} \cdot \frac{a_6(m_k, n_k)}{a_1(m_k, n_k)}, \tag{3.19}$$

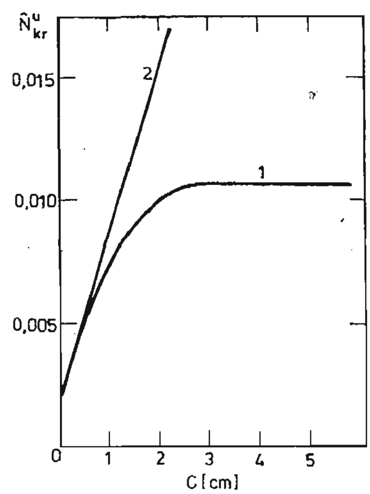
gdzie: $b_1 = a_1 + (a_2 + 2a_3 + 2a_4\zeta^0)\zeta^0)$,

$b_2 = a_2 + a_3 + 3a_4\zeta^0$,

$b_3 = a_4$,

$b_4 = a_6\zeta^0$,

$b_5 = a_6$.



Rys. 2. Zależność krytycznych obciążeń w funkcji grubości rdzenia. Krzywa 1 — bez uwzględnienia poprzecznej ściśliwości rdzenia; krzywa 2 — z uwzględnieniem poprzecznej ściśliwości.

Podobnie jak wyżej szukamy wartości minimalnej $\hat{P}(m, n)$ ze względu na ilość półfal m i n, dla każdej wartości ugięcia ζ

$$\hat{P}_m = \min_{m,n} \hat{P}(m, n) = \hat{P}(m_l, n_l), \tag{3.20}$$

m_l, n_l — określają liczbę półfal odpowiadających najmniejszej sile ściskającej dla danej wartości ugięcia.

4. Obliczenia i wnioski

Obliczenia przeprowadzono dla powłoki trójwarstwowej o następujących parametrach geometrycznych i fizycznych:

— długości powłoki wzdłuż tworzącej $l_1 = 0,6$ m,

— szerokość powłoki po obwodzie $l_2 = 0,4$ m,

— promień zakrzywienia powierzchni podstawowej $R = 1$m,

— grubość okładzin $t = 1$ mm,

— moduł sprężystości podłużnej materiału okładzin E = 70 534 MPa,

— liczba Poissona materiału okładzin $\nu = 0,3$,

— moduł sprężystości podłużnej materiału rdzenia $E_c = 53$ MPa,

— liczba Poissona materiału rdzenia $\nu_c = 0$.

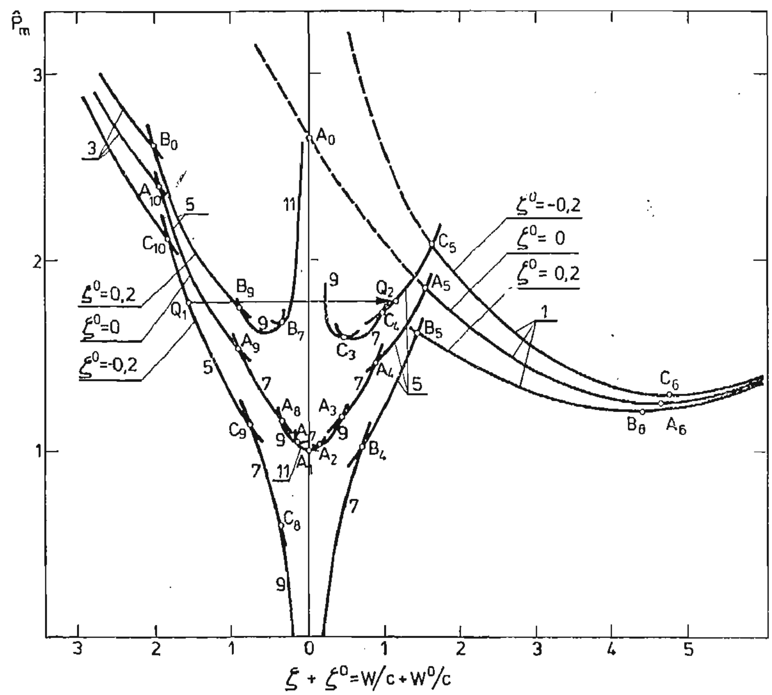
Na rys. 2 przedstawiono krzywe obrazujące utratę stateczności powłoki przy małych ugięciach w funkcji grubości rdzenia. Krzywa 1 przedstawia zależność siły krytycznej przy pominięciu ściśliwości rdzenia, $f(z) = 1$, natomiast krzywa 2 z uwzględnieniem ściśliwości rdzenia. W tabeli 2 podano wartości liczbowe naprężeń krytycznych $\hat{N}^{u}_{kr}$ i odpowiadające im ilości półfal sfałdowania powłoki wzdłuż tworzącej „m" i po obwodzie „n". Jak widać nie uwzględnianie poprzecznej ściśliwości jest dopuszczalne jedynie dla dostatecznie cienkich powłok.

Tabela 2. Obciążenia krytyczne i ilość półfal m i n w zależności od grubości rdzenia. Grupa danych Nr 1 odpowiada obliczeniom bez uwzględnienia ściśliwości rdzenia i grupy danych Nr 2 z uwzględnieniem ściśliwości rdzenia.

Lp	c	krzywa 1			krzywa 2		
	cm	m	n	$\hat{N}^{u}_{kr}$	m	n	$\hat{N}^{u}_{kr}$
1	0,0	8	1	0,00221	8	1	0,00221
2	0,5	11	1	0,00517	11	1	0,00523
3	1,0	14	1	0,00821	11	1	0,00870
4	1,5	22	1	0,00996	11	1	0,01218
5	2,0	26	1	0,01048	12	1	0,01566
6	2,5	27	1	0,01063	12	1	0,01913
7	3,0	27	1	0,01067	12	1	0,02260
8	3,5	27	1	0,01068	12	1	0,02607
9	4,0	28	1	0,01068	13	1	0,02954
10	5,0	28	1	0,01068	13	1	0,03646

[1] Pojęcie górnego i dolnego obciążenia krytycznego określił Vol'mir A. S. [11].

Na rys. 3 przedstawiono wykres „siła-ugięcie", dla różnych wartości parametru początkowych imperfekcji ζ^0. Liczba przy krzywej podaje ilość półfal sfałdowania powłoki wzdłuż tworzącej. W pracach [8], [9] przy założeniu jedynie globalnego wyboczenia w postaci jednej półfali określa się tzw. górne obciążenie krytyczne odpowiadające punktowi A_0 (rys. 3) i dolne obciążenie krytyczne — punkt A_6. Natomiast jak wynika z przeprowa-



Rys. 3. Wykres „siła — ugięcie" dla różnych wartości parametru początkowych imperfekcji ζ^0 (Liczba w kółku określa ilość półfal powstających wzdłuż tworzącej powłoki walcowej).

dzonej tutaj analizy powłoka ulega sfałdowaniu z dużą ilością półfal przy znacznie niższej sile, odpowiadającej punktowi A_1. Wartość siły odpowiadającej temu punktowi, otrzymuje się z analizy liniowej zagadnienia stateczności powłok trójwarstwowych [12], jest to tzw. pierwszy punkt bifurkacji. Dalszy wzrost obciążenia jak widać nie powoduje utraty nośności powłoki. W punktach A_2, A_3, A_4 występują ponowne rozwidlenia krzywej „siła-ugięcie", są to kolejne punkty bifurkacji, gdzie następują „przeskoki" z pierwotnej postaci do nowej odpowiadającej mniejszej liczbie półfal sfałdowania powłoki. W punkcie A_5 powłoka osiąga tzw. punkt graniczny tzn. traci stateczność przy utracie nośności, linia A_5 - A_6 określa stany niestateczne. Dopiero za punktem A_6 powłoka staje się ponownie stateczna. W praktyce jednak przekroczenie punktu A_5 oznacza zniszczenie powłoki. Na rys. 3 przedstawiono również zachowanie się powłoki przy ugięciu w stronę przeciwną.

Powłoka przechodzi wówczas przez punkty bifurkacji A_7, A_8, A_9, A_{10} bez utraty nośności. Jednak należy sobie zdawać sprawę, że przy obciążeniach bliskich obciążeniu odpowiadającemu punktowi A_5 może nastąpić, przy działaniu pewnego impulsu, przeskok na krzywą A_0 - A_6, odpowiadającym stanom niestatecznym. Tak zachowuje się podczas obciążenia powłoka o idealnym kształcie. W rzeczywistości mamy zawsze do czynienia z powłokami o nieregularnym kształcie. Nieregularności te określiliśmy przy pomocy parametru ζ^0 Na rys. 3 pokazano również krzywe „siła-ugięcie" przy początkowej imperfekcji $\zeta_0 = 0,2$ i $\zeta_0 = -0,2$. Dla $\zeta_0 = 0,2$ powłoka ugina się od samego początku obciążenia, przechodząc przez punkt bifurkacji B_4, do punktu B_5 odpowiadającemu obciążeniu granicznemu. Krzywa B_5 - B_6 określa stany niestateczne. Teoretycznie możliwe stany stateczne przy ugięciu w stronę przeciwną określa krzywa B_8 - B_9 - B_{10}, a stany niestateczne krzywa B_8 - B_7 - ∞. Dla $\zeta_0 = -0,2$ powłoka również ugina się od samego początku obciążenia, przechodząc przez kolejne punkty bifurkacji C_8, C_9, C_{10}, bez utraty nośności. Jednak przy obciążeniu wyższym od obciążenia odpowiadającemu punktowi C_3 możliwy jest przeskok, np. jak pokazano na rys. 3 z punktu Q_1 do Q_2. Wtedy dalszy wzrost obciążenia powodują utratę nośności w punkcie C_5. Z praktycznego punktu widzenia największe znaczenie, jak widać ma określenie obciążeń odpowiadającym kolejnym punktom bifurkacji, a szczególnie pierwszego punktu bifurkacji A_1, punktu granicznego A_5, B_5, C_5 oraz tzw. dolne obciążenie krytyczne A_6, B_6, C_6.

Literatura cytowana w tekście

1. FR. ROMANÓW, *Obciążenia krytyczne konstrukcji wielowarstwowych*, Prace Naukowe IKiEM, Politechniki Wrocławskiej, Seria: Monografie 36, 8, Wrocław 1979.
2. FR. ROMANÓW, J. CZMOCHOWSKI, *Energia sprężysta i stateczność ścinanych trójwarstwowych powłok o odkształcalnych rdzeniach*, III Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Referaty, Łódź 26 - 27.X.1979 r., s. 219 - 228.
3. E. REISSNER, *Finite Deflections of Sandwich Plates*, Journal of the Institute of Aeronautical Sciences, vol. 15, July 1948, pp. 435 - 440.
4. V. DUNDROVA, V. KOVARIK, P. SLAPAK, *Nichtlineare Biegungstheorie von Sandwich-Platten*, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 57 (1 - 2), pp. 19 - 33 (1967).
5. JU. N. NOVIĆKOV, *Nelinejnaja teorija i ustojčivost' tolstych mnogoslojnych oblocek*, Prikladnaja matematika i mechanika, 1973, 37, No 3, 532 - 543.
6. E. I. GRIGOLJUK, P. P. ČULKOV, *Teorija trechslojnych oboloček s żestkim zapolnitelem*, Izvestija AN SSSR, OTN, Mechnika i Maszinostroenie, No 2, 1963.
7. A. L. POTASZ, *Uravnenija obščej teorii izgiba ortotropnych trechslojnych plastin konecnogo progiba s legkim zapolnitelem*, Izvestija VUZ, Stroitel'stvo i Architektura, 1979, No 1, s. 46 - 52.
8. W. SZYC, *Nieliniowe zagadnienie stateczności sprężystej trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej*, Rozpr. Inżyn., 19, 4, 1971.
9. G. RONAN JESUS, JAO-SHIUN KAO, *Nonlinear Equations for Shallow Sandwich Shells with Orthotropic Cores*, AIAA Journal, vol. 13, No 7, pp. 961 - 963, July 1975.
10. V. F. KARAVANOV, *Uravnenija pologich trechslojnych oboloček s legkim zapolnitelem pri konečnych smeščenijach*, Izv. VUZ, Aviacionnaja technika, No 1 (1958), s. 69 - 77.
11. A. S. VOL'MIR, *Ustojčivost' deformiruemych sistem*, Izd. „Nauka", Moskva 1967.
12. E. I. GRIGOLJUK, P. P. ČULKOV, *Ustojčivost i kolebanija trechslojnych oboloček*, M., „Masinostroenie", 1973.
13. E. I. GRIGOLJUK, P. P. ČULKOV, *Teorija uprugich trjochslojnych konstrukcij v nieliniejnoj postanovke*, Sb. Rascety elementov aviacionnych konstrukcij, Vyp. 4. M., Maszinostrojenie 1965, 99 - 133.

14. J. N. GOODIER, J. M. NEOU, *The evaluation of theoretical critical compression in sandwich plates*, J. Aeron Sci., 18, No 10 (1951).
15. L. POMAZI, *On post-buckling behaviour of regularly multilayered rectangular elastic plates.*, Acta techn. Acad. Sci. Hung., 1978 (1979), 87, No 1 - 2, 111 - 120.

Р е з ю м е

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЁХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ЗАПОЛНИТЕЛЯ

В работе обсуждён вопрос упругой устойчивости пологих трёхслойных цилиндрических оболочек с мягким заполнителем, деформируемым в перепендикулярном направлении. Для наружных слоёв, согласно теории тонких однородных оболочек, принято гипотезу Кирхгофа-Лява (К-Л). По отношению к заполнителю применён метод, представленный в работах [1 ,2], учитывающий поперечную деформируемость заполнителя. Из принципа виртуальных работ выведены дифференциальные уравнения равновесия сил, которые после введения функци напряжений и функции перемещений были решены приближённым методом Бубнова-Галеркина. Приведены графики: сжимающей силы, соответствующей первой точке бифуркации, в функции толщины заполнителя, а также сжимающей силы в функции прогиба оболочки для различных начальных значений имперфекции.

S u m m a r y

NON-LINEAR THEORY OF THE STABILITY OF SANDWICH SHELLS WITH TRANSVERSE DEFORMABILITY OF THE CORE

The elastic stability of a cylindrical three layer-shell with soft core is considered. The deformation of a core occurs vertically to the shell surface.

For the external layers according to the theory of thin homogneous shells the hypothesis of Kirchhoff-Love displacement was assumed. For the core, the methods given in papers [1, 2] taking into account the transverse deformability of the core — were considered. The differential equation of the equilibrium of the forces was established. With the introduction of the stresses and displacement finctions the equation was solved by aproximate Bubnov-Galerkin method. The diagrams of compressing force as a function of the core with were presented. The force is connected with the first point of bifurcation. Also the diagrams of compressive force as a function of shell deflection — for different values of initial imperfections were given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 lipca 1981 roku.