

ANALIZA STANU ZAKRYTYCZNEGO TARCZY PROSTOKĄTNEJ PODDANEJ  
DZIAŁANIU MIMOŚRODOWEGO ŚCISKANIA I JEJ ZASTOSOWANIE DO  
PRZYBLIŻONEGO OBLICZANIA CIENKOŚCIENNEGO DŹWIGARA  
SKRZYNKOWEGO

SEWER J A K U B O W S K I

*Institut Mechaniki Stosowanej  
Politechnika Łódzka*

Spis najważniejszych oznaczeń

- $a, b$  — wymiary tarczy  
 $h$  — grubość tarczy  
 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — sztywność płytowa zginania  
 $E$  — moduł Younga  
 $\nu$  — liczba Poissona  
 $u, v, w$  — przemieszczenia powierzchni środkowej tarczy  
 $\lambda = a/b$  — współczynnik kształtu tarczy

1. Wstęp

Przy projektowaniu konstrukcji cienkościennych — w tym także dźwigarów o przekroju skrzynkowym — jednym z podstawowych problemów jest zagadnienie stateczności. Najczęściej problem ten jest rozwiązywany poprzez obliczenie obciążenia krytycznego dla konstrukcji idealnej (pobawionej niedoskonałości kształtu, przypadkowych obciążeń itp.) i ustalenie wartości współczynnika bezpieczeństwa w stosunku do tegoż obciążenia [1, 7, 8].

Postępowanie takie prowadzi na ogół do niepełnego wykorzystania konstrukcji, która w większości wypadków może pracować bezpiecznie w zakresie obciążeń większych od krytycznego. Ponadto, jak wykazują liczne badania doświadczalne obciążenie krytyczne dla konstrukcji idealnej nie stanowi prawidłowej oceny wyężenia konstrukcji rzeczywistej, która pracuje naogół w stanie wyboczonym już od początku obciążenia.

Z powyższych powodów prowadzone są liczne badania teoretyczne w zakresie stanów zakrytycznych dźwigarów skrzynkowych lub ich elementów [2, 3, 5, 9].

W pracy niniejszej przeprowadzono ogólną i numeryczną analizę stanu zakrytycznego swobodnie podpartej tarczy prostokątnej poddanej działaniu ściskania (bądź rozciągania) i jednoczesnego zginania w tym samym kierunku.

Analizę tę przeprowadzono pod kątem przydatności uzyskanych rezultatów do przybliżonego obliczania cienkościennego dźwigara skrzynkowego, którego środniki utraciły stateczność. Otrzymane wyniki poddano weryfikacji doświadczalnej, uzyskując na ogół dobrą zgodność z przewidywaniami teoretycznymi.

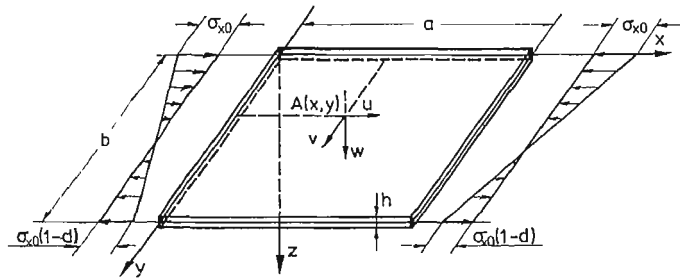
W celu zastosowania rezultatów badań teoretycznych do analizy pracy wspomnianego dźwigara skrzynkowego poddanego zginaniu i ścisnaniu zaproponowano odpowiednią przybliżoną metodę obliczeniową.

W pracy przedstawiono także wybrane wyniki badań doświadczalnych dużego dźwigara skrzynkowego, porównując je z rezultatami obliczeń opartych o wspomnianą metodę przybliżoną.

### Analliza stanu zakrytycznego swobodnie podpartej tarczy prostokątnej poddanej zginaniu i ścisnaniu (bądź rozciąganiu)

Analizie poddano cienką izotropową tarczę prostokątną o stałej grubości  $h$  i długościach krawędzi  $a \times b$ , podpartą swobodnie wzdłuż obwodu.

Przyjęto dalej, że rozważana tarcza jest obciążona w sposób pokazany na rys. 1.



Rys. 1

Zmienność normalnych naprężeń obciążających wzdłuż odpowiednich krawędzi tarczy opisano następującą liniową funkcją współrzędnej  $y$ :

$$(1) \quad \sigma_x(y) = -\sigma_{x0} \left( 1 - \alpha \frac{y}{b} \right).$$

Współczynnik liczbowy  $\alpha$  charakteryzuje tu sposób obciążenia tarczy. I tak przykładowo dla  $\alpha = 0$  wzór (1) opisuje czyste ścisnienie tarczy, zaś dla  $\alpha = 2$  przypadek czystego zginania tarczowego. Opisanemu sposobowi obciążenia płaskiej tarczy odpowiada następująca biharmoniczna funkcja naprężeń Airy'ego

$$(2) \quad \Phi_0(x, y) = -\frac{\sigma_{x0} y^2}{2} \left( 1 - \frac{\alpha y}{3b} \right).$$

Funkcję  $w(x, y)$  opisującą ugięcia tarczy w stanie zakrytycznym założono w postaci następującego szeregu trygonometrycznego o nieznanach współczynnikach  $\xi_{mn}$ :

$$(3) \quad w(x, y) = h \sin \frac{m\pi x}{a} \sum_{n=1}^3 \xi_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

gdzie  $m = 1$  lub  $2$ .

Tak przyjęta funkcja ugięcia spełnia w sposób tożsamościowy warunki swobodnego podparcia wszystkich krawędzi tarczy. Współczynnik  $m$  opisuje liczbę półfal wybożenia tarczy w kierunku zginania. O tym, czy w konkretnym przypadku nastąpi wybożenie z jedną półfalą ( $m = 1$ ) czy też z dwiema ( $m = 2$ ), rozstrzygnąć można na podstawie odpowiedniej analizy stanu krytycznego tarczy [1, 2, 6]. Dobór powyższej postaci funkcji  $w(x, y)$  poprzedzony był analizą literatury [1, 2, 3, 4, 5] oraz analizą wpływu długości szeregu (3) na otrzymane wartości obciążenia krytycznego tarczy. Okazało się, że przy nieskrępowanym doborze wartości współczynników  $\xi_{mm}$ , trójskładnikowa postać (3) tegoż szeregu z zadawalającą dokładnością opisuje ugięcia rozważanej tarczy. Funkcję naprężeń Airy'ego  $\Phi(x, y)$  dla zakrytycznego stanu tarczy wyznaczono z równania nierozdzielności odkształceń. Dla dużych ugięć tarczy równania to przyjmuje następującą postać [1, 3, 4]

$$(4) \quad \frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Po wstawieniu do równania (4) funkcji ugięcia  $w(x, y)$  danej zależnością (3), równanie to rozwiązano wyznaczając jego całkę szczególną  $\phi_1(x, y)$ . Sumując uzyskane rozwiązanie z rozwiązaniem szczególnym (2) równania jednorodnego (biharmonicznego), uzyskano funkcję naprężeń  $\phi(x, y)$  dla rozważanego przypadku obciążenia tarczy. Dana jest ona następującym wzorem:

$$(5) \quad \begin{aligned} \phi(x, y) = & \frac{Eh^2 m^2}{4} \left\{ \left[ 2M(4m^2, 0)(\xi_{m1}^2 + 4\xi_{m2}^2 + 9\xi_{m3}^2) + \right. \right. \\ & + M(4m^2, 1)(9\xi_{m1}\xi_{m2} + 25\xi_{m2}\xi_{m3}) \cos \frac{\pi y}{b} + 16M(4m^2, 4)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{2\pi y}{b} + \\ & - M(4m^2, 9)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{2\pi y}{b} - 4M(4m^2, 16)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{4\pi y}{b} - \\ & \left. + M(4m^2, 25)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{5\pi y}{b} \right] \cdot \cos \frac{2m\pi x}{b} + \\ & - M(0, 1)(\xi_{m1}\xi_{m2} + \xi_{m2}\xi_{m3}) \cos \frac{\pi y}{b} + 2M(0, 4)(\xi_{m1}^2 - 2\xi_{m1}\xi_{m3}) \cdot \cos \frac{2\pi y}{b} + \\ & + 9M(0, 9)\xi_{m1}\xi_{m2} \cos \frac{3\pi y}{b} + 8M(0, 16)(\xi_{m2}^2 + 2\xi_{m1}\xi_{m3}) \times \\ & \times \cos \frac{4\pi y}{b} + 25M(0, 25)\xi_{m2}\xi_{m3} \cos \frac{5\pi y}{b} + \\ & \left. + 18M(0, 36)\xi_{m3}^2 \cdot \cos \frac{6\pi y}{b} + \frac{6x_0 y^2}{2} \left( 1 - \frac{y\alpha}{3b} \right) \cdot \frac{b^2 h}{\pi^2 D} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie  $m = 1, 2$

W powyższym wyrażeniu symbolem  $M(p, q)$  oznaczono wartość wyrażenia

$$(6) \quad M(p, q) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\lambda} + q\lambda\right)^2},$$

zależnego od parametrów  $p$  i  $q$  oraz współczynnika kształtu tarczy  $\lambda = a/b$ .

Wyznaczone w ten sposób funkcje: ugięcia (3) i naprężeń (5) zawierają trzy nieznanne współczynniki bezwymiarowe  $\xi_{m1}$ ,  $\xi_{m2}$  i  $\xi_{m3}$ . Jednocześnie obie te funkcje opisują w sposób ogólny stan zakrytyczny tarczy — tj. występujące w niej pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wartości współczynników  $\xi_{mn}$  przeprowadzona zostanie ogólna analiza pól przemieszczeń, naprężeń i odkształceń. Jest to możliwe na tym etapie rozważań, gdyż daje się sformułować szereg wniosków niezależnych od tego, jakie wartości przyjmą współczynniki  $\xi_{mn}$ .

Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej tarczy oznaczono przez  $u$ ,  $v$  i  $w$ . Funkcja  $w(x, y)$  dana jest wzorem (3), zaś funkcje  $u(x, y)$  i  $v(x, y)$  wyznaczone wychodząc z zależności między przemieszczeniami i odkształceniami. Dla dużych ugięć płyt zależności te mają charakter nieliniowy i przedstawiają się następująco [1, 4]:

$$(7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xb} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yb} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xyb} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

Odształcenia  $\varepsilon_{xb}$ ,  $\varepsilon_{yb}$  i  $\gamma_b$  powierzchni środkowej tarczy, dzięki prawu Hooke'a dają się wyrazić poprzez naprężenia  $\sigma_{xb}$ ,  $\sigma_{yb}$  i  $\tau_b$  działające w tejże powierzchni. Te ostatnie zaś, zgodnie z nieliniową teorią płyt wiotkich [1, 3, 4] wyrażają się poprzez funkcję naprężeń  $\Phi(x, y)$ :

$$(8) \quad \begin{aligned} \sigma_{xb} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \\ \sigma_{yb} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ \tau_b &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe w równaniach (7) otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych względem nieznanych funkcji przemieszczeń  $u(x, y)$  i  $v(x, y)$ . Równania te rozwiązano, wyznaczając obie szukane funkcje z dokładnością do trzech stałych całkowania, odpowiadających przemieszczeniu tarczy jako ciała sztywnego. Z kolei stałe te obliczono unieruchamiając (w sensie przesunięcia i obrotu) punkt tarczy o współrzędnych  $x = a/2$ ,  $y = 0$ .

Ze względu na bardzo złożoną budowę wyrażenia opisujące wartości funkcji  $u(x, y)$  i  $v(x, y)$  nie zostaną tu przytoczone.

Na ich podstawie wyznaczono dalej przemieszczenia normalne wzdłuż wszystkich krawędzi tarczy. Określone są one następującymi zależnościami:

$$(9) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= -\frac{\alpha\sigma_{x0}\lambda}{2E}y + \frac{\pi^2 m^2}{16a}h^2(\xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2 + \xi_{m3}^2) - \frac{\sigma_{x0}a}{2E}, \\ u(a, y) &= -u(0, y) \\ v(x, 0) &= \frac{\alpha\sigma_{x0}}{2Eb} \left( -x^2 + ax - \frac{a^2}{4} \right), \\ v(x, b) &= v(x, 0) - \frac{\pi^2 h^2}{8b} (\xi_{m1}^2 + 4\xi_{m2}^2 + 9\xi_{m3}^2) + \nu \frac{\sigma_{x0}b}{E} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Obliczone tak przemieszczenia przedstawiono na rys. 2, który w sposób poglądowy ilustruje kształt tarczy po utracie stateczności. Jak wynika z rysunku, krawędzie obciążone tarczy pozostają prostoliniowe, zaś krawędzie nieobciążone przyjmują kształt równoodległych parabol.

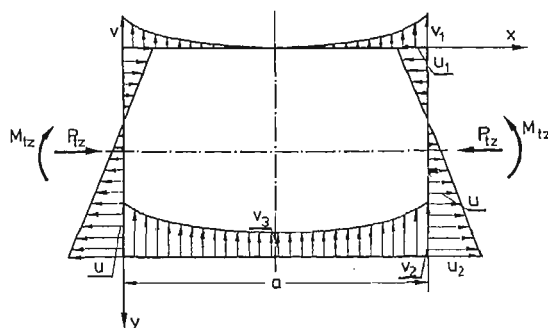
Należy zaznaczyć, że otrzymane tu warunki deformacji tarczy stają się dodatkowym założeniem leżącym u podstaw uzyskanego rozwiązania. Jednocześnie warunki te z dużym przybliżeniem są zgodne z tymi, w jakich pracują elementy tarczowe w rzeczywistych belkach cienkościennych.

Naprężenia wewnątrz tarczy podzielić można na składowe błonowe i zgięciowe. Dla uogólnienia dalszych rozważań w miejsce poszczególnych składowych stanu naprężenia wprowadzono odpowiadające im współczynniki bezwymiarowe, oznaczone gwiazdką. Zachodzi przy tym relacja:

$$(10) \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{R}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{R} \quad \text{gdzie } R = \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

Naprężenia stanu zgięciowego wyrażają się poprzez odpowiednie pochodne funkcji ugięcia  $w(x, y)$  [4], zaś naprężenia stanu błonowego zależą od funkcji Airy'ego  $\Phi(x, y)$  zgodnie ze wzorami (8).

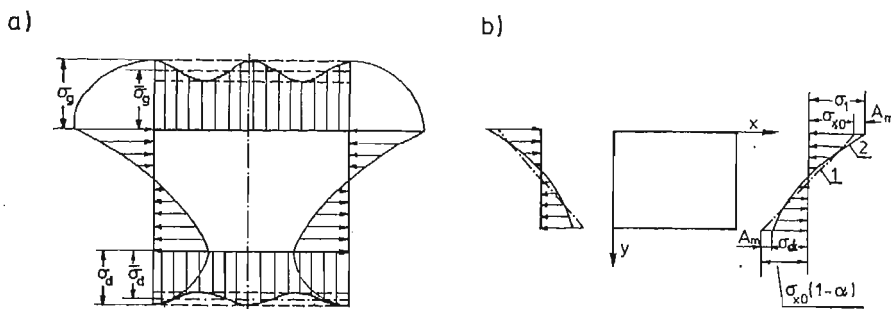
Wobec znajomości obu funkcji  $w(x, y)$  i  $\Phi(x, y)$  można wyprowadzić ogólne wzory opisujące wszystkie sześć składowych stanu naprężenia w tarczy [6]. Szczególnie interesująca jest zmienność naprężeń błonowych w kierunku  $x$ . Wyraża się ona następującym wzorem:



Rys. 2

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \sigma_{xb}^* = & -3m^2(1-\nu^2) \left\{ \left[ M(4m^2, 1)(9\xi_{m1}\xi_{m2} + 25\xi_{m2}\xi_{m3}) \cos \frac{\pi y}{b} + \right. \right. \\
 & + 64M(4m^2, 4)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{2\pi y}{b} - 9M(4m^2, 9)\xi_{m1}\xi_{m2} \cos \frac{3\pi y}{b} + \\
 & \left. \left. - 64M(4m^2, 16)\xi_{m1}\xi_{m3} \cos \frac{4\pi y}{b} - 25M(4m^2, 25)\xi_{m2}\xi_{m3} \cos \frac{5\pi y}{b} \right] \cos \frac{2m\pi x}{a} + \right. \\
 & - M(0, 1)(\xi_{m1}\xi_{m2} + \xi_{m2}\xi_{m3}) \cos \frac{\pi y}{b} + \\
 & + 8M(0, 4)(\xi_{m1}^2 - 2\xi_{m1}\xi_{m2}) \cos \frac{2\pi y}{b} + 81M(0, 9)\xi_{m1}\xi_{m2} \cos \frac{3\pi y}{b} + \\
 & + 128M(0, 16)(\xi_{m2}^2 + 2\xi_{m1}\xi_{m3}) \cos \frac{4\pi y}{b} + 625M(0, 25)\xi_{m2}\xi_{m3} \cos \frac{5\pi y}{b} + \\
 & \left. + 648M(0, 36)\xi_{m3}^2 \cos \frac{6\pi y}{b} \right\} - \sigma_{x0}^* \left( 1 - \alpha \frac{y}{b} \right),
 \end{aligned}$$

Ogólny przebieg zmienności tychże naprężeń wzdłuż wszystkich krawędzi tarczy dla przypadku dwu półfal wybočenja ( $m = 2$ ) pokazano na rys. 3a. Na rys. 3b przedstawiono szczegółowo rozkłady omawianych naprężeń  $\sigma_{xb}$  wzdłuż obciążonych krawędzi tarczy.



Rys. 3a, b

Jak wynika z rysunków, przy przyjętych założeniach zarówno zginanie tarczy jak i jej ściskanie w kierunku  $x$  powodują powstanie w niej nieliniowo zmiennych rozkładów naprężeń obciążających. Wnioski te pokrywają się całkowicie z rezultatami prac [2, 4, 5].

Na podstawie wzoru (11) wyznaczono wartości naprężeń  $\sigma_g^*$  i  $\sigma_d^*$  działających w narożnikach tarczy oraz naprężenia średnie  $\bar{\sigma}_g^*$  i  $\bar{\sigma}_d^*$  wzdłuż krawędzi nieobciążonych (rys. 3a)

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \sigma_g^* &= A_m^* + B_m^* - \sigma_{x0}^*, \\
 \sigma_d^* &= A_m^* + G_m^* - \sigma_{x0}^*(1-\alpha), \\
 \bar{\sigma}_g^* &= A_m^* - \sigma_{x0}^*, \\
 \bar{\sigma}_d^* &= A_m^* - \sigma_{x0}^*(1-\alpha).
 \end{aligned}$$

Współczynniki  $A_m^*$ ,  $B_m^*$  i  $G_m^*$  zależą od kształtu tarczy  $\lambda$  oraz jej stanu obciążenia [6]. Współczynnik  $A_m^*$  dany jest np. wzorem:

$$(13) \quad A_m^* = -\frac{3m^2(1-\nu^2)}{2\lambda^2} (\xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2 + \xi_{m3}^2).$$

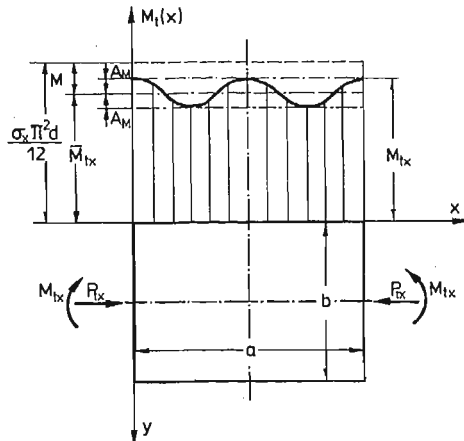
Obliczmy dalej wartości momentu zginania tarczowego  $M_t(x)$  oraz siły osiowej  $P_t(x)$ , działających w kierunku  $x$  w kolejnych przekrojach  $x = \text{const}$  przez tarczę. W tym celu należy scałkować nieliniowe rozkłady naprężeń  $\sigma_{xb}$  danych wzorem (11) przy zmiennej wartości współrzędnej  $x$ . Jeśli jednocześnie zamiast wymiarowych wartości momentu i siły wprowadzić odpowiadające im współczynniki bezwymiarowe  $M_t^*(x)$  i  $P_t^*(x)$  wg formuły

$$(14) \quad M_t^* = \frac{M_t}{D} \quad \text{i} \quad P_t^* = \frac{P_t b}{D},$$

to wynik tego obliczenia będzie następujący:

$$(15) \quad \begin{aligned} P_t^*(x) &= \frac{b}{D} \int_0^b h \sigma_{xb}^* R dy = \pi^2 \sigma_{x0}^* \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \text{const} = P_{tx}^*, \\ M_t^*(x) &= \frac{1}{D} \left[ \int_0^b h R \sigma_{xb}^* y dy - P_{tx} \frac{b}{2} \right] = \\ &= \frac{\sigma_{x0}^* \pi^2 \alpha}{12} + 6(1-\nu^2)m^2 \left\{ \left[ [9M(4m^2, 1) - M(4m^2, 9)] \xi_{m1} \xi_{m2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [25M(4m^2, 1) - M(4m^2, 25)] \xi_{m2} \xi_{m3} \right] \cdot \cos \frac{2m\pi x}{a} + \right. \\ &\quad \left. + [M(0,3) - M(0,1)] \xi_{m1} \xi_{m2} + [M(0,5) + M(0,1)] \xi_{m2} \xi_{m3} \right\}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że siła osiowa pozostaje we wszystkich przekrojach stała, moment  $M_t^*(x)$  podlega natomiast oscylacjom. Jego zmienność wzdłuż tarczy przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

Wartość momentu obciążającego tarczę z zewnątrz oznaczono tu przez  $M_{ix}^*(M_{ix})$ . Lokalne zmniejszenie wartości momentu wewnątrz tarczy wynika z przejęcia części tegoż momentu przez żebra wzmacniające krawędzie nieobciążone [6].

Zależność między momentem  $M_{ix}^*$  przenoszonym przez tarczę a współczynnikami  $\sigma_{x_0}^*$  i  $\alpha$  jest następująca:

$$(16) \quad M_{ix}^* = \frac{\sigma_{x_0}^* \pi^2 \alpha}{12} + 6(1-\nu^2)m^2 \{ [M(0,3) - M(0,1) + \\ + 9M(4m^2, 1) + M(4m^2, 9)] \xi_{m1} \xi_{m2} + [M(0,5) - M(0,1) + \\ + 25(M(4m^2, 1) + M(4m^2, 25))] \xi_{m1} \xi_{m3} \}.$$

Jak wynika z rysunku 3 oraz wzorów (12) i (13) w stanie zakrytycznym tarczy współczynniki  $\sigma_{x_0}^*$  i  $\alpha$  tracą prostą interpretację fizyczną. Współczynniki te nie definiują bowiem bezpośrednio ani wartości naprężeń w narożnikach tarczy ( $\sigma_g^*$  i  $\sigma_d^*$ ) ani wartości średnich tychże naprężeń ( $\bar{\sigma}_g^*$  i  $\bar{\sigma}_d^*$ ).

Z analizy rys. 4 oraz wzoru (16) wynika, że znając wartości  $\sigma_{x_0}^*$  i  $\alpha$  nie można obliczyć bezpośrednio (nie znając współczynników  $\xi_{mn}$ ) wartości momentu zginania tarczowego  $M_{ix}^*$ , jaki tarcza przenosi. W szczególności zaś obliczenie odwrotne, tj. wyznaczenie wartości  $\sigma_{x_0}^*$  i  $\alpha$  gdy dane są moment  $M_{ix}^*$  i siła  $P_{ix}^*$ , jest praktycznie niemożliwe.

Reasumując powyższe, można stwierdzić, że współczynniki  $\sigma_{x_0}^*$  i  $\alpha$  nie nadają się praktycznie do opisu stanu obciążenia tarczy po jej wyboczeniu. Z tego powodu w dalszej części rozważań stan obciążenia tarczy opisywany będzie poprzez podanie wartości momentu  $M_{ix}^*$  i siły  $P_{ix}^*$ . W funkcji tych dwu wielkości podane zostaną także wyniki obliczeń numerycznych.

Na zakończenie analizy pola naprężeń należy zauważyć pewną jego własność istotną z punktu widzenia sformułowania warunków współpracy analizowanej tarczy z innymi elementami.

Otóż jeśli obliczyć średnie całkowe odkształcenie względne  $\bar{\epsilon}_g$  w kierunku  $x$  wzdłuż górnej krawędzi  $y = 0$  tarczy z uwzględnieniem panującego tam dwukierunkowego stanu naprężenia, to otrzymuje się

$$(17) \quad \bar{\epsilon}_g = \frac{1}{a} \int_0^a \epsilon_{xb} \Big|_{y=0} dx = \frac{\bar{\sigma}_g}{E}.$$

Analogicznie obliczyć można średnie odkształcenie wzdłuż krawędzi dolnej

$$(18) \quad \bar{\epsilon}_d = \frac{1}{a} \int_0^a \epsilon_{xb} \Big|_{y=b} dx = \frac{\bar{\sigma}_d}{E}.$$

Wzory (17) i (18) stwierdzają, że średnie odkształcenie w kierunku osi  $x$  wzdłuż obu nieobciążonych krawędzi tarczy otrzymać można traktując te krawędzie jako obciążone jednokierunkowe naprężeniem średnim odpowiednio  $\bar{\sigma}_g$  lub  $\bar{\sigma}_d$ . Zostanie to wykorzystane w przybliżonej metodzie obliczania dźwigara skrzynekowego.

Na podstawie przedstawionych powyżej rezultatów ogólnej analizy stanu zakrytycznego tarczy dokonano odpowiednich obliczeń szczegółowych. Kluczem do numerycznego rozwiązania problemu są wartości trzech współczynników  $\xi_{mn}$ , na podstawie których



można obliczyć wszystkie parametry stanu zakrytycznego tarczy, tj. m.in. ugięcia, naprężenia, deformacje itp.

Wartości współczynników  $\xi_{mn}$  wyznaczono metodą minimalizacji całkowej energii potencjalnej  $U$  tarczy. Energia ta jest sumą trzech składników:

$$(19) \quad U = V_a + V_b - L,$$

gdzie  $V_a$  i  $V_b$  są to energie odpowiednio stanu błonowego i zgięciowego tarczy, zaś  $L$  oznacza pracę sił zewnętrznych. Oba składniki energii sprężystej wyrażają się dla dużych ugięć tarczy następującymi wzorami [4]:

$$(20) \quad V_a = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

$$V_b = \frac{h}{2E} \int_0^a \int_0^b \left\{ (\nabla^2 \Phi)^2 - 2(1+\nu) \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy.$$

Pracę sił zewnętrznych wyznaczono metodą wariacyjną, wynosi ona

$$(21) \quad L = \frac{\pi^2 m^2 h^3 \sigma_{x0}}{8\lambda} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) (\xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2 + \xi_{m3}^2) + C,$$

gdzie  $C$  jest stałą dowolną.

Po zsumowaniu wszystkich składników otrzymuje się energię potencjalną  $U$  jako funkcję postaci

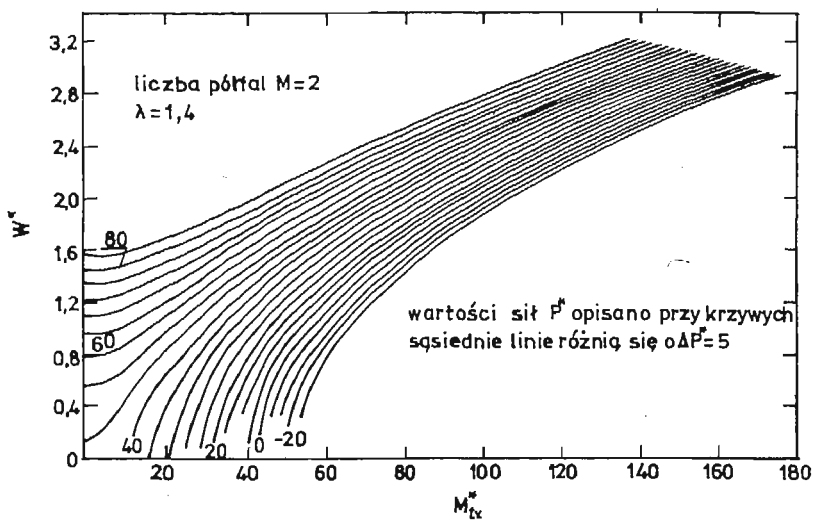
$$(22) \quad U = U(a, b, \lambda, h, E, \nu, \sigma_{x0}, \alpha, \xi_{m1}, \xi_{m2}, \xi_{m3}).$$

Względem zmiennych  $\xi_{mn}$  funkcja ta jest trzynastowyrazowym wielomianem 4-go stopnia.

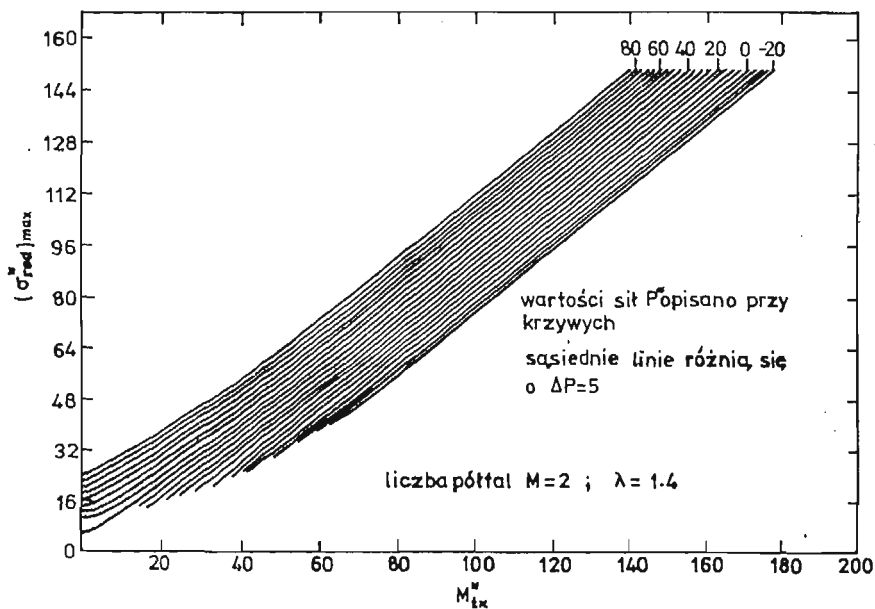
Funkcję (22) minimalizowano numerycznie względem zmiennych  $\xi_{mn}$  przy ustalonych pozostałych parametrach. Znalezione wartości współczynników  $\xi_{mn}$  pozwoliły następnie określić: obciążenie tarczy ( $M_{ix}^*$  i  $P_{ix}^*$ , wg wzorów (15) i (16)), największe bezwymiarowe ugięcie tarczy  $W_{max}^* = w_{max}/h$ , największe naprężenie zredukowane [5]  $\sigma_{red max}^*$  oraz wszystkie inne interesujące wartości, w szczególności zaś  $\sigma_\theta^*$  i  $\sigma_\theta^*$ . Obliczeń dokonano w szerokim zakresie zmienności parametrów, zestawiając wyniki w postaci tablic i wykresów. Przykładowe wykresy przedstawiające zmienność ugięcia maksymalnego  $w_{max}^*$ , największych naprężeń zredukowanych  $\sigma_{red max}^*$  i naprężeń  $\sigma_\theta^*$  w funkcji momentu  $M_{ix}^*$  przy różnych wartościach siły osiowej  $P_{ix}^*$  przedstawiono na rys. 5, 6 i 7. Przedstawione na wykresach ujemne wartości siły  $P_{ix}^*$  odpowiadają rozciąganiu tarczy.

Dla oceny poprawności otrzymanych rezultatów przeprowadzono weryfikacyjne badania doświadczalne. Przebadano dwie tarcze stalowe o wymiarach  $315 \times 350$  ( $\lambda = 0,9$ ) oraz  $384 \times 350$  mm ( $\lambda = 1,1$ ) poddane czystemu zginaniu, wyznaczając ugięcia (9 czujników zegarowych) i naprężenia (202 tensometry oporowe). Tarcza pierwsza wybaczała się w kształcie jednej półfali sinusoidy ( $m = 1$ ), zaś druga — w kształcie dwu półfal ( $m = 2$ ). Przykładowe rezultaty badań doświadczalnych dla tarczy o współczynniku kształtu  $\lambda = 1,1$  przedstawiono w formie wykresów na rys. 8 i 9.

Na rys. 8 pokazano zmienność maksymalnych ugięć zmierzonych i przewidywanych tarczy w funkcji obciążenia mierzonego siłą  $Q$  w maszynie wytrzymałościowej. Rys. 9.



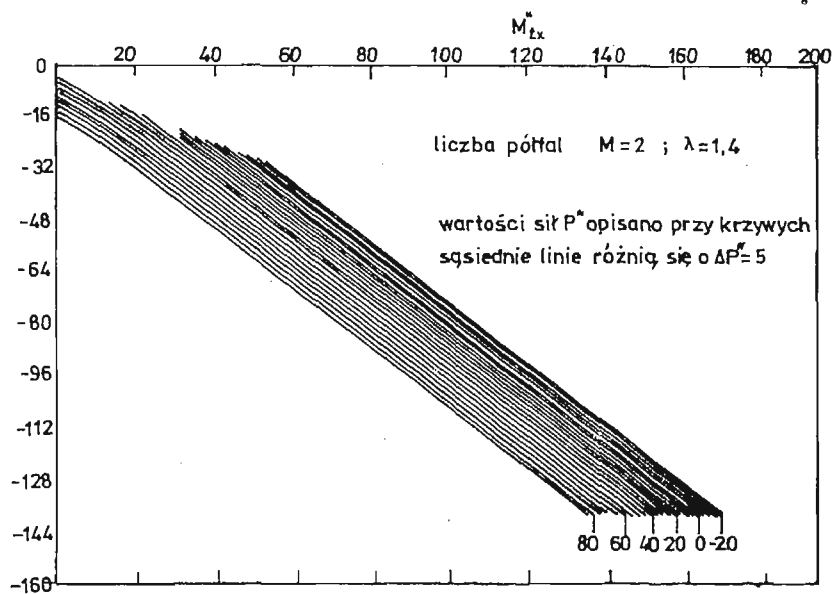
Rys. 5



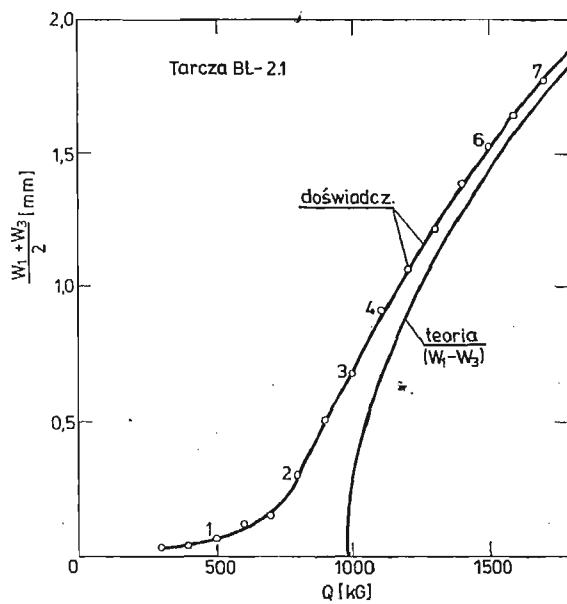
Rys. 6

pokazuje przykładowe rozkłady błonowych i zgięciowych naprężeń normalnych w przekroju pionowym  $x = 0,3a$  przez tarczę, przebiegającym w pobliżu miejsca najsilniejszego jej wybruszenia. Na rys. 10 przedstawiono względne i bezwzględne różnice między ugięciami zmierzonymi i przewidywanymi teoretycznie w funkcji przecięcia tarczy ponad stan krytyczny:

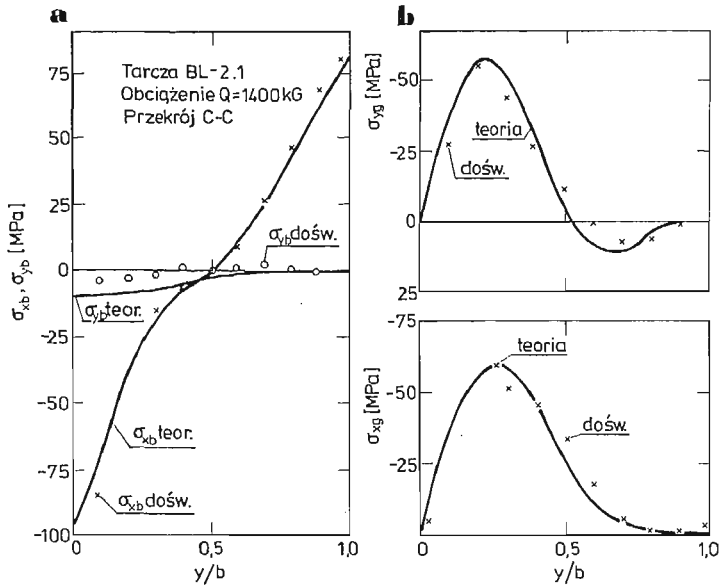
$$n = \frac{Q}{Q_{kr}}$$



Rys. 7

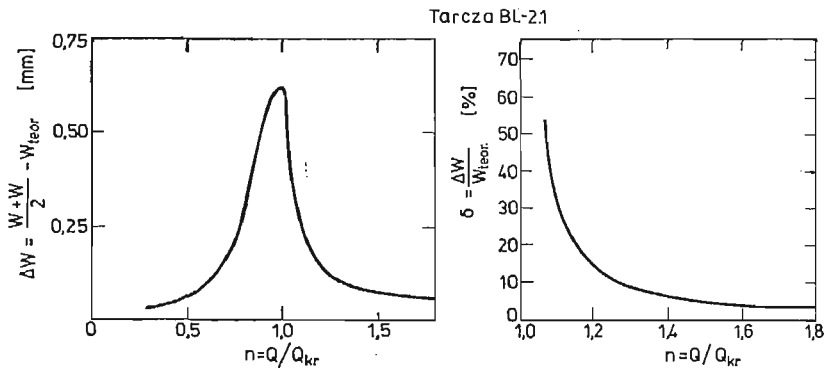


Rys. 8



Rys. 9

W podsumowaniu badań doświadczalnych można stwierdzić, że eksperyment potwierdził całkowicie przewidywania teoretyczne w sensie jakościowym. W ujęciu ilościowym zanotowano pewne rozbieżności między wynikami doświadczenia a przewidywaniami teoretycznymi dla ugięć i naprężeń zgięciowych przy małych obciążeniach. Tłumaczą się one istnieniem przypadkowych ugięć wstępnych w badanych tarczach. W miarę wzrostu przeciążenia tarczy ponad stan krytyczny wspomniane różnice maleją jednak dość szybko — czego przykładem mają być wykresy zamieszczone na rys. 10. Stwierdzenie powyższe pozwala przypuszczać, że zastosowanie przedstawionych tu rezultatów analizy teoretycznej do obliczania rzeczywistych konstrukcji cienkościennych obciążonych niewielkim ugięciem wstępnym nie prowadzi do zbyt wielkich błędów.



Rys. 10

### 3. Przybliżona metoda obliczania cienkościennego dźwigara skrzynkowego poddanego zginaniu i ściskaniu przy utracie stateczności środników

Fragment rozważanego dźwigara oraz jego przekrój poprzeczny przedstawiono na rys. 11.

Przedstawione parametry, charakteryzujące przekrój poprzeczny dźwigara oznaczono następującymi symbolami literowymi:

$F_d$  — pole powierzchni przekroju poprzecznego pasa dolnego

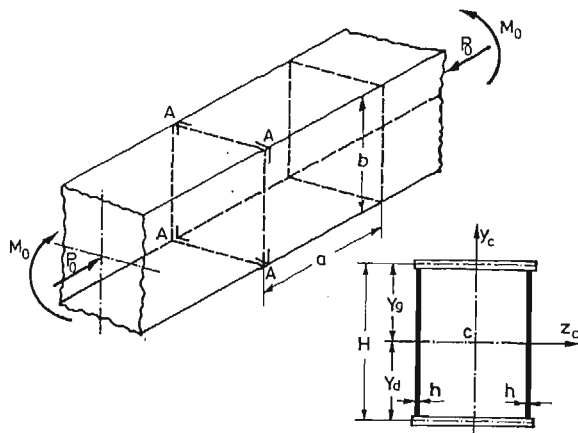
$F_g$  — pole powierzchni przekroju poprzecznego pasa górnego

$J$  — moment bezwładności przekroju poprzecznego dźwigara względem głównej osi centralnej  $z_c$

$F$  — pole powierzchni przekroju poprzecznego całego dźwigara,

$M_0$  — moment zginający dźwigar,

$P_0$  — siła osiowa, obciążająca dźwigar.



Rys. 11

Proponowana metoda obliczania dźwigara opiera się na następujących przybliżonych założeniach:

- środnik dźwigara na odcinku między przeponami pracuje jak tarcza swobodnie podparta na obwodzie,
- pasy górny i dolny pozostają płaskie i podlegają jednokierunkowemu stanowi naprężenia,
- odkształcenia względne pasów i średnie odkształcenia względne środników na wszystkich krawędziach styku — w kierunku osi dźwigara — są sobie równe.

Obliczenie dźwigara sprowadza się zatem do znalezienia takiego rozkładu naprężeń w jego przekroju poprzecznym, który spełnia przyjęte wyżej założenia. Proponowana metoda ma charakter iteracyjny. Pod rozwagę należy wziąć np. przekrój  $A-A-A-A$  dźwigara (rys. 11), położony w bezpośrednim sąsiedztwie przepony. W pierwszym przybliżeniu wyznacza się rozkład naprężeń w dźwigarze na gruncie liniowej teorii zginania belek. Odpowiednie naprężenia w skrajnych górnych i dolnych włóknach środnika wynoszą:

$$(23) \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} \sigma'_g &= - \left( \frac{M_0}{J} Y_g + \frac{P_0}{F} \right), \\ \sigma'_d &= \left( \frac{M_0}{J} Y_d - \frac{P_0}{F} \right). \end{aligned}$$

Indeks „prim” oznacza tu pierwszą iterację.

Dla tak określonego liniowego rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym dźwigara wyznaczyć można wartość bezwymiarowego momentu zginania tarczowego  $M_{tx}' = M_{tx}^{*'}$ , przenieszonego w pierwszym i drugim przybliżeniu przez pojedynczy środnik. Wartość ta wyraża się zależnością:

$$(24) \quad M_{tx}' = M_{tx}^{*'} = \frac{M_{tx}''}{D} = - \frac{\sigma'_g}{R} \frac{\pi^2}{12} \left( 1 - \frac{\sigma'_d}{\sigma'_g} \right)$$

Bezwymiarowa siła osiowa  $P_{tx}' = P_{tx}^{*'}$ , przenieszona przez pojedynczy środnik, w pierwszym i drugim przybliżeniu wynosi:

$$(25) \quad P_{tx}' = P_{tx}^{*'} = \frac{\pi^2 \sigma'_g}{2R} \left( 1 + \frac{\sigma'_d}{\sigma'_g} \right).$$

W zależnościach (24) i (25) symbolami  $D$  i  $R$  oznaczono płytową sztywność zginania oraz współczynnik redukcji naprężeń (10) dla fragmentu środnika na odcinku między przeponami. W przypadku gdy środnik dźwigara pracuje w stanie zakrytycznym, w oparciu o obliczone wartości współczynników  $P_{tx}^{*''}$  i  $M_{tx}^{*''}$  wyznaczyć można kolejne przybliżenie rozkładu naprężeń w przekroju  $A-A-A-A$ , z uwzględnieniem teorii nieliniowej. Rozważany przekrój  $A-A-A-A$  poprowadzony przez środnik (rys. 11) można utożsamiać z przekrojem kryńcowym  $x = 0$  dla tarczy prostokątnej. Wówczas, na podstawie rozwiązania cyfrowego zagadnienia pracy zakrytycznej odpowiedniej tarczy (fragmentu środnika), poddanej obciążeniu  $M_{tx}^{*''}$  i  $P_{tx}^{*''}$ , wyznaczyć można parametry charakterystyczne nieliniowego rozkładu naprężenia w przekroju  $A-A-A-A$  tegoż środnika. Parametrami tymi będą m.in. wartości naprężeń  $\sigma_g''$  i  $\sigma_d''$  (lub  $\sigma_g^{*''}$  i  $\sigma_d^{*''}$ ) w skrajnych włóknach środnika. Na mocy założenia o jednokierunkowym stanie naprężenia w pasach oraz w wyniku wcześniejszej analizy odkształceń  $\varepsilon_x$  na krawędziach  $y = 0$  i  $y = b$  tarczy wzory (17) i (18), można założyć, że naprężenia w pasach: górnym i dolnym wynosić będą odpowiednio  $\sigma_g''$  i  $\sigma_d''$ . Założono przy tym jednakowy moduł Younga dla pasów i środników dźwigara. W drugim przybliżeniu otrzymuje się więc nieliniowy rozkład naprężeń w przekroju  $A-A-A-A$  dźwigara, przedstawiony na rys. 12. Otrzymany rozkład naprężeń zastąpić można statycznie równoważnym układem sił i momentów, przedstawionych na rys. 12. Wartości sił  $P_g''$  i  $P_d''$  w pasach wyrażają się przy tym wzorami:

$$(26) \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} P_g'' &= \sigma_g'' F_g = \sigma_g^{*''} R F_g, \\ P_d'' &= \sigma_d'' F_d = \sigma_d^{*''} R F_d. \end{aligned}$$

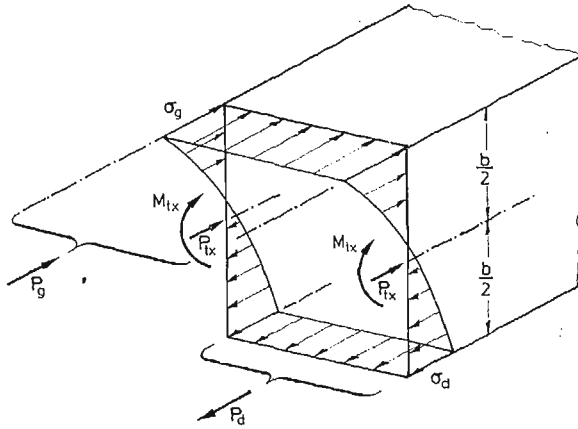
Otrzymany układ sił i momentów nie jest jednak statycznie równoważny sile  $P_0$  i momentowi  $M_0$ , obciążającym dźwigar. Wynika to m.in. z faktu, że odpowiednie naprężenia  $\sigma_g''$  i  $\sigma_d''$  nie są sobie na ogół równe. Globalna siła osiowa  $P_0''$  dla dźwigara zredukowana do środka ciężkości przekroju poprzecznego oraz globalny moment gnący  $M_0''$ , w drugim przybliżeniu wynoszą odpowiednio:

$$(27) \quad \text{oraz} \quad \begin{aligned} P_0'' &= 2P_{tx}^{*''} \frac{D}{b} - R(\sigma_g^{*''} F_g - \sigma_d^{*''} F_d), \\ M_0'' &= 2DM_{tx}^{*''} + R(-\sigma_g^{*''} F_g Y_g + \sigma_d^{*''} F_d Y_d) - 2 \frac{D}{b} P_{tx}^{*''} \left( \frac{H}{2} - Y_g \right) \end{aligned}$$

Po obliczeniu wartości  $P_0''$  i  $M_0''$  należy oszacować, jak dalece różnią się one od zadanego obciążenia  $P_0$  i  $M_0$  dla dźwigara. Zazwyczaj bowiem, otrzymuje się

$$(28) \quad P_0'' > P_0 \quad \text{i} \quad M_0'' \neq M_0.$$

Jeżeli różnice  $M_0 - M_0''$  oraz  $P_0 - P_0''$  będą zbyt duże, należy do następnej iteracji przyjąć nowe wartości  $P_{tx}^{*'''}$  i  $M_{tx}^{*'''}$ , nie różniące się zbyt od  $P_{tx}^{*''}$  i  $M_{tx}^{*''}$ . Proces iterowania należy kontynuować aż do osiągnięcia zadawalająco małych różnic  $P_0 - P_0^{(n)}$  i  $M_0 - M_0^{(n)}$ , przy czym zbieżności iteracji jest zagwarantowana. Po zakończeniu iteracji otrzymuje się wyznaczony dla przekroju  $A-A-A-A$  rozkład naprężeń w dźwigarze i jednocześnie wartości  $P_{tx}^{(n)}$  i  $M_{tx}^{(n)}$ , charakteryzujące obciążenie środnika. Pozwala to na określenie — na podstawie odpowiednich tablic i wykresów — takich interesujących wielkości charakteryzujących jego pracę, jak: maksymalne ugięcie, naprężenia zredukowane itp.



Rys. 12

Należy zaznaczyć, że dla częstego przypadku czystego zginania dźwigara ( $P_0 = 0$ ), omówiona metoda prowadzi do wniosku, że środniki podlegają zginaniu tarczowemu i jednoczesnemu rozciąganiu ( $P_{tx} < 0$ ). Rozciąganie środników jest bowiem konieczne dla zachowania warunku znikania siły osiowej w całym dźwigarze, gdyż w rozważanym przypadku obciążenia, jak wynika z wcześniejszej analizy, zachodzi relacja

$$(29) \quad |\sigma_g''| > |\sigma_d''|,$$

a co za tym idzie, na ogół

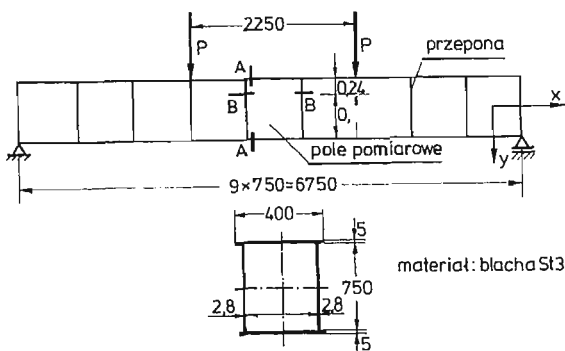
$$(30) \quad P_g'' > P_d''.$$

Omawiana metoda obliczeniowa poddana została częściowej weryfikacji doświadczalnej. Badaniom poddano dwa duże dźwigary stalowe, wykonane jako modele belek pod-

suwnicowych. Skala zmniejszenia badanych dźwigarów w stosunku do typowych konstrukcji rzeczywistych zawierała się w granicach  $1,5 \div 3$ .

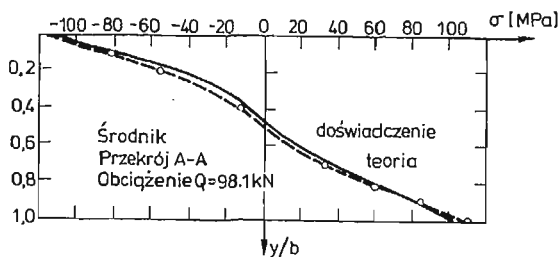
Badane dźwigary oraz schemat ich obciążenia pokazano na rys. 13.

Przy przedstawionym sposobie obciążenia trzy środkowe sektory dźwigara poddane były czystemu zginaniu. Badaniom podlegały m.in. środniki sektora centralnego. Miały one wymiary  $750 \times 750$  mm, a więc ich współczynnik kształtu wynosił  $\lambda = 1$ . W trakcie badań dokonywano pomiarów ugięć (wybrzuszeń) środników — za pomocą czujników zegarowych oraz naprężeń w wybranych przekrojach tychże środników za pomocą tensometrów elektrooporowych. Na rys. 14 przedstawiono wyznaczone teoretycznie oraz doświadczalnie rozkłady normalnych naprężeń błonowych  $\sigma_{x,b}$ , równoległych do osi dźwigara, w przekroju A—A (rys. 13) — położonym w bezpośrednim sąsiedztwie przepony.



Rys. 13

Jak wynika z rysunku, w rozważanym przekroju uzyskano dobrą zgodność wyników doświadczenia z rezultatami otrzymanymi przy zastosowaniu przedstawionej wcześniej przybliżonej metody obliczeniowej. Wyniki badań wykazały także zgodny z przewidywaniami teoretycznymi udział poszczególnych elementów dźwigara (pasów i środników) w przenoszeniu momentu gnącego. Jednocześnie okazało się, że pominięcie ugięcia wstępnego oraz warunków współpracy ścianek i przepon dźwigara powoduje pewne różnice między wyznaczonymi teoretycznie i doświadczalnie wartościami ugięć oraz składowych zgięciowego stanu naprężeń w badanych środnikach. Zakres przeprowadzonych w tej dziedzinie badań jest jednak zbyt skromny dla wyciągnięcia pełnych i ostatecznych wniosków.



Rys. 14



## Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej* Arkady, W-wa 1963.
2. WŁ. WALCZAK, *Analiza stanu naprężenia tarczy prostokątnej po utracie stateczności wywołanej zginaniem w płaszczyźnie tarczy*. Arch. Budowy Maszyn, 1965, Nr 1, s. 3 - 30.
3. J. DJUBEK, R. KODNAR, *Riesenie nielinearnych uloh teorie stihlych stien variacnymi metodami*, Vydavatelstvo Slovenskej Akademie Vied, Bratislava 1965.
4. A. S. WOLMIR, *Gibkije plastinki i obloczki*, Gosudartwiennoje izdatielstwo techniko-teoreticzeskoj literatury, Moskwa 1956.
5. W. WALCZAK, S. JAKUBOWSKI, *The stability and post-buckling state of a rectangular disk under unidirectional bending and simultaneous shear*, Rozprawy Inżynierskie, 1979, 27 nr 4, s. 633 - 649.
6. S. JAKUBOWSKI, *Analiza stanu zakrytycznego tarczy prostokątnej poddanej działaniu mimośrodkowego ściskania*. Praca doktorska wykonana w Instytucie Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej, 1981 r.
7. T. R. GRAVES SMITH, *The local buckling of box girdes under bending stresses*. Int. J. Mech. Sci, 1969, Vol. 11, s. 603 - 612.
8. W. PROTTE, *Zur Beulung versteifter Kastenträger mit symmetrischem Trapez-Querschnitt unter Biegemomenten —, Normalkraft — und Querkraftbeanspruchung*. Techn. Mitt. Krupp. Forsch. Ber. 1976, Band 34, Heft 2, s. 57 - 79.
9. T. R. GRAVES SMITH, *The post-buckled behaviour of a thin walled box beam in pure bending*, Int. J. Mech Sci, 1972, Vol 14, s. 711 - 722.

## Резюме

АНАЛИЗ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЖЕННОЙ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ПРИБЛИЖЕННОЙ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ БАЛКИ

В работе представлен анализ послекритической стадии прямоугольной пластинки, свободно опертой по краям. Пластика нагружена сжимающей силой и изгибающим моментом действующими в её плоскости.

В статье приведены зависимости между прогибами, изгибающими и мембранными напряжениями и перемещениями и нагружением пластинки. Приведен также приближенный метод вычисления напряжений в тонкостенной балке прямоугольного сечения, когда её вертикальные стенки работают в послекритической стадии.

## Summary

THE POST-BUCKLING STATE ANALYSIS OF A RECTANGULAR PLATE SUBJECTED TO AN ECCENTRIC COMPRESSION AND ITS APPLICATION IN AN APPROXIMATE CALCULATIONS OF THIN WALLED BOX GIRDER

The post-buckling state analysis is considered of a rectangular plate, simply supported along their edges, subjected to the bending and compression. The deflection has been determined as well as bending and membrane stresses and in-plane displacements of a plate by means of compressive force and in-plane bending moment values. The approximate method which allows to determine the stresses distribution in thin walled girders is described. The method is based upon the fact, that the webs work as simply supported rectangular plates subjected to the bending and compression.