MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3/4, 20 (1982)

O JEDNOWYMIAROWYM ZAGADNIENIU IDENTYFIKACJI STRUMIENIA CIEPŁA NA BRZEGU WARSTWY PŁASKIEJ

KRZYSZTOF GRYSA,
ZBIGNIEW KOZŁOWSKI
Politechnika Poznańska

Wstęp

Identyfikacja obciążeń termicznych na powierzchniach warstwy płaskiej na podstawie pewnych danych termicznych lub mechanicznych pochodzących z punktów wewnętrznych warstwy, przy — jednocześnie — znanych warunkach mechanicznych na obu powierzchniach warstwy i warunkach początkowych jest problemem, zaliczanym do tzw. zagadnień odwrotnych pól temperatur, [1]. Podobne problemy były rozważane na gruncie teorii wymiany ciepła, [2, 3, 4 i in.], a także na gruncie teorii naprężeń cieplnych, [5, 6]. W niniejszej pracy problem identyfikacji strumienia ciepła i temperatury otoczenia rozważany jest na gruncie termosprężystości, przy założeniu, iż w równaniach ruchu pomijalnie mały jest człon inercyjny.

Poszczególne prace, traktujące o zagadnieniach odwrotnych pól temperatur różnią się, często dość znacznie, tak w podejściach do problemu, jak i w rozumieniu samego pojęcia „zagadnienie odwrotne". Szersze uwagi dotyczące tego tematu można znaleźć w pracy [1].

Metoda badawcza, oparta na zagadnieniach odwrotnych, która łączy ze sobą pomiary, aparat matematyczny oraz inżynierskie wyczucie, jest często jedyną, umożliwiającą określenie obciążeń termicznych brzegu ciała, na którym to brzegu umieszczenie czujników jest niemożliwe bądź niewskazane (np. ściana komory spalania silnika spalinowego, wewnętrzne ściany silnika odrzutowego, powierzchnie łopatek turbin, wewnętrzna ściana lufy itp.).

Identyfikacja strumienia ciepła na powierzchni odgrywa istotną rolę tam, gdzie należy określić ilość ciepła pochłanianego czy odprowadzanego z ośrodka, a więc np. w procesach stygnięcia odlewu, czy też równomiernego nagrzewania lub chłodzenia. Tam, gdzie mogą występować duże gradienty temperatury, oprócz efektów czysto termicznych pojawiają się także efekty termomechaniczne, których wielkość może być nie do pominięcia podczas rozważań dotyczących takiego właśnie procesu termosprężystego. Ponieważ określone obciążenia termiczne brzegów wywołują w ciele termosprężystym określone reakcje typu termicznego i mechanicznego, więc można pokusić się o rozważenie zagadnienia, w którym dane są przebiegi pewnych wielkości termicznych lub mechanicznych w punktach wewnętrznych ciała (tzw. wewnętrzne odpowiedzi, w skrócie WO), a wielkościami identyfikowanymi są przyczyny np. typu termicznego, które je wywołały, czyli termiczne warunki brzegowe. Przy tak postawionym zagadnieniu trzeba wszakże wiedzieć, jakiego typu warunki termiczne należy przyjąć na brzegach, na których się je identyfikuje. W niniejszej pracy przyjmuje się, że na jednym brzegu panują warunki termiczne II rodzaju, zaś na brzegu przeciwnym rozważanej warstwy — warunki III rodzaju.

1. Postawienie zagadnienia

Wiele elementów konstrukcyjnych można w pierwszym przybliżeniu uważać za ciała o nieskomplikowanej geometrii. Rozważana warstwa płaska może być takim właśnie pierwszym przybliżeniem wielu konstrukcji bądź części konstrukcji.

Rozważamy warstwę płaską o grubości h. Niech dolna powierzchnia tej warstwy będzie płaszczyzną Oyz prostokątnego układu współrzędnych o osi Ox skierowanej do góry. W rozważanej warstwie ma miejsce quasi-statyczny proces termosprężysty. W procesie tym wielkościami nieznanymi, podlegającymi wyznaczeniu, będą niektóre warunki brzegowe.

Aby móc w sposób pełny określić problem postawiony w tytule pracy trzeba najpierw wypisać układ równań i warunków, opisujących tzw. zagadnienie proste (brzegowo-początkowe). Na równania te, w przypadku zagadnienia jednowymiarowego i ciała izotropowego, przy pominięciu źródeł ciepła i sił masowych, składają się [7]:

— równanie przewodnictwa cieplnego

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\right)T(x,t)-\eta\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}U(x,t)=0, \tag{1.1}$$

— przemieszczeniowe równanie ruchu z pominiętym członem inercyjnym

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t)-k\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)=0, \tag{1.2}$$

— warunki początkowe

$$T(x,0)=0,\qquad U(x,0)=0, \tag{1.3}$$

— warunki brzegowe

$$\lambda\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=h}=Q(t),\qquad U(h,t)=U_g(t), \tag{1.4}$$

$$\lambda\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\Big|_{x=0}=-\alpha[T_d(t)-T(0,t)],\qquad \sigma_{xx}(0,t)=N_d(t) \tag{1.5}$$

gdzie $T(x,t)$ — temperatura względna, mierzona względem temperatury odniesienia T_0, $U(x,t)$ — przemieszczenie w kierunku osi Ox, t — czas, $\varkappa$ — dyfuzyjność temperaturowa, $\eta=\alpha_t T_0 E/[\lambda(1-2\nu)]$ — współczynnik sprzężenia termomechanicznego, E — moduł Younga, α_t — współczynnik rozszerzalności cieplnej, ν — liczba Poissona, λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego, $k=\alpha_t(1+\nu)/(1-\nu)$, $Q(t)$ — strumień ciepła, $U_g(t)$ — przemieszczenie punktów górnego brzegu warstwy, α — współczynnik wnikania, $T_d(t)$ — temperatura otoczenia dolnego brzegu warstwy, $\sigma_{xx}(x,t)$ — współrzędna tensora naprężenia, $N_d(t)$ — obciążenie dolnego brzegu warstwy.

W pracy rozpatruje się jednowymiarowy jednoosiowy stan odkształcenia, w którym naprężenie σ_{xx} jest powiązane z przemieszczeniem U związkiem konstytutywnym

$$\sigma_{xx}=\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\left[\frac{\partial U}{\partial x}-kT\right]. \tag{1.6}$$

Rozwiązanie zagadnienia prostego polega — jak wiadomo — na wyznaczeniu funkcji $T(x, t)$ i $U(x, t)$ dla $x \in (0, h)$ oraz $t > 0$. Natomiast rozważając zagadnienie identyfikacji warunków brzegowych zakłada się, że znane są *WO* w pewnych punktach wewnętrznych warstwy, zaś wielkościami poszukiwanymi są prawe strony związków (1.4) i (1.5). Z formalnego punktu widzenia możliwe jest odtworzenie wszystkich czterech funkcji, charakteryzujących obciążenie brzegu, tzn. $Q(t)$, $U_g(t)$, $T_d(t)$. oraz $N_d(t)$. Wówczas jednakże potrzebne są cztery *WO*; przypadek taki prowadzi do skomplikowanych, a jednocześnie pozbawionych większego znaczenia technicznego, obliczeń. Dlatego też w pracy ograniczymy się do wyznaczenia dwóch spośród tych funkcji, przyjmując, że dwie pozostałe są dane. Takie postawienie sprawy prowadzi do wielu możliwych do rozwiązania zadań. Niektóre spośród nich przedstawiono w tabeli 1, gdzie ε_{xx} oznacza współrzędną tensora odkształcenia.

Tabela 1

Warianty warunków brzegowych			Możliwe pary *WO*	
Nr	Dane	Szukane	Nr	Para *WO*
I	N_d, U_g	Q, T_d	1°	$T(x_1, t) = T_1(t)$, $T(x_2, t) = T_2(t)$
II	N_d, T_d	Q, U_g	2°	$\varepsilon_{xx}(x_1, t) = E_1(t)$, $\varepsilon_{xx}(x_2, t) = E_2(t)$
III	N_d, Q	T_d, U_g	3°	$T(x_1, t) = T_1(t)$, $\varepsilon_{xx}(x_2, t) = E_2(t)$
IV	U_g, Q	T_d, N_d	4°	$U(x_1, t) = U_1(t)$, $T(x_2, t) = T_2(t)$
V	U_g, T_d	Q, N_d	5°	$U(x_1, t) = U_1(t)$, $\varepsilon_{xx}(x_2, t) = E_2(t)$
VI	T_d, Q	N_d, U_g	6°	$U(x_1, t) = U_1(t)$, $U(x_2, t) = U_2(t)$

Funkcje, opisujące *WO*, nie mogą być funkcjami dowolnymi. Muszą one spełniać pewne ograniczenia, wynikające tak z kształtu równań opisujących proces, jak i z fizyki zagadnienia, [5]. Problem ten omówimy w trzeciej części pracy.

Wszystkie możliwe warianty zagadnień odwrotnych, wynikające z tabeli 1, rozwiązuje się w zasadzie jednakowo. Z tego też powodu w pracy zostanie przedstawione szczegółowo rozwiązanie tylko jednego zagadnienia, a mianowicie wariantu I-3°. Dla uproszczenia obliczeń przyjmuje się, że $N_d = 0$.

Wprowadźmy współrzędne i wielkości bezwymiarowe, opisane następująco:

$$\begin{gathered}\xi = x/h, \quad \tau = \varkappa t/h^2, \quad \Theta = T/T_0, \quad u = U/h, \quad q = Qh/\lambda T_0, \\ \mathrm{Bi} = \alpha h/\lambda, \quad \Theta_d = T_d/T_0, \quad a = \eta\varkappa/T_0, \quad b = kT_0, \quad u_g = U_g/h.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Wykorzystując (1.7) i (1.6) otrzymujemy następujący zespół równań i warunków opisujących zagadnienie identyfikacji strumienia ciepła na obu brzegach warstwy:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\Theta(\xi, \tau) - a\frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \tau}u(\xi, \tau) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}u(\xi, \tau) - b\frac{\partial}{\partial \xi}\Theta(\xi, \tau) = 0, \\ \Theta(\xi, 0) = 0, \quad u(\xi, 0) = 0, \\ \left.\frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = q(\tau), \quad u(1, \tau) = u_g(\tau),\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = -\mathrm{Bi}[\Theta_d(\tau)-\Theta(0,\tau)],$$

$$\left.\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = b\Theta(0,\tau)$$

$$\Theta(\xi_1,\tau) = \Theta_1(\tau), \quad \varepsilon_{xx}(\xi_2,\tau) = E_2(\tau) \tag{1.9}$$

Funkcjami danymi są $\Theta_1(\tau)$, $E_2(\tau)$ oraz $u_g(\tau)$. Funkcjami poszukiwanymi są $q(\tau)$ oraz $\Theta_d(\tau)$; przy znanej funkcji Θ_d wyznaczenie strumienia ciepła na powierzchni $\xi = 0$ nie przedstawia już żadnej trudności. Zauważmy, że po wyznaczeniu q i Θ_d staje się możliwe uzyskanie pełnego opisu procesu termosprężystego w warstwie.

Rozwiązywanie problemu będzie przebiegać na następującej, opisanej w pracy [5], drodze:

— w pierwszym etapie zostanie rozwiązany w transformatach Laplace'a problem brzegowo-początkowy (1.8) przy założeniu, że funkcje q i Θ_d są znane,

— w sposób formalny zostaną określone transformaty funkcji q i Θ_d,

— ustalone zostaną warunki, decydujące o tym, jakie funkcje mogą opisywać WO, Θ_1 i E_2,

— odwrócone zostaną transformaty Laplace'a i wyznaczone zostanie przybliżone i ścisłe rozwiązanie zagadnienia identyfikacji

— otrzymane wyniki zostaną zweryfikowane numerycznie.

2. Formalna konstrukcja transformat Laplace'a rozwiązań zagadnienia identyfikacji

Stosując przekształcenie Laplace'a do równań (1.8) przy założeniu, że funkcje $q(\tau)$ i $\Theta(\tau)$ są transformowalne, łatwo otrzymuje się związki określające transformaty bezwymiarowych przemieszczeń i temperatury:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}(\xi,s) = {}& \frac{\bar{q}(s)}{\beta\sqrt{s}M(s)}\left[\beta\sqrt{s}\cosh\left(\beta\xi\sqrt{s}\right)+\mathrm{Bi}\sinh\left(\beta\xi\sqrt{s}\right)\right]+\\ &+\frac{\bar{\Theta}_d(s)}{M(s)}\mathrm{Bi}\cosh\left[\beta(1-\xi)\sqrt{s}\right],\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\xi,s) = {}& \bar{u}_g(s)-\frac{\bar{\Theta}_d(s)b\,\mathrm{Bi}}{\beta\sqrt{s}M(s)}\sinh\left[\beta(1-\xi)\sqrt{s}\right]+\\ &+\frac{\bar{q}(s)b}{\beta^2 sM(s)}\left[\beta\sqrt{s}\sinh\left(\beta\xi\sqrt{s}\right)+\mathrm{Bi}\cosh\left(\beta\xi\sqrt{s}\right)-M(s)\right],\end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie

$$M(s) = \beta\sqrt{s}\sinh\left(\beta\sqrt{s}\right)+\mathrm{Bi}\cosh\left(\beta\sqrt{s}\right), \tag{2.3}$$

$\beta^2 = 1+ab = 1+\varkappa\eta k$; nadkreśleniami oznaczono transformaty Laplace'a poszczególnych funkcji, zaś s jest parametrem transformacji.

Do wykorzystania związków (1.9) i wyznaczenia na ich podstawie transformat q i $\bar{\Theta}_d$ brakuje jeszcze wyrażenia na transformatę odkształcenia, $\bar{\varepsilon}_{xx}$. Korzystając ze znanego wzoru, definiującego ε_{xx} w teorii małych odkształceń, oraz ze wzoru (2.2), znajdujemy

$$
\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{xx}(\xi, s) = {} & \frac{\bar{q}(s) b}{\beta\sqrt{s}\, M(s)} \left[\beta\sqrt{s}\cosh(\beta\xi\sqrt{s}) + \mathrm{Bi}\sinh(\beta\xi\sqrt{s})\right] + \\
& + \frac{\bar{\Theta}_d(s) b}{M(s)} \mathrm{Bi}\cosh\left[\beta(1-\xi)\sqrt{s}\right].
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Transformując następnie związki (1.9) oraz wykorzystując (2.1) i (2.4) można w sposób zupełnie formalny wyznaczyć transformaty $\bar{q}(s)$ i $\bar{\Theta}_d(s)$:

$$
\begin{aligned}
\bar{q}(s) = {} & \frac{\beta\sqrt{s}}{\sinh\left[\beta(\xi_1-\xi_2)\sqrt{s}\right]} \Big\{\bar{\Theta}_1(s)\cosh\left[\beta(1-\xi_2)\sqrt{s}\right] - \\
& - \frac{\bar{E}_2(s)}{b}\cosh\left[\beta(1-\xi_1)\sqrt{s}\right]\Big\},
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\Theta}_d(s) = {} & \bar{E}_2(s)\frac{\beta\sqrt{s}\cosh(\beta\xi_1\sqrt{s}) + \mathrm{Bi}\sinh(\beta\xi_1\sqrt{s})}{b\,\mathrm{Bi}\sinh\left[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}\right]} - \\
& - \bar{\Theta}_1(s)\frac{\beta\sqrt{s}\cosh(\beta\xi_2\sqrt{s}) + \mathrm{Bi}\sinh(\beta\xi_2\sqrt{s})}{\sinh\left[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}\right]}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Warunek brzegowy na przemieszczenia nie wchodzi do tych równań, więc $u_g(\tau)$ może być dowolną funkcją dopuszczalną przez fizykę zagadnienia (niekoniecznie równą zero).

Zauważmy, że wobec warunku, narzuconego na naprężenia σ_{xx}, z którego — po przyjęciu $N_d = 0$ — wynika ostatni związek spośród równań (1.8), punkty ξ_1 i ξ_2 nie mogą się pokrywać. Stąd ograniczenie na dobór tych punktów:

$$
\xi_1 \neq \xi_2, \qquad \xi_1, \xi_2 \in (0, 1). \tag{2.7}
$$

3. Warunki ograniczające dla wewnętrznych odpowiedzi

Jak już wspomniano w pierwszej części pracy, nie każda funkcja może opisywać *WO*. Funkcje te muszą spełniać następujące warunki, [5]:

1^0 Muszą mieć skończone wartości dla $\tau \to 0_+$ oraz dla $\tau \to \infty$

2^0 Muszą być ograniczone dla $\tau \in (0, \infty)$

3^0 Transformaty $\bar{q}(s)$ i $\bar{\Theta}_d(s)$ muszą być odwracalne.

Przyjmując dodatkowo, iż transformaty będą odwracane metodą residuów otrzymuje się następujące ograniczenia na transformaty $\bar{q}$ i $\bar{\Theta}_d$, [5]:

$$
\left|\begin{Bmatrix} \bar{q}(s) \\ \bar{\Theta}_d(s) \end{Bmatrix}\right|_{|s|=R_n} \leqslant \begin{Bmatrix} k_n^q \\ k_n^\Theta \end{Bmatrix}, \qquad \lim_{n\to\infty} \begin{Bmatrix} k_n^q \\ k_n^\Theta \end{Bmatrix} = 0, \tag{3.1}
$$

gdzie $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$. Ponadto od obu transformat wymagana jest ciągłość dla $|s| = R_n$.

Warunek 2° prowadzi do wniosku, że wykładnik wzrastania (odcięta zbieżności) funkcji $q(\tau)$ i $\Theta_d(\tau)$ jest równy zero, [8, s. 78]. Konsekwencją tego faktu jest analityczność transformat Laplace'a tych funkcji dla $\mathrm{Re}\, s > 0$.

W celu wyznaczenia warunków ograniczających dla WO wykorzystamy w pierwszym rzędzie nierówność (3.1). Dla transformat $\bar{\Theta}_1(s)$ i $\bar{E}_2(s)$ wynikają stąd, dla dużych $|s|$, następujące nierówności:

$$
\begin{aligned}
|\bar{\Theta}_1(s)| &\leqslant K_\Theta |s^{-\gamma-\frac{1}{2}}| \left|\exp\left(-\beta D_\Theta \sqrt{s}\right)\right|, \\
|\bar{E}_2(s)| &\leqslant K_E |s^{-\gamma-\frac{1}{2}}| \left|\exp\left(-\beta D_E \sqrt{s}\right)\right|,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

gdzie $D_\Theta = \max(2\xi_2-\xi_1,\, 1-\xi_1)$, $D_E = \max(1+\xi_2-2\xi_1,\, \xi_2)$, zaś K_Θ, K_E i γ — stałe dodatnie.

Podobnie jak w pracy [5], można łatwo wykazać, że nierówności (3.2) są wystarczające także dla spełniania warunku 1°.

4. Wyznaczenie funkcji $q(\tau)$ i $\Theta_d(\tau)$

Samo określenie nierówności (3.2) jeszcze nie wystarczy dla odwrócenia transformat (2.5) i (2.6). Wynika to stąd, że transformaty WO, $\bar{\Theta}_1$ i $\bar{E}_2$, są przemnożone przez funkcje, których nie da się odwrócić bezpośrednio metodą residuów z uwagi na to, iż na ogół nie są to transformaty dystrybucji wykładniczych. Funkcje te dają się bez trudności odwrócić tylko wtedy, gdy $\xi_2-\xi_1 > 1-\xi_2$ lub gdy $\xi_2-\xi_1 > \xi_1$ — tym niemniej nawet w tym przypadku tylko niektóre spośród składników definiujących prawe strony związków (2.5) i (2.6) dają się odwrócić. W związku z tym zastosujemy tu procedurę przybliżonego odwracania transformat, dzięki której „kłopotliwe" funkcje zostaną przemnożone przez czynniki, dające w wyniku tego przemnożenia funkcje odwracalne metodą residuów.

Jak wykazano w pracy [5], przybliżenie WO przez funkcje schodkowe jest dopuszczalne w sensie warunków (3.2). Jest to procedura uzasadniona także wówczas, jeśli wziąć pod uwagę ewentualne zastosowanie otrzymanych w pracy wyników. Zwykle bowiem WO dane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, z pomiarów — a na podstawie takiego zbioru danych najłatwiej buduje się właśnie funkcje schodkowe.

Przyjmijmy zatem, że WO, $\Theta_1(\tau)$ i $E_2(\tau)$, dane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, $\{\Theta_k\}_{k=1,\dots,n}$ i $\{E_l\}_{l=1,2,\dots,m}$, gdzie $\Theta_k = \Theta_1(k\Delta_1)$, $E_l = E_1(l\Delta_2)$, Δ_1, Δ_2 — kroki czasowe przy próbkowaniu funkcji Θ_1 i E_2; zakładamy, że $n\Delta_1 = m\Delta_2$. Oznaczając funkcje schodkowe, zbudowane na podstawie tych zbiorów danych, jako $S\Theta_1(\tau)$ i $SE_2(\tau)$, mamy

$$
\begin{aligned}
S\Theta_1(s) &= \sum_{k=0}^{n} \Theta_k[\eta(\tau-k\Delta_1)-\eta(\tau-(k+1)\Delta_1)], \\
SE_2(\tau) &= \sum_{k=0}^{m} E_k[\eta(\tau-k\Delta_2)-\eta(\tau-(k+1)\Delta_2)],
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

gdzie $\eta(x)$ — funkcja Heaviside'a. Funkcje te są dopuszczalne w sensie warunków (3.2). Transformaty Laplace'a tych funkcji mają postać

$$
(4.2)\qquad
\begin{aligned}
\overline{S\Theta_1}(s) &= \frac{\Theta_0}{s}+\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n+1}(\Theta_k-\Theta_{k-1})e^{-sk\Delta_1}, \qquad \text{gdzie } \Theta_{n+1}=\Theta_n,\\
\overline{SE_2}(s) &= \frac{E_0}{s}+\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{m+1}(E_k-E_{k-1})e^{-sk\Delta_2}, \qquad \text{gdzie } E_{n+1}=E_n.
\end{aligned}
$$

Wobec warunków początkowych znajdujemy, iż $\Theta_0 = 0$; również o odkształceniu zakładamy, że w chwili początkowej było równe zero, skąd mamy $E_0 = 0$. Warunki na E_{n+1} i Θ_{n+1} związane są z brakiem informacji o funkcjach Θ_1 i E_2 dla $\tau > n\Delta_1$ — tak więc $S\Theta_1(\tau)$ i $SE_2(\tau)$ są określone tylko dla $\tau \in (0, n\Delta_1)$, a poza tym przedziałem równe swoim wartościom w chwili $n\Delta_1$.

Wstawiając transformaty $\overline{S\Theta_1}$ i $\overline{SE_2}$ do wzorów (2.5) i (2.6) w miejsce $\overline{\Theta}_1$ i $\overline{E}_2$ otrzymujemy transformaty, określające w przybliżeniu $\overline{q}$ i $\overline{\Theta}_d$. Oznaczymy te transformaty $\overline{Aq}(s)$ i $\overline{A\Theta_d}(s)$. Tak więc mamy

$$
(4.3)\qquad \overline{Aq}(s) = -\frac{\beta}{\sqrt{s}}\sum_{l=1}^{n+1}(\Theta_l-\Theta_{l-1})\frac{\cosh[\beta(1-\xi_2)\sqrt{s}]}{\sinh[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}]}e^{-sl\Delta_1}+ \frac{\beta}{b\sqrt{s}}\sum_{l=1}^{m+1}(E_l-E_{l-1})\frac{\cosh[\beta(1-\xi_1)\sqrt{s}]}{\sinh[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}]}e^{-sl\Delta_2},
$$

$$
(4.4)\qquad \overline{A\Theta_d}(s) = \sum_{l=1}^{n+1}(\Theta_l-\Theta_{l-1})\frac{\beta\sqrt{s}\cosh(\beta\xi_2\sqrt{s})+\mathrm{Bi}\sinh(\beta\xi_2\sqrt{s})}{s\sinh[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}]}e^{-sl\Delta_1}- \sum_{l=1}^{m+1}(E_l-E_{l-1})\frac{\beta\sqrt{s}\cosh(\beta\xi_1\sqrt{s})+\mathrm{Bi}\sinh(\beta\xi_1\sqrt{s})}{sb\mathrm{Bi}\sinh[\beta(\xi_2-\xi_1)\sqrt{s}]}e^{-sl\Delta_2}.
$$

Odwracając transformaty (4.3) i (4.4) metodą residuów otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad A\Theta_d(\tau) = \sum_{l=1}^{n+1}\Bigg\{&(\Theta_l-\Theta_{l-1})\Bigg[\frac{1+\mathrm{Bi}\xi_2}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)}+\\
&+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\cos\frac{\pi k\xi_2}{\xi_2-\xi_1}}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)}+\frac{\sin\frac{\pi k\xi_2}{\xi_2-\xi_1}}{\pi k}\right)e^{-s_k(\tau-l\Delta_1)}\Bigg]\eta(\tau-l\Delta_1)\Bigg\}-\\
&-\frac{1}{b}\sum_{l=1}^{m+1}\Bigg\{(E_l-E_{l-1})\Bigg[\frac{1+\mathrm{Bi}\xi_1}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)}+\\
&+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\cos\frac{\pi k\xi_1}{\xi_2-\xi_1}}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)}+\frac{\sin\frac{\pi k\xi_1}{\xi_2-\xi_1}}{\pi k}\right)e^{-s_k(\tau-l\Delta_2)}\Bigg]\eta(\tau-l\Delta_2)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

(4.6) [cd.]
$$A q(\tau) = -\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\Bigg(\sum_{l=1}^{n+1}\Bigg\{(\Theta_l-\Theta_{l-1})\Bigg[1+ 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\frac{\pi k(1-\xi_2)}{\xi_2-\xi_1}e^{-s_k(\tau-l\Delta_1)}\Bigg]\eta(\tau-l\Delta_1)\Bigg\}-$$
$$-\frac{1}{b}\sum_{l=1}^{m+1}\Bigg\{(E_l-E_{l-1})\Bigg[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\frac{\pi k(1-\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}e^{-s_k(\tau-l\Delta_2)}\Bigg]\eta(\tau-l\Delta_2)\Bigg\}\Bigg),$$

gdzie $s_k = \left[\frac{\pi k}{\beta(\xi_2-\xi_1)}\right]^2$, $\tau > 0$.

Powyższe wzory są słuszne nie tylko dla odwrotnych zagadnień termosprężystości. Można je stosować także w teorii naprężeń cieplnych przyjmując $\beta = 1$. Wzór (4.5) można wykorzystać ponadto do wyznaczania liczby Biota, Bi, o ile znana jest temperatura otoczenia, Θ_d, a więc również i $A\Theta_d$. Po przekształceniach otrzymujemy związek następujący:

(4.7)
$$\mathrm{Bi} \cong \frac{AL(\xi_1, \xi_2, \tau)}{A\Theta_d(\tau)-AM(\xi_1, \xi_2, \tau)},$$

gdzie

(4.8)
$$AL(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\Bigg(\sum_{l=1}^{n+1}\Bigg\{(\Theta_l-\Theta_{l-1})\Bigg[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \times$$
$$\times\cos\frac{\pi k\xi_2}{\xi_2-\xi_1}e^{-s_k(\tau-l\Delta_1)}\Bigg]\eta(\tau-l\Delta_1)\Bigg\}-\frac{1}{b}\sum_{l=1}^{m+1}\Bigg\{(E_l-E_{l-1})\Bigg[1+$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\frac{\pi k\xi_1}{\xi_2-\xi_1}e^{-s_k(\tau-l\Delta_2)}\Bigg]\eta(\tau-l\Delta_2)\Bigg\}\Bigg),$$

(4.9)
$$AM(\xi_1, \xi_2, \tau) = \sum_{l=1}^{n+1}\Bigg\{(\Theta_l-\Theta_{l-1})\Bigg[\frac{\xi_2}{\xi_2-\xi_1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\pi k}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi k\xi_2}{\xi_2-\xi_1}e^{-s_k(\tau-\Delta l_1)}\Bigg]\eta(\tau-l\Delta_1)\Bigg\}-\frac{1}{b}\sum_{l=1}^{m+1}\Bigg\{(E_l-E_{l-1})\times$$
$$\times\Bigg[\frac{\xi_1}{\xi_2-\xi_1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\pi k}\sin\frac{\pi k\xi_1}{\xi_2-\xi_1}e^{-s_k(\tau-l\Delta_2)}\Bigg]\eta(\tau-l\Delta_2)\Bigg\}.$$

Na podstawie związków (4.5) i (4.6) można także otrzymać ścisłe rozwiązania $\Theta_d(\tau)$ i $q(\tau)$. Zwiększając mianowicie m i n oraz zmniejszając jednocześnie Δ_1 i Δ_2 w ten sposób, aby $m\Delta_2 = n\Delta_1 = \mathrm{const}$, otrzymujemy w granicy dla $m, n \to \infty$ i $\Delta_1, \Delta_2 \to 0$ następujące wzory:

$$(4.10) \quad \Theta_d(\tau) = \frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} * \left[\frac{1+\mathrm{Bi}\xi_2}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{\cos\frac{\pi k \xi_2}{\xi_2-\xi_1}}{\mathrm{Bi}(\xi_1-\xi_2)} + \frac{\sin\frac{\pi k\xi_2}{\xi_2-\xi_1}}{\pi k}\right) e^{-s_k\tau}\right] - \frac{1}{b}\frac{dE_2(\tau)}{d\tau} * \left[\frac{1+\mathrm{Bi}\xi_1}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\cos\frac{\pi k\xi_1}{\xi_2-\xi_1}}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)} + \frac{\sin\frac{\pi k \xi_1}{\xi_2-\xi_1}}{\pi k}\right) e^{-s_k\tau}\right],$$

$$(4.11) \quad q(\tau) = -\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left\{\frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} * \left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cos\frac{\pi k(1-\xi_2)}{\xi_2-\xi_1} \times e^{-s_k\tau}\right] - \frac{1}{b}\frac{dE_2(\tau)}{d\tau} * \left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\frac{\pi k(1-\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} e^{-s_k\tau}\right]\right\}$$

gdzie $*$ oznacza splot, [8].

Na zakończenie tej części pracy zauważmy, że znajomość funkcji $\Theta_d(\tau)$ i $q(\tau)$ (ew. $A\Theta_d(\tau)$ i $Aq(\tau)$) pozwala wyznaczyć rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego (1.8). Tym samym staje się możliwe określenie pochodnej $\partial\Theta/\partial\xi$ na brzegu $\xi = 0$, jak również określenie — na podstawie prawa Fouriera — strumienia ciepła na tym brzegu. Tak więc znajomość funkcji $q(\tau)$ i $\Theta_d(\tau)$ wystarcza dla identyfikacji strumienia ciepła także na tym brzegu warstwy, na którym panują warunki brzegowe III rodzaju dla temperatury.

5. Analiza otrzymanych wyników

Wzory (4.5) i (4.6) zawierają szeregi nieskończone. Może się zdarzyć, że przy odpowiednim doborze parametrów sumy tych szeregów będą wnosiły pomijalnie małe poprawki do wyników obliczeń prawych stron. Przyjmijmy, że sumę szeregu można pominąć, jeśli wartość jej pierwszego wyrazu wynosi 1/200 wartości składnika, stanowiącego wraz z szeregiem zawartość odpowiedniego nawiasu kwadratowego. W przypadku wzoru (4.6) prowadzi to — przy założeniu, że wartości $Aq(\tau)$ wylicza się tylko dla chwil $\tau_l = l\Delta + \frac{\Delta}{2}$, $l = 0, 1, \ldots$ — do następującego ograniczenia na kroki czasowe Δ :

$$(5.1) \qquad \exp\left[-s_k\frac{\Delta_i}{2}\right] \leqslant 0.005, \quad i = 1, 2.$$

Stąd w przybliżeniu wynika następujący warunek na Δ_i:

$$(5.2) \qquad \Delta_i \geqslant \frac{12}{\pi^2}\beta^2(\xi_2-\xi_1)^2, \quad i = 1, 2.$$

Ponieważ w zagadnieniach termosprężystości dotyczących metali zwykle β bardzo niewiele różni się od jedności, więc prawa strona nierówności (5.2) jest wówczas w przybliżeniu równa $1{,}2 \cdot (\xi_2-\xi_1)^2$.

Gdy warunek (5.2) jest spełniony, wówczas przybliżoną wartość strumienia ciepła $Aq(\tau)$ można wyznaczyć z uproszczonego wzoru

$$Aq(\tau_k) = -\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left\{\sum_{l=1}^{n+1}(\Theta_l-\Theta_{l-1})\eta(\tau_k-l\Delta_1)- -\frac{1}{b}\sum_{l=1}^{m+1}(E_l-E_{l-1})\eta(\tau_k-l\Delta_2)\right\}, \tag{5.3}$$

gdzie $\tau_k = k\Delta+\Delta/2, \quad \Delta = \frac{1}{2}(\Delta_1+\Delta_2)$.

W przypadku, gdy $\Delta_1 = \Delta_2$, wzór (5.3) przyjmuje szczególnie prostą postać, a mianowicie

$$Aq(\tau_k) = -\frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left(\Theta_k-\frac{E_k}{b}\right) \tag{5.4}$$

Wykonując analogiczne szacowanie dla bezwymiarowych kroków czasowych Δ_1 i Δ_2 we wzorze (4.5), otrzymujemy uproszczony wzór na przybliżone wartości funkcji $A\Theta_d(\tau_k)$,

$$A\Theta_d(\tau_k) = \frac{1}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)}\left\{(1+\mathrm{Bi}\,\xi_2)\sum_{l=1}^{n+1}(\Theta_l-\Theta_{l-1})\eta(\tau_k-l\Delta_1)- -\frac{1+\mathrm{Bi}\,\xi_1}{b}\sum_{l=1}^{m+1}(E_l-E_{l-1})\eta(\tau_k-l\Delta_2)\right\}, \tag{5.5}$$

który dobrze tę funkcję opisuje, jeśli zachodzi nierówność

$$\Delta_i \leqslant C(\xi_1, \xi_2, \mathrm{Bi})(\xi_2-\xi_1)^2, \quad i = 1, 2, \tag{5.6}$$

gdzie

$$C(\xi_1, \xi_2, \mathrm{Bi}) = \frac{12}{\pi^2}\beta^2 \max_{i=1,2}\left(\left[\frac{\cos\frac{\pi\xi_i}{\xi_2-\xi_1}}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)}+\frac{\sin\frac{\pi\xi_i}{\xi_2-\xi_1}}{\pi}\right]^{-1}\right)$$

W przypadku, gdy $\Delta_1 = \Delta_2$, wzór (5.5) przyjmuje szczególnie prostą postać, a mianowicie

$$A\Theta_d(\tau_k) = \frac{1}{\mathrm{Bi}(\xi_2-\xi_1)}\left[(1+\mathrm{Bi}\,\xi_2)\Theta_k-(1+\mathrm{Bi}\,\xi_1)\frac{E_k}{b}\right] \tag{5.7}$$

Wzory (5.4) i (5.7) mają jedną istotną cechę, różniącą je od wyrażeń (4.5) i (4.6) czy (5.3) i (5.5). Jest nią fakt, że występują w nich tylko wielkości mierzone w tej chwili, w której odtwarzamy funkcje q i Θ_d. W przypadku, gdyby chodziło o identyfikację strumienia ciepła i temperatury otoczenia na podstawie pomiarów, to wyższość wzorów (5.4) i (5.7) nad dokładniejszymi od nich wzorami (4.5), (4.6), (5.3) i (5.5) polega na tym, że w zasadzie nie trzeba znać chwili, w której proces termosprężysty się rozpoczął. W takim ujęciu warunki (5.2) i (5.6) stają się warunkami ograniczającymi od dołu chwilę pierwszego pomiaru w stosunku do chwili rozpoczęcia się procesu: $\tau \geqslant 1.5\Delta$. Zwróćmy uwagę, iż wzór (4.10), czy też (4.5), pozwala także wyznaczyć termiczne obciążenie brzegu warstwy w przypadku warunków I lub II rodzaju. Przechodząc bowiem z liczbą Biota Bi do nieskończoności znajdujemy wzór na temperaturę brzegu $\xi = 0$ (warunek brzegowy I rodzaju):

$$(5.8) \qquad \Theta_d^I(\tau) = \frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} * \left[\frac{1}{\xi_2-\xi_1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin\frac{\pi k \xi_2}{\xi_2-\xi_1} e^{-s_k\tau}\right] - \frac{1}{b}\frac{dE_2(\tau)}{d\tau} * \left[\frac{1}{\xi_2-\xi_1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin\frac{\pi k \xi_1}{\xi_2-\xi_1} e^{-s_k\tau}\right],$$

zaś przechodząc z Bi do zera i jednocześnie oznaczając $q_d(\tau) = \lim\limits_{Bi\to 0} Bi\Theta_d(\tau)$ (warunek brzegowy II rodzaju), otrzymujemy

$$(5.9) \qquad q_d(\tau) = \frac{1}{\xi_2-\xi_1}\left\{\frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} * \left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\frac{\pi k \xi_2}{\xi_2-\xi_1} e^{-s_k\tau}\right] - \frac{1}{b}\frac{dE_2(\tau)}{d\tau} * \left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\frac{\pi k \xi_1}{\xi_2-\xi_1} e^{-s_k\tau}\right]\right\}.$$

Widać, że wzory (4.11) i (5.9) mają analogiczną budowę.

Z analizy wzoru (4.10) lub (4.5) wynika, iż istnieją pewne punkty, ξ_1 i ξ_2, dla których wzór ten nieco się upraszcza. Zachodzi to mianowicie dla takich punktów wewnętrznych, które są powiązane zależnością

$$(5.10) \qquad \xi_2 = \frac{n+1}{n}\xi_1, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Wówczas $\sin\frac{\pi k \xi_i}{\xi_2-\xi_1} = 0$ dla $i = 1, 2$ $\cos\frac{\pi k \xi_1}{\xi_2-\xi_1} = (-1^{kn})$ oraz $\cos\frac{\pi k \xi_2}{\xi_2-\xi_1} = (-1)^{k(n+1)}$, a wzór (4.10) przyjmuje postać

$$(5.11) \qquad \Theta_d(\tau) = \frac{1}{Bi(\xi_2-\xi_1)}\left\{\frac{d\Theta_1(\tau)}{d\tau} * \left[1 + Bi\xi_2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k\left(\frac{\xi_2}{\xi_2-\xi_1}+1\right)} e^{-s_k\tau}\right] - \frac{1}{b}\frac{dE_2(\tau)}{d\tau} * \left[1 + Bi\xi_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\frac{k\xi_2}{\xi_2-\xi_1}} e^{-s_k\tau}\right]\right\}.$$

6. Weryfikacja numeryczna otrzymanych wyników

W celu zweryfikowania otrzymanych wyników pod kątem ich dokładności zastosujemy następującą procedurę. Przyjmiemy najpierw pewne wartości funkcji $q(\tau)$ i $\Theta_d(\tau)$ jako dane i na ich podstawie obliczymy wartości temperatury $\Theta(\xi, \tau)$ i odkształceń $\varepsilon_{xx}(\xi, \tau)$ w pewnych punktach wewnętrznych warstwy. Następnie przyjmiemy obliczone wartości jako WO i na ich podstawie będziemy odtwarzali funkcje $q(\tau)$ i $\Theta(\tau)$ zgodnie z procedurą podaną wyżej.

Przyjmując, że $\Theta(\tau)$ oraz $q(\tau)$ są stałe, tzn. $\Theta_d(\tau) = \Theta_d$, $q(\tau) = q$ dla $\tau > 0$, oraz odwracając transformaty dane wzorami (2.1) i (2.4) otrzymujemy

$$\Theta(\xi,\tau) = q\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi\right)+\Theta_d-2\sum_{k=1}^{\infty}[qA_k(\xi,\mathrm{Bi}+\Theta_d B_k(\xi,\mathrm{Bi})e^{-r_k\tau}, \tag{6.1}$$

$$\varepsilon_{xx}(\xi,\tau) = b\Theta(\xi,\tau), \tag{6.2}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_k(\xi,\mathrm{Bi}) &= \frac{1}{\beta^2 r_k}\cdot\frac{\beta\sqrt{r_k}\cos(\beta\xi\sqrt{r_k})+\mathrm{Bi}\sin(\beta\xi\sqrt{r_k})}{\beta\sqrt{r_k}\cos(\beta\sqrt{r_k})+(1+\mathrm{Bi})\sin(\beta\sqrt{r_k})},\\ B_k(\xi,\mathrm{Bi}) &= \frac{\mathrm{Bi}}{\beta(\sqrt{r_k})}\cdot\frac{\cos[\beta(1-\xi)\sqrt{r_k}]}{\beta\sqrt{r_k}\cos(\beta\sqrt{r_k})+(1+\mathrm{Bi})\sin(\beta\sqrt{r_k})}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

zaś r_r są kolejnymi pierwiastkami równania

$$\mathrm{ctg}\,\beta\sqrt{r} = \frac{\beta\sqrt{r}}{\mathrm{Bi}}. \tag{6.4}$$

Obliczenia numeryczne wykonano dla następujących danych liczbowych: $Q(\tau) = 100$ W/m^2, $T_d(\tau) = 1°$, $h = 0.01$ m, $\lambda = 40$ W/m deg, $T_0 = 1°$, $\eta = 10^{-5}$ deg s/m^2, $\varkappa = 10^{-4}$ m^2/s, k = $0.22286 \cdot 10^{-4}$ 1/deg, a ponadto dla czterech różnych liczb Biota, Bi = 0.1, 1.0, 10, 100, dla dwóch różnych kroków czasowych $\Delta t = 0.01$ i 1.0 s, oraz dla różnych par punktów $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ i dla chwil czasu $t \in (0, 30)$. Przy wykorzystywaniu wzorów (4.5) i (4.6) obliczano wartość funkcji $A\Theta_d$ i Aq w chwilach $\tau_k = k\Delta+\Delta/2$.

Nierówności (5.2) i (5.6) przyjmują w tym przypadku — dla Bi = 1.0, $\xi_1 = 0.1$ i $\xi_2 = 0.9$ — następującą postać (prawe strony zaokrąglano do góry):

$$\Delta \geqslant 0.7 \text{ w przypadku } Aq(\tau), \qquad \Delta \geqslant 0.65 \text{ w przypadku } A\Theta_d(\tau).$$

Celem sprawdzenia o ile bardziej dokładne są wzory (4.5) i (4.6) od wzorów (5.4) i (5.7) wykonano obliczenia dotyczące Aq i $A\Theta_d$, przy czym we wzorach (4.5) i (4.6) przyjęto $\Delta = 0.01$, zaś we wzorach (5.4) i (5.7) $\Delta = 1$. Wyniki obliczeń, dokonanych dla Bi = 1, $\xi_1 = 0.1$ i $\xi_2 = 0.9$ zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2

czas	$A\Theta_d(\tau)$		$Aq(\tau)$	
s	wg (4.5)	wg (5.7)	wg (4.6)	wg (5.4)
1.5	0.95847	0.81736	−112.59	−685.66
2.5	0.98017	0.91277	−152.50	−272.81
3.5	0.99053	0.95832	51.514	−78.030
4.5	0.99548	0.98019	76.846	14.985
5.5	0.99784	0.99057	88.941	59.404
6.5	0.99897	0.99554	94.716	80.615
7.5	0.99951	0.99782	97.479	90.741
8.5	0.99976	0.99896	98.793	95.587
9.5	0.99989	0.99951	99.424	97.893

Przyjmując, że dokładność odtwarzania termicznych obciążeń brzegu powinna wynosić conajmniej 95%, to wariant „dokładny" (wzory (4.5) i (4.6)) daje ten wynik średnio o 2 s szybciej, niż wariant „uproszczony". Trzeba jednak zaznaczyć, że wariant „uproszczony" można było łatwo obliczyć „ręcznie", podczas gdy wariant „dokładny" zajął 30 min pracy EMC. Przemawia to zdecydowanie na korzyść wariantu „uproszczonego" — dlatego też w dalszych obliczeniach posługiwano się tylko wzorami (5.4) i (5.7).

Kolejnym etapem analizy numerycznej było ustalenie, jaki wpływ na dokładność identyfikacji obciążeń termicznych brzegu ma zmiana odległości między punktami ξ_1 i ξ_2, gdy ich środek ciężkości pozostaje w tym samym miejscu. W tabeli 3 zebrano wyniki obliczeń dla trzech par punktów o środku ciężkości równym 0.5 (liczba Biota Bi = 0.1).

Tabela 3

Czas s	$A\Theta_d(\tau)$			$Aq(\tau)$		
	$\xi_1 = 0.45$ $\xi_2 = 0.55$	$\xi_1 = 0.30$ $\xi_2 = 0.70$	$\xi_1 = 0.10$ $\xi_2 = 0.90$	$\xi_1 = 0.45$ $\xi_2 = 0.55$	$\xi_1 = 0.30$ $\xi_2 = 0.70$	$\xi_1 = 0.10$ $\xi_2 = 0.90$
1.5	0.43983	0.44158	0.38482	−124.30	−124.17	−123.74
3.5	0.53850	0.54000	0.53629	−84.800	−84.698	−84.341
5.5	0.61977	0.62098	0.62957	−52.250	−52.167	−51.874
7.5	0.68674	0.68773	0.69084	−25.439	−25.367	−25.127
9.5	0.74191	0.74273	0.74315	−3.344	−3.286	−3.200
11.5	0.78735	0.79103	0.79299	14.861	14.905	14.941
13.5	0.82481	0.82537	0.82591	29.853	29.893	29.932
15.5	0.85565	0.85613	0.85709	42.213	42.241	42.356
17.5	0.88105	0.88146	0.88191	52.397	52.417	52.447
19.5	0.90200	0.90234	0.90271	60.781	60.797	60.807
21.5	0.91277	0.91306	0.91339	67.680	67.701	67.813
23.5	0.93348	0.93372	0.93498	73.377	73.389	73.391
25.5	0.94518	0.94539	0.94553	78.072	78.078	78.086
27.5	0.95484	0.95500	0.95520	81.930	81.940	81.951
29.5	0.96277	0.96293	0.96316	85.119	85.120	85.122

Jak widać rozrzut punktów nie ma praktycznie żadnego wpływu na dokładność odtwarzania. Można więc osłabić warunki (6.5) przez przyjęcie punktów ξ_1 i ξ_2 jak najbliżej siebie.

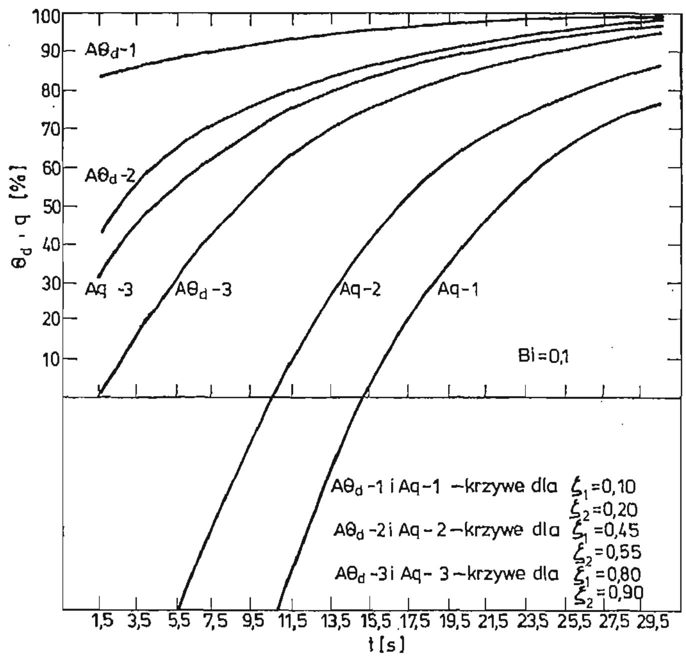
Następnym krokiem analizy numerycznej było zbadanie, czy zmieniając położenie środka ciękości punktów ξ , $i = 1, 2$, można w krótszym czasie znaleźć przebiegi nieznanych warunków brzegowych. Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wykresy obrazujące funkcje $Aq(t)$ i $A\Theta$ (t) dla czterech różnych wartości liczby Biota, Bi = 0.1, 1.0, 10 i 100. Na osi rzędnych zaznaczono dokładność identyfikacji q i Θ_d w procentach. Analizując te wykresy można dojść do następujących wniosków:

1° wszystkie krzywe mają charakter krzywych wykładniczych

2° temperatura Θ_d jest znacznie lepiej odtwarzana niż strumień ciepła

3° im większa jest liczba Biota, tym krótszy czas potrzebny jest do odtworzenia z daną dokładnością nieznanych warunków brzegowych

4° im środek ciężkości punktów ξ_1 i ξ_2 znajduje się bliżej któregoś z brzegów warstwy,



Rys. 1

tym lepiej odtwarzane jest obciążenie termiczne tego brzegu i tym gorzej odtwarzane jest obciążenie termiczne brzegu przeciwnego.

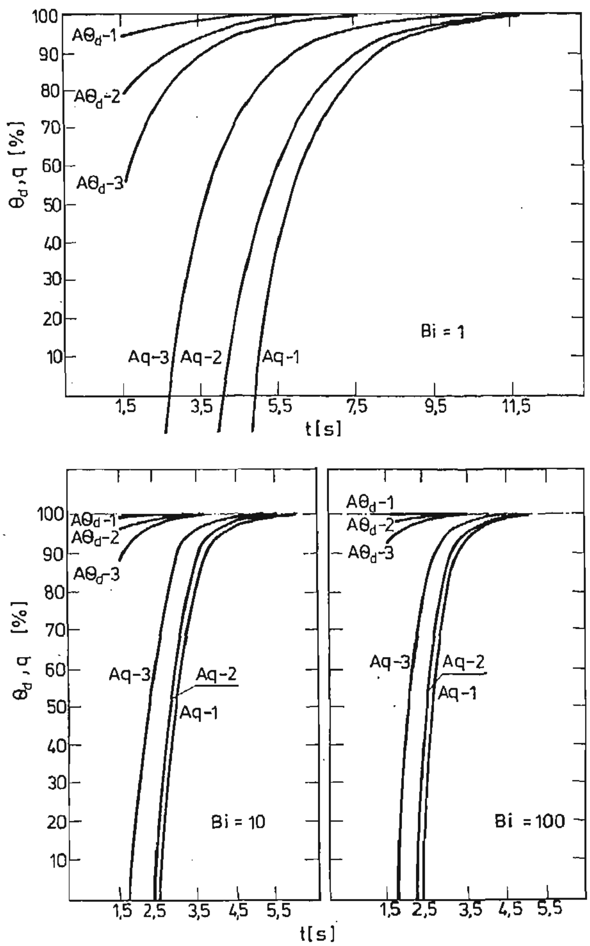
Spróbujmy wyjaśnić, skąd się biorą takie cechy omawianych wykresów. Wniosek 1° stanie się oczywisty, gdy do wyrażeń (5.4) i (5.7) wstawić prawe strony wzorów (6.1) i (6.2), określone odpowiednio w punktach ξ_1 i ξ_2. Otrzymamy bowiem zależności o charakterze wykładniczym:

$$(6.5)\qquad Aq(\tau) = q+\frac{2}{\xi_2-\xi_1}\sum_{k=1}^{\infty} q[A_k(\xi_1, \mathrm{Bi})-A_k(\xi_2, \mathrm{Bi})]+ \\ +\Theta_d[B_k(\xi_1, \mathrm{Bi})-B_k(\xi_2, \mathrm{Bi})]\Big\} e^{-r_k\tau},$$

$$(6.6)\qquad A\Theta_d(\tau) = \Theta_d+\frac{2}{\xi_2-\xi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{q\Big[A_k(\xi_2, \mathrm{Bi})\Big(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi_1\Big)- \\ -A_k(\xi_1, \mathrm{Bi})\Big(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi_2\Big)\Big]+\Theta_d\Big[B_k(\xi_2, \mathrm{Bi})\Big(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi_1\Big)-B_k(\xi_1, \mathrm{Bi})\Big(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi_2\Big)\Big]\Big\} e^{-r_k\tau}.$$

Jeśli ograniczymy się tylko do pierwszego wyrazu szeregu nieskończonego, to zależności te można zapisać w postaci

$$(6.7)\qquad \frac{Aq(\tau)}{q}-1 = \frac{e^{-r_1\tau}}{\xi_2-\xi_1}\Big\{A_1(\xi_1, \mathrm{Bi})-A_1(\xi_2, \mathrm{Bi})+\frac{\Theta_d}{q}[B_1(\xi_1, \mathrm{Bi})-B_1(\xi_2, \mathrm{Bi})]\Big\},$$



Rys. 2

$$\text{(6.7)}\ [\text{cd.}]\quad \frac{A\Theta_d(\tau)}{\Theta_d}-1=\frac{e^{-r_1\tau}}{\xi_2-\xi_1}\left\{B_1(\xi_2,\mathrm{Bi})\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi_1\right)-\right.$$

$$\left.-B_1(\xi_1,\mathrm{Bi})\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi_2\right)+\frac{q}{\Theta_d}\left[A_1(\xi_2,\mathrm{Bi})\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi_1\right)-A_1(\xi_1,\mathrm{Bi})\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}}+\xi_2\right)\right]\right\}.$$

Przy ustalonych punktach ξ_1 i ξ_2 oraz danej liczbie Biota, Bi, wartości lewych stron związków (6.7) zależeć będą w danej chwili czasu tylko od ilorazu q/Θ_d. Zbadajmy, dla jakich wartości ilorazu q/Θ_d lepiej jest identyfikowany strumień ciepła, $Aq(\tau)$, a dla jakich — temperatura $A\Theta_d(\tau)$. Wymaga to rozwiązania nierówności

$$\text{(6.8)}\qquad \left|\frac{Aq(\tau)}{q}-1\right|<\left|\frac{A\Theta_d(\tau)}{\Theta_d}-1\right|.$$

Obliczenia, przeprowadzone dla $\xi_1 = 0.3$, $\xi_2 = 0.7$ i $\mathrm{Bi} = 1.0$ wskazują, że obszar, w którym lepiej jest odtwarzana temperatura Θ_d scharakteryzowany jest nierównością $-1.337 < q/\Theta_d < 4.558$, albo — wracając do zmiennych wymiarowych —

$$-5548 < Q/T_d < 18232. \tag{6.9}$$

W praktyce zdecydowana większość ilorazów Q/T_d zawiera się w przedziale, w którym lepiej jest odtwarzana temperatura $A\Theta_d(\tau)$.

Wniosek 3° można łatwo wyjaśnić w oparciu o wartości pierwszych pierwiastków równania (6.4) dla różnych liczb Biota. Dla $\mathrm{Bi} = 0.1$ mamy $r_1 = 0.09675$, dla $\mathrm{Bi} = 1.0$ $r_1 = 0.74012$, dla $\mathrm{Bi} = 10$ $r_1 = 2.04175$, oraz dla $\mathrm{Bi} = 100$ $r_1 = 2.41884$. We wzorach (6.7) człony wykładnicze tym szybciej wygaszają wyrażenie stojące przy nich, im wartość pierwiastka r_1 jest większa. Dlatego dla dużych liczb Biota już po kilku sekundach człon ten ma wartość pomijalnie małą i dokładność odtwarzania jest niemal stuprocentowa.

Ostatni wniosek nie da się tak łatwo wyjaśnić matematycznie jak poprzednie. Jednakże jego interpretacja fizyczna jest prosta. Wpływ obciążenia termicznego danego brzegu warstwy tym silniej uwidacznia się w wartościach *WO* im bliżej tego brzegu leży środek ciężkości punktów ξ_1 i ξ_2. Stąd też łatwiej jest odtworzyć obciążenie termiczne tego właśnie brzegu.

Uwagi końcowe

Przedstawiona w pracy metoda identyfikacji daje się bezpośrednio przenieść na przypadki ciał o innych kształtach jak i na innego typu jednowymiarowe zagadnienia identyfikacji. Wykorzystane w pracy dla przedstawienia funkcji opisujących WO funkcje schodkowe nie są jedynym przedstawieniem dopuszczalnym. Funkcjami dopuszczalnymi są np. splajny n-tego rzędu (funkcje, których n-te pochodne są funkcjami schodkowymi). Jednakże zwiększenie dokładności opisu WO prowadzi do skomplikowania wyników, podczas gdy wybór funkcji schodkowych pozwolił na otrzymanie bardzo prostych formuł przybliżonych (5.4) i (5.7).

Główną zaletą przedstawionej metody identyfikacji wydaje się być jej stosunkowo duża dokładność przy nieskomplikowanych wzorach, opisujących wielkości identyfikowane. Z uwagi na to metoda dobrze nadaje się do weryfikacji doświadczalnej.

Na odrębną uwagę zasługuje fakt, iż niejako przy okazji otrzymano związek określający w przybliżeniu liczbę Biota (wzór (4.7)). Wzór ten także można sprowadzić do prostszej postaci, jeśli spełnione są ograniczenia (5.2) i (5.6); jeśli ponadto $\Delta_1 = \Delta_2$, wówczas otrzymujemy związek

$$\mathrm{Bi} \cong \frac{\Theta_k - E_k/b}{(\xi_2-\xi_1)A\Theta_d(\tau_k) - \Theta_k\xi_2 + E_k\xi_1/b},$$

gdzie $\tau_k = k\Delta + \frac{\Delta}{2}$, $\Theta_k = \Theta_1(k\Delta)$, $E_k = E_2(k\Delta)$.

Przedstawiona w pracy technika odwracania transformat Laplace'a pozwala ominąć te trudności, które stały się przyczyną niepowodzeń przy wielu innych, wcześniejszych próbach rozwiązywania zagadnień odwrotnych wymiany ciepła, [1]. Wydaje się, że wymagają dalszego rozwoju techniki obliczeniowe, związane z transformacją Laplace'a jak i z rachunkiem operatorów Mikusińskiego, [9], gdyż pojawiające się w toku obliczeń dotyczących zagadnień odwrotnych funkcje zmiennej zespolonej s (parametru transformacji) mają charakter operatorów Mikusińskiego, czy też transformat dystrybucji typu odmiennego niż wykładnicze.

Analiza numeryczna potwierdziła poprawność otrzymanych wyników, jak również pozwoliła prześledzić ich dokładność i wrażliwość na dobór punktów ξ_1 i ξ_2, jak również różnych liczb Biota. Szczególnego podkreślenia wymaga fakt, iż obliczenia te można wykonać nawet posługując się prostym kalkulatorem czy suwakiem.

Literatura cytowana w tekście

1. K. Grysa, M. J. Ciałkowski, *Zagadnienia odwrotne pól temperatur — przegląd literatury*, Mech. Teoret. Stos., **18**, 4, 535 - 554, (1980).
2. J. V. Beck, *Surface Heat Flux Determination Using an Integral Method*, Nucl. Eng. Design, **7**, 170 - 178, (1968).
3. C. J. Chen, D. M. Thomsen, *On Transient Cylindrical Surface Heat Flux Predicted from Interior Temperature Response*, AIAA Journal, **13**, 697 - 699, (1975).
4. G. Stolz, Jr. *Numerical Solution to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes*, Trans. ASME, s. C: J. Heat Transfer, **82**, 20 - 26, (1960).
5. K. Grysa, M. J. Ciałkowski, H. Kamiński, *An Inverse Temperature Field Problem of the Theory of Thermal Stresses*, Nucl. Eng. Design, **64**, 169 - 184, (1981).
6. M. J. Ciałkowski, K. Grysa, *On a Certain Inverse Problem of Temperature and Thermal Stress Fields*, Acta Mechanica, **36**, 169 - 185, (1980).
7. W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN Warszawa, 1970, s. 673.
8. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT Warszawa, 1972.
9. J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa, 1957.

Резюме

О ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСКОГО СЛОЯ

В работе представлено приближенное и точное решение задачи идентификаци теплового потока. Задача рассмотрена на основе сопряженной теории тепловых напряжении. Чтобы определить тепловой поток на одной поверхности слоя и температуру окружающей среды для второй поверхности, избрано температуру и деформацию как так называемые внутренные ответы. Нумерической анализ иллюстрирует точность теоретических результатов и влияние выбора внутренных точек ξ_1 и ξ_2 и числа Био на точность идентификации.

Summary

ON AN ONE-DIMENSIONAL HEAT FLUX IDENTIFICATION PROBLEM AT A SURFACE OF A PLANE SLAB

In the paper an analytical approximate and exact solution of an heat flux identification problem is shown. The problem is considered on the ground of the theory of thermoelasticity. To determine the heat flux at one surface of the slab and a surrounding temperature at the another one the temperature and strain were chosen as the socalled internal response. Numerical analysis illustrates the accuracy of the theoretical results as well as an influence of the choice of the interior points, ξ_1 and ξ_2, and the Biot number for the accuracy of the identification.