

STATYCZNE CIŚNIENIE NISZCZĄCE MEMBRANĘ Z PROMIENIOWYMI KARBAMI

DANIEL BUGAJNY,
MARIAN OSWALD,
WACŁAW SZYC

Poznań

1. Wprowadzenie

Wyznaczanie obciążeń niszczących dla cienkich membran utwierdzonych na brzegach i obciążonych równomiernym jednostronnym ciśnieniem było przedmiotem licznych badań teoretycznych i doświadczalnych. Rozwiązania teoretyczne budowane były na bazie dużych odkształceń plastycznych membran z uwzględnieniem wzmocnienia materiału, zmiany grubości membrany w procesie deformacji oraz różnych związków fizycznych teorii plastyczności.

Jedną z podstawowych prac w tym zakresie przedstawił A. GLEYZAL [1]. Podał on numeryczną metodę rozwiązania równań plastyczności i równowagi opisujących zachowanie się cienkiej okrągłej membrany w oparciu o eksperymentalnie określoną funkcję uzależniającą oktaedryczne naprężenia styczne od kąta odkształcenia postaciowego dla konkretnego materiału (stali) w próbie rozciągania. Analizę A. Gleyzala rozwinęli N. A. WEIL i N. N. NEWMARK [2] wprowadzając nowe, udoskonalone prawo opisujące zależność między odkształceniami i przemieszczeniami dla dużych ugięć plastycznych. Wymienione prace zmierzały do określenia warunków kształtowania wytłoczek metodą tłoczenia hydraulicznego. W pracy [3] uwzględniono dodatkowo anizotropowe wzmocnienie materiału membrany w procesie deformacji. W. M. TRUSZINA [4] wprowadziła do rozważań niejednorodne własności materiału wzdłuż promienia membrany. Z analizy wyników powyższych prac wynika wniosek, że powierzchnia membrany w procesie deformacji przyjmuje kształt w przybliżeniu kulisty. Analizie plastycznej małowyniosłej powłoki sferycznej poświęcona jest praca M. DUSZEK [5], w której m.in. wykazano, że obszar stanu błonowego w cienkiej powłoce przy dużych ugięciach obejmuje praktycznie całą jej powierzchnię z wyjątkiem małego obszaru brzegowego. Na podstawie omówionych wyżej prac można ustalić wartości ciśnień niszczących gładkie membrany.

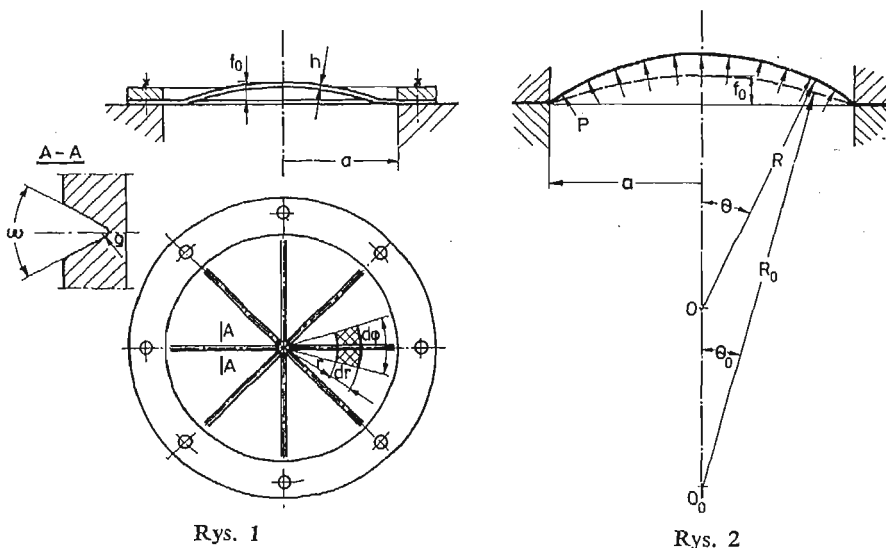
W niniejszej pracy zaproponowano nieskomplikowany sposób określania statycznego ciśnienia niszczącego dla membran posiadających układ promieniowych karbów (rowków). Membrany takie mają zastosowanie w zabezpieczeniach dekompresyjnych urządzeń i pomieszczeń zagrożonych wybuchem pyłów lub gazów. Wartości statycznych ciśnień niszczą-

cych membrany stanowią podstawę do prawidłowego i funkcjonalnego zaprojektowania układów dekompresyjnych [6, 7].

Membrany z rowkami zapewniają właściwy mechanizm otwarcia-odsłonięcia otworu dekompresyjnego, umożliwiając swobodny wypływ produktów spalania wybuchowego nie dopuszczając do nadmiernego wzrostu ciśnienia wewnątrz chronionego obiektu. Praca zużyta na zniszczenie takiej membrany jest znacznie mniejsza od pracy niszczenia analogicznych membran gładkich, gdyż ugięcia membran z rowkami są ograniczone działaniem karbów.

2. Teoretyczne wyznaczenie wartości statycznego ciśnienia niszczonego

Przedmiotem rozważań jest cienka membrana wykonana z materiału plastycznego (np. stopy aluminium, mosiądz, miękka stal). Membrana ma kształt kołowy z układem promieniowych rowków o stałej głębokości i profilu trójkątnym. W wyniku zastosowania technologii wykonania rowków metodą wygniatania, membrana przyjmuje kształt pokazany na rys. 1. Środkowa część membrany (z wyjątkiem małego obszaru brzegowego)



Rys. 1

Rys. 2

posiada kształt zbliżony do czaszy kulistej o niewielkiej wyniosłości f_0 . W miarę wzrostu ciśnienia wyniosłość czaszy powiększa się i w granicznym przypadku promień osiąga wartość R . Przyjęty do rozważań schemat przedstawiono na rys. 2.

Założono, że membrana posiada wstępną krzywiznę kulistą o promieniu R_0 , a jej brzegi są utwierdzone bez możliwości przemieszczeń w kierunku promieniowym. Wynikają stąd następujące zależności geometryczne:

$$(2.1) \quad R_0 = \frac{1}{2f_0} (a^2 + f_0^2), \quad \theta_0 = \arcsin \frac{a}{R_0},$$

$$R = \frac{a}{\sin \theta}.$$

Południk czaszy o długości początkowej $\Theta_0 R_0$ pod wpływem ciśnienia niszczonego osiąga graniczną długość ΘR , stąd wydłużenie względne określone jest zależnością:

$$(2.2) \quad \varepsilon_r = \frac{\Theta R}{\Theta_0 R_0} - 1.$$

Podstawiając tu R określone z (2.1) otrzymujemy po przekształceniach związek

$$(2.3) \quad \sin \Theta = C \cdot \Theta,$$

gdzie

$$(2.4) \quad C = \frac{a}{(1 + \varepsilon_r) \Theta_0 R_0}.$$

Ponieważ graniczny kąt Θ nie osiąga dużych wartości (nie przekracza $\pi/6$) można z wystarczającą dokładnością przyjąć przybliżony związek

$$(2.5) \quad \sin \Theta \cong \Theta - \frac{\Theta^3}{6}.$$

Biorąc pod uwagę (2.3) otrzymuje się

$$(2.6) \quad \Theta = \sqrt{6(1 - C)}.$$

W czaszy kulistej obciążonej ciśnieniem p występują naprężenia stanu błonowego

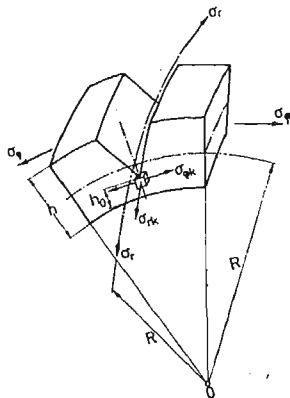
$$(2.7) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{pR}{2h},$$

stąd po uwzględnieniu związków (2.1), (2.4) i (2.6) otrzymamy

$$(2.8) \quad p = \frac{2h}{a} \sigma_\varphi \sin \sqrt{6 \left(1 - \frac{a}{(1 + \varepsilon_r) \Theta_0 R_0} \right)}.$$

W powyższym wzorze określenia wymagają jeszcze σ_φ i ε_r dla stanu granicznego.

Wybermy do rozważań element membrany wskazany na rys. 1 zawierający fragment karbu (rys. 3). Na dnie karbu wystąpi efekt spiętrzenia naprężeń, przy czym założono, że stan naprężenia jest płaski a karb wpływa jedynie na wartość składowej obwodowej:



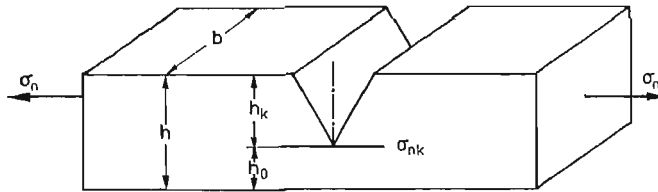
Rys. 3

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi k} &= \sigma_{\varphi} \frac{h}{h_0} \alpha_k, \\ \sigma_{rk} &= \sigma_{\varphi} \frac{h}{h_0}, \end{aligned}$$

gdzie α_k jest efektywnym współczynnikiem koncentracji naprężeń.

Graniczną wartość naprężeń obwodowych można uzyskać doświadczalnie w wyniku próby rozciągania płaskiej próbki z poprzecznym karbem o identycznej geometrii (rys. 4). W próbce tej wyznacza się wartość σ_n , przy czym naprężenie na dnie karbu wynosi

$$(2.10) \quad \sigma_{nk} = \sigma_n \frac{h}{h_0} \alpha_k.$$



Rys. 4

Przyjmując, że graniczną wartość naprężenia w strefie dna karbu określa naprężenie zredukowane wyznaczone wg hipotezy maksymalnej energii odkształcenia postaciowego, otrzymuje się zależność:

$$(2.11) \quad \sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{\varphi k}^2 + \sigma_{rk}^2 - \sigma_{\varphi k} \sigma_{rk}} = \sigma_{nk}.$$

Wprowadzając do (2.11) zależności (2.9) i (2.10) otrzymujemy związek pomiędzy naprężeniami granicznymi (niszczącymi) w membranie i w rozciąganej próbce:

$$(2.12) \quad \sigma_{\varphi} = \sigma_n \frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 - \alpha_k + 1}}.$$

Współczynnik α_k wyznaczyć można w oparciu o granicę wytrzymałości R_m wyznaczonej w próbce rozciągania próbki bez karbu:

$$(2.13) \quad \alpha_k = \frac{R_m}{\sigma_n}.$$

Związek fizyczny między odkształceniami i naprężeniami przy jednoosiowym rozciąganiu przyjmujemy wg [8] w postaci:

$$(2.14) \quad \varepsilon(\sigma) = \left[1 + a_n \left(\frac{\sigma}{E} \right)^{n-1} \right] \frac{\sigma}{E},$$

gdzie a_n jest stałą materiałową, natomiast n — nieparzystą liczbą naturalną; obie te wielkości można określić doświadczalnie dla konkretnego materiału.

W płaskim stanie naprężenia występującym w powłoce sferycznej ($\sigma_r = \sigma_{\varphi}$) zależność (2.14) przyjmuje postać:

$$(2.15) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_{\varphi} = \left[1 - \nu + \frac{a_n}{2} \left(\frac{\sigma_{\varphi}}{E} \right)^{n-1} \right] \frac{\sigma_{\varphi}}{E}.$$

W powyższych związkach E jest modułem sprężystości wyznaczanym w początkowym, prostoliniowym odcinku krzywej rozciągania, ν jest liczbą Poissona.

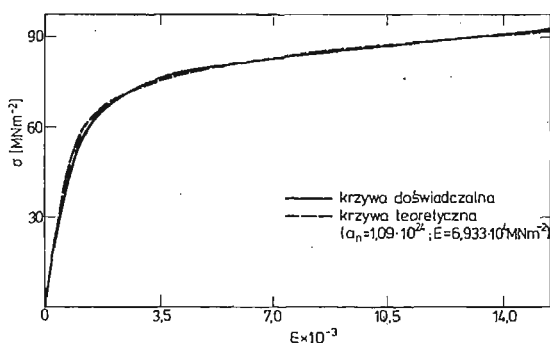
Wyznaczenie ciśnienia niszczącego ze wzoru (2.8) poprzedzone musi być wyznaczeniem stałych materiałowych n , a_n , E , ν oraz σ_n i R_m w oparciu o statyczną próbę rozciągania, a następnie określenie wartości α_k ze wzoru (2.13), σ_p z (2.12) oraz ε_r z (2.15).

3. Badania własności materiału

Przedmiotem badań była blacha aluminiowa PA1r, walcowana na zimno, o grubości nominalnej 1 mm, w stanie rekrytalizowanym. W pierwszej kolejności przeprowadzono próby rozciągania pięciu typowych próbek płaskich wyznaczając charakterystyki $\sigma-\varepsilon$ z pomiarów tensometrycznych oraz wartości granicy wytrzymałości na rozciąganie R_m . W wyniku badań ustalono następujące średnie wartości stałych materiałowych:

$$R_m = 115,5 \text{ MN/m}^2, \quad E = 6,933 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2, \quad \nu = 0.34.$$

Średnia charakterystyka $\sigma-\varepsilon$ przy rozciąganiu przedstawiona została na rys. 5 linią ciągłą.



Rys. 5

Charakterystykę $\sigma-\varepsilon$ aproksymuje się wzorem (2.14) odpowiednio określając wartości stałych a_n i n . Wyznaczono w ten sposób:

$$n = 9, \quad a_n = 1,09 \cdot 10^{24}.$$

Przebieg funkcji (2.14) dla tych wartości przedstawiony jest na rys. 5 linią przerywaną.

Z kolei przeprowadzono próby rozciągania dla próbek płaskich posiadających poprzeczny karb, którego profil określają wartości $\omega = \pi/6$, $\rho = 0,15$ mm. Badane były trzy rodzaje karbów o głębokościach $h_k = 0,4; 0,5; 0,6$ mm. W wyniku tych badań wyznaczono wartości naprężeń niszczących. Średnie z pięciu pomiarów wynoszą odpowiednio:

$$\sigma_n = 90,1; 79,9 \text{ i } 73,7 \text{ MN/m}^2.$$

4. Przykłady obliczeń

Dla przykładowego obliczenia ciśnienia niszczącego przyjęto następujące dane geometryczne membran:

Tablica I

1.	h_k [mm]	0,4	0,5	0,6
2.	σ_n [MN/m ²]	90,1	79,9	73,7
3.	α_k wzór (2.13)	1,282	1,445	1,567
4.	σ_φ [MN/m ²] (2.12)	98,992	90,072	84,038
5.	ε_r (2.15)	$14,39 \cdot 10^{-3}$	$6,60 \cdot 10^{-3}$	$3,88 \cdot 10^{-3}$
6.	f_0 [mm]	7,1	8,0	8,8
7.	R_0 [mm]	1696	1505	1354
8.	Θ_0 (2.1)	0,0915	0,1032	0,1147
9.	p [MN/m ²]	0,3612	0,2421	0,1930

— membrana okrągła o promieniu $a = 155$ mm, grubości $h = 0,94$ mm, z szesnastoma korbami o głębokościach 0,4; 0,5 i 0,6 mm i wstępnymi wyniosłościami f_0 odpowiednio 7,1; 8,0 i 8,8 mm,

— membrana kwadratowa o boku $b = 230$ mm, grubości, ilości korbów i ich głębokościach jak poprzednio, oraz o wstępnych wyniosłościach odpowiednio 6,7; 7,6 i 8,4 mm.

Wyniki obliczeń dla membrany okrągłej zestawiono w tablicy I.

Rozważania teoretyczne przedstawione w rozdziale 2 dotyczyły wyłącznie membran okrągłych. W odniesieniu do membran kwadratowych zastosowano tą samą metodykę obliczeń wprowadzając zamiast wymiaru a promień zastępczy a_z wynikający z równoważności pól powierzchni membrany kwadratowej i okrągłej:

$$a_z = b\pi^{-\frac{1}{2}} = 129,8 \text{ mm.}$$

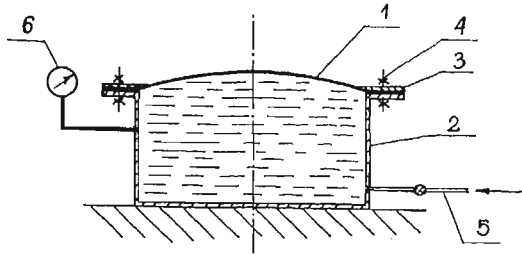
Wyniki obliczeń dla membran kwadratowych zestawiono w tablicy II.

Tablica II

Pozycje 1-5 jak w tablicy I.				
6.	f_0 [mm]	6,7	7,6	8,4
7.	R_0 (2.1)	1261	1112	1007
8.	Θ_0 (2.1)	0,1031	0,1170	0,1292
9.	p [MN/m ²]	0,4362	0,2975	0,2412

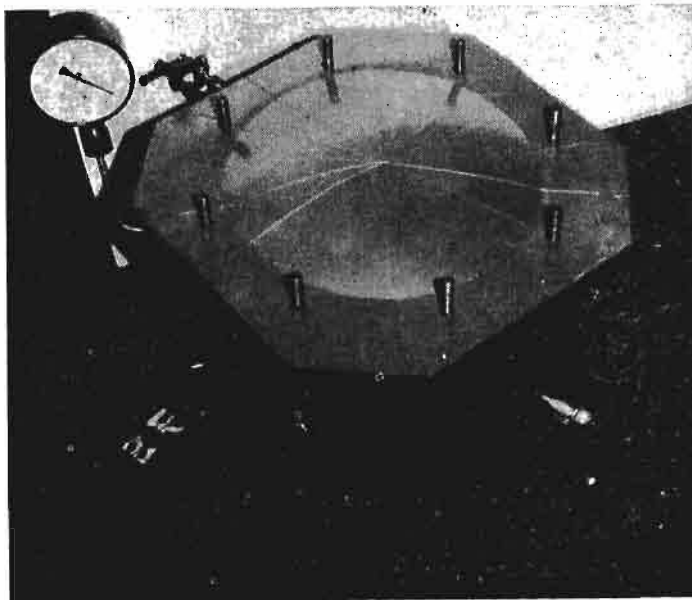
5. Badania doświadczalne membran

Badania przeprowadzono dla serii membran wykonanych z blachy aluminiowej PA1r o parametrach mechanicznych i geometrycznych podanych w rozdziałach 3 i 4 niniejszej pracy. Badano po 5 sztuk membran dla każdej głębokości karbu, w ogólnej ilości 30 sztuk. Schemat stanowiska badawczego pokazano na rys. 6. Badana membrana 1 zamocowana jest na obwodzie do kołnierza zbiornika 2 przy pomocy pierścienia 3 i śrub 4. Ciśnienie wewnątrz zbiornika mierzone jest manometrem 6. Olej doprowadzany jest do wnętrza zbiornika przewodem 5.

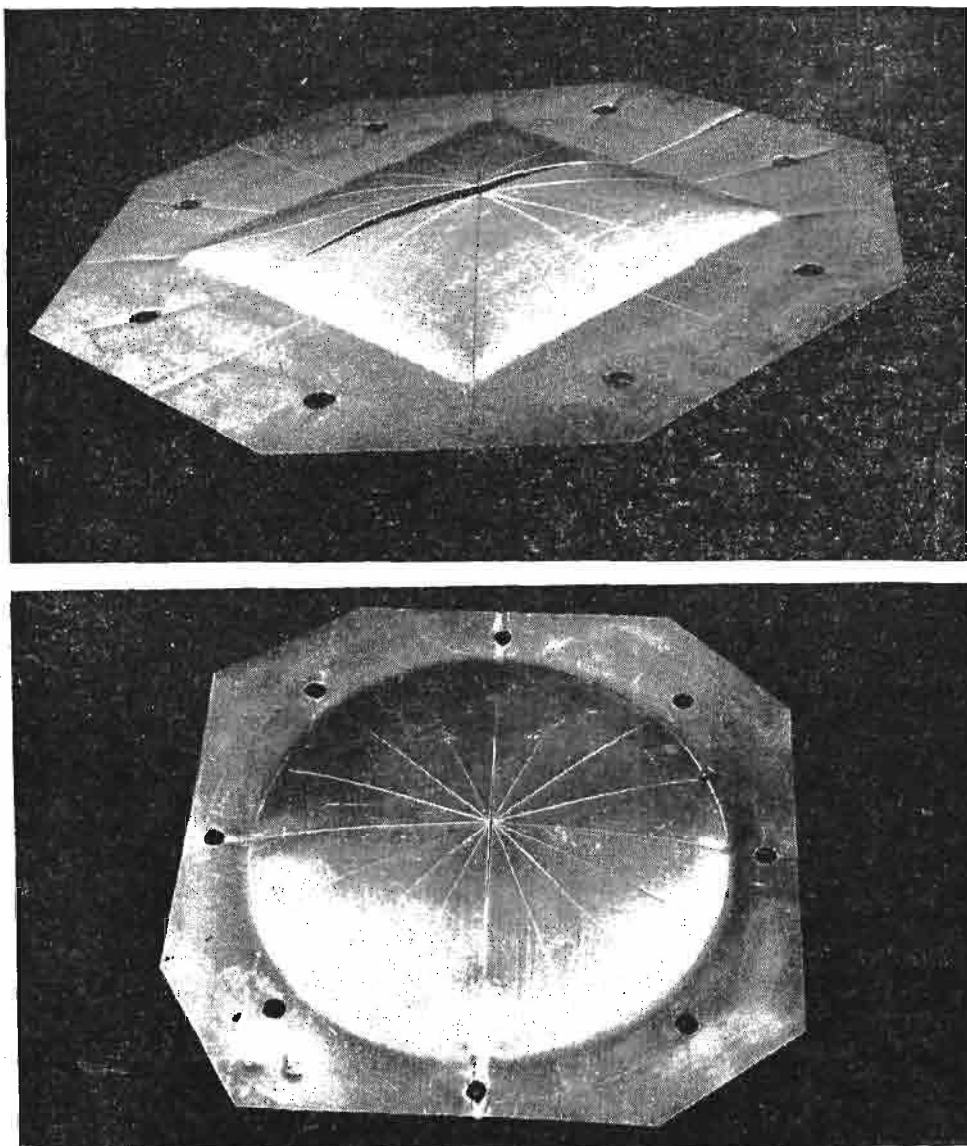


Rys. 6

Do wnętrza zbiornika przewodem doprowadzającym 5 tłoczony jest olej, powodując powolny wzrost ciśnienia we wnętrzu zbiornika mierzony manometrem 6. Prędkość wzrostu ciśnienia nie przekraczała wartości $0,03 \text{ MPas}^{-1}$. W wyniku badań rejestrowano maksymalne ciśnienie odpowiadające zniszczeniu membrany. Ogólny widok stanowiska badawczego z założoną membraną i zdemontowanym pierścieniem mocującym pokazano na fotografii (rys. 7). Zniszczenie membrany następowało każdorazowo w ten sposób, że w środ-



Rys. 7



Rys. 8

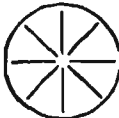

kowej części czaszy inicjowane były promieniowe szczeliny propagujące się wzdłuż jednego lub kilku karbów. Wygląd zewnętrzny zniszczonych membran pokazano na fotografiach (rys. 8).

Wyniki przeprowadzonych badań zestawiono w tablicy III.

6. Porównanie wyników

Rezultaty obliczeń ciśnień niszczących p przedstawione w tablicach I i II zestawiono z wartościami ciśnień p_{st} wyznaczonymi doświadczalnie i podanymi w tablicy III. Po-

Tablica III

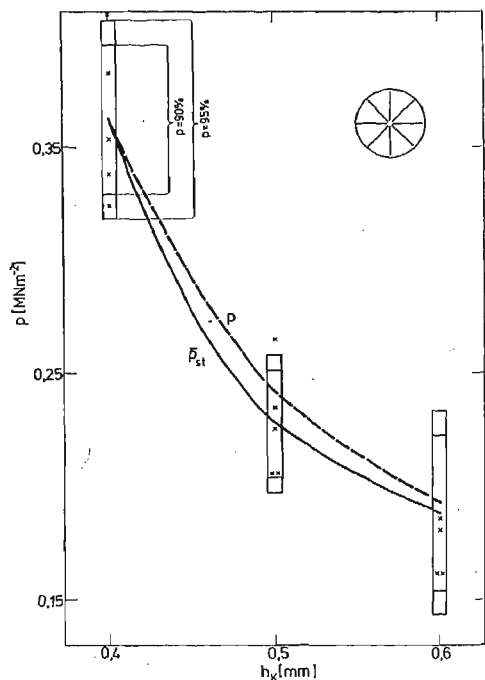
Kształt membrany	Powierzchnia membrany [m ²]	h_k [mm]	Ciśnienie niszczące p_{st} [kGcm ⁻²] ($\Delta p_{st} = 0,05$ kGcm ⁻²)					Średnie ciśn. niszczące \bar{p}_{st} [MPa]		Przedział ufności dla prawdopodobieństwa			
			1	2	3	4	5	[kGcm ⁻²]	[MPa]	90%	95%		
	0,075	0,4	3,30	3,60	3,90	4,20	3,45	3,69	0,362	0,329 ± 0,395	0,318 ± 0,406		
			2,10	2,10	2,70	2,30	2,40					2,32	0,228
			1,90	1,65	1,85	1,65	2,55						
	0,053	0,4	4,40	4,20	4,40	3,80	4,50	4,26	0,418	0,391 ± 0,444	0,383 ± 0,452		
			2,90	3,00	2,75	2,75	2,85					2,85	0,280
			2,20	2,35	2,25	2,45	2,45						

h_k — głębokość karbu.

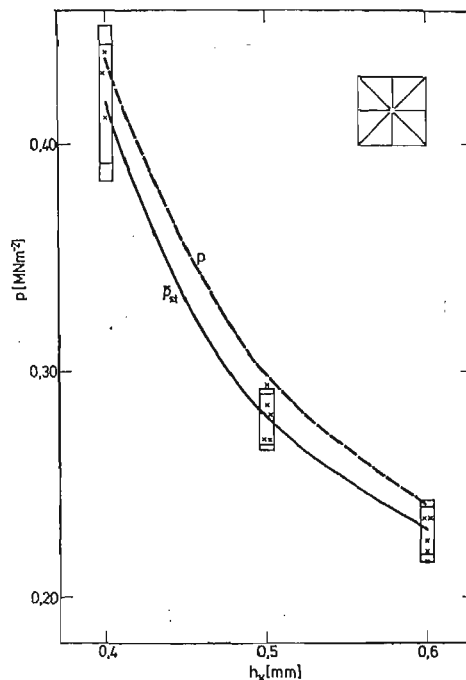
równanie wyników zilustrowano graficznie dla membran okrągłych (rys. 9) i dla membran kwadratowych (rys. 10).

Na rysunkach tych zaznaczono gwiazdkami wyniki poszczególnych prób doświadczalnych oraz naniesiono granice przedziałów ufności. Linie ciągłe ilustrują zależność średniego ciśnienia niszczącego \bar{p}_{st} określonego doświadczalnie od głębokości karbu h_k . Dla porównania przedstawiono linią przerywaną krzywą obrazującą tę samą zależność dla ciśnienia obliczeniowego p .

Zadawalająca zgodność krzywych teoretycznych z doświadczalnymi świadczy o poprawności przyjętego modelu teoretycznego bazującego na nieliniowym związku $\sigma-\epsilon$ oraz na hipotezie maksymalnej energii odkształcenia postaciowego.



Rys. 9



Rys. 10

W trakcie prób zaobserwowano dość duży rozrzut wyników doświadczalnych, szczególnie dla membran okrągłych. Rozrzut ten spowodowany jest niejednorodnością i anizotropowością materiału (blachy walcowanej), a także sposobem mocowania brzegów membrany umożliwiającym nieznaczne wysuwanie się materiału w kierunku dośrodkowym w czasie próby.

Zgodność teorii przyjętej w zasadzie dla membran okrągłych z wynikami badań membran kwadratowych wskazuje na prawidłowość przyjęcia promienia zastępczego wynikającego z równoważności powierzchni.

Mając na uwadze praktyczne zastosowanie membran w otworach dekompresyjnych, należy przeprowadzić także dodatkowe badania dynamiczne, które ostatecznie określą przydatność i zakres stosowania membran.

Literatura cytowana w tekście

1. A. GLEYZAL, *Plastic Deformation of a Circular Diaphragm Under Pressure*, J. of Applied Mechanics 1948, vol. 15, no. 33.
2. N. A. WEIL and N. N. NEWMARK, *Large Plastic Deformations of Circular Membranes*, J. of Applied Mechanics, 1955, vol. 22, no. 4.
3. ТРАН ЛЬЮ ЧИОНГ, *Жестко пластический анализ мембран с учетом упрочнения*, Изв. АН СССР, Механика, 4, 1965.
4. В. М. ТРУШИНА, *Большие деформации круглой мембраны из пластически неоднородного материала*, Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ростов-на-Дону, 1971, 189—194, „Наука”, 1973.
5. M. DUSZEK, *Plastic Analysis of Shallow Spherical Shells at Moderately Large Deflections*, Proceedings Second IUTAM Symposium on the Theory of Thin Shells, Copenhagen, September 1967, Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1969.
6. W. BARTKNECHT, *Explosionen*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1978.
7. VDI — RICHTLINIEN, *Druckentlastung von Staubexplosionen*, VDI 3673, Juni 1979.
8. H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.

Резюме

СТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ РАЗРУШАЮЩИЕ МЕМБРАНУ С РАДИАЛЬНЫМИ ПАЗАМИ

В работе представлено теоретическую модель использованную для определения давления разрушающего круглые и квадратные мембраны с начальной малой выпучиной и радиальными пазами. Используется экспериментально определенную нелинейную характеристику материала и гипотезу энергии изменения формы. Эффективный коэффициент концентрации напряжений определяется из испытаний на растяжение. Результаты вычислений сравнены с разрушающими давлениями определёнными экспериментально гидравлическом методом.

Summary

STATIC BURSTING PRESSURE FOR THE MEMBRANE WITH RADIAL GROOVES

The theoretical model for evaluating bursting pressure for circular and quadratic squared membranes with small initial deflection and radial grooves is presented. The use is made of experimentally obtained nonlinear material characteristic and distortion energy theory. The effective stress concentration factor is developed on the basis of tension material tests. The results are compared with bursting pressures obtained experimentally by hydraulic method.

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 października 1981 roku